

文章编号: 1000-0887(2000)05-0441-10

# 计算激波的高精度数值方法\*

袁湘江<sup>1, 2</sup>, 周 恒<sup>1</sup>

(1. 天津大学 力学系, 天津 300072; 2. 中国空气动力研究与发展中心, 四川 绵阳 621000)

(我刊编委周恒来稿)

摘要: 在分析了数值解在激波附近产生非物理振荡的原因后, 构造了一个三阶迎风紧致格式以及激波的捕捉技术, 并且, 提出一种称为准装配法的新的激波装配方法。一维流动的数值试验表明, 新方法是非常令人满意的。

关键词: 数值方法; 激波计算; 迎风紧致格式

中图分类号: O241.3; O354 文献标识码: A

## 引 言

适用于带激波的流场计算的高精度格式是非常重要的。作为一个重要课题, 带激波流场的数值计算已经进行了多年的研究。计算激波的方法大体说来可分为激波装配法和激波捕捉法两类。装配法是以间断面作为边界面, 把求解区域分解为若干个子区域。在每个区域内, 人们可采用适当的数值方法。而在边界面上, 利用 Rankin-Hugouiet 关系(以下简称 R-H 关系)将间断面两侧的解联系起来。这种方法的主要缺点是: 首先, 必须预先知道激波的近似位置, 第二, 在激波两边必须使用单边差分来处理边界, 而这样做有时会引起计算不稳定, 第三, 当作为子区的边界的激波在计算过程中运动时, 必须每一步都调整子区的网格。因此, 尽管这种数值方法具有很高的精度, 但使用起来不很方便, 事实上, 这种方法自 Gary<sup>[1]</sup>提出以来无太大发展。

捕捉法无需事先知道激波的位置。激波是在数值求解过程中自动捕捉得到。然而, 这种方法如果没有特殊处理, 数值解在激波附近将产生非物理振荡。目前, 已经提出了一些用于不同格式抑制非物理振荡的数值方法, 有代表性的工作主要有: TVD<sup>[2]</sup>、ENO<sup>[3]</sup>和 NND<sup>[4]</sup>格式。相应的分析在其它文献中已有记述。

NND 是二阶精度格式。而尽管用 TVD 和 ENO 的思想可以构造出更高精度的格式。但是, 只有二阶精度格式可以完全抑制激波附近的非物理振荡。

对某些问题而言, 则需要高精度格式, 如 Kim 和 Moin 所做的转捩或湍流的数值研究等。对超音速边界层, 计算格式不仅必须具有高精度和高分辨度, 并且, 还须具备计算激波的能力。

\* 收稿日期: 1999\_03\_01; 修订日期: 2000\_02\_15

基金项目: 国家攀登计划资助项目

作者简介: 袁湘江(1962~), 男, 副研究员。

周恒(1929~), 男, 教授, 博导, 中科院院士。

力·傅德薰和马延文<sup>[5,6]</sup>提出了具有高精度和高分辨度紧致格式以及处理激波的方法·然而,这种方法不能完全抑制激波附近的非物理振荡·

本文提出了一个三阶紧致格式,分析表明该格式具有很高的分辨率·同时,根据 NND 的思想建立了一种消除激波附近非物理振荡的办法·通过对一维定常激波和激波管的试算表明,这是一种比较好的方法·

另外,本文还发展了一种新的激波的准装配技术,采用这种方法在整个计算区域内采用同一格式,无须在激波两边处理边界条件,并且,可以任意提高格式的精度·通过对一维激波管、定常激波以及变截面流动问题进行了试算,结果表明这种方法是非常有效的·

## 1 三阶紧致格式

考虑对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad g = au, \quad (1)$$

若令  $g^+$  表示  $a > 0$  的情况,  $g^-$  表示  $a < 0$  的情况,本文构造的三点三阶弱迎风紧致格式具有如下形式:

$$\left. \begin{aligned} 5G_{j-1}^+ + 8G_j^+ - G_{j+1}^+ &= \frac{12}{h}(g_j^+ - g_{j-1}^+), \\ -G_{j-1}^- + 8G_j^- + 5G_{j+1}^- &= \frac{12}{h}(g_{j+1}^- - g_j^-), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中  $G_j$  表示  $g_j$  的导数的差分逼近式,  $h$  为网格间距·由(2)可见方程左端主对角占优已自动满足·

下面我们对格式(2)进行 Fourier 分析,先假定  $g(x)$  在空间上是周期的,其周期为  $L$ ,若网格点的总点数为  $N+1$ ,网格间距  $h = L/N$ ,则  $g$  可表示为

$$g(x) = \sum_{k=-N/2}^{k=N/2} a\hat{g}_k \exp\left[\frac{2\pi i k x}{L}\right], \quad (3)$$

这里  $i = \sqrt{-1}$ ,由于  $g(x)$  是实数函数,故 Fourier 系数应满足  $\hat{g}_k = \hat{g}_{-k}^*$ ,  $1 \leq k \leq N/2$ ,及  $f_0 = f_0^*$ ,“\*”表示为共轭复数·定义  $\omega = 2\pi k h / L = 2\pi k / N$ ,  $s = x/h$ ·则 Fourier 模式可简单地

表示成  $\exp(i\omega s)$ ·方程(3)对  $x$  精确一阶导数的 Fourier 系数为  $G_k = (i\omega/h)\hat{g}_k$ ·我们可以通过差分格式解出  $g_k$  的一阶导数的 Fourier 系数与  $g_k$  的精确一阶导数的 Fourier 系数比较,以估计格式(2)计算一阶导数的误差大小·令  $G_k = (\omega_e/h)\hat{g}_k$ ,其中  $\omega_e = \omega_r + i\omega_i$  为复数,  $\omega_r$  反应差分附加的对不同波数的波的耗散作用,  $\omega_i$  则与不同波数的波相速度有关·若令方程(1)的初值有  $u(0, x) = \exp(i\omega s)$  形式,则不难得到方程在此初值条件下的解:

$$u(t, x) = \exp\left[-\frac{a\omega_r t}{h}\right] \exp\left[i\left[\omega s - \frac{a\omega_i t}{h}\right]\right], \quad (4)$$

可见  $a\omega_r > 0$  是正耗散· $\omega_i$  是修正波数与各波数波的差分近似的相速度有关,代入(2)之后,对  $a > 0$  的情况我们得到

$$\omega_r = \frac{6(3 - 4\cos\omega + \cos 2\omega)}{45 + 32\cos\omega - 5\cos 2\omega}, \quad \omega_i = \frac{6(14\sin\omega - \sin 2\omega)}{45 + 32\cos\omega - 5\cos 2\omega}. \quad (5)$$

为考察格式(2)的误差,比较与普通同阶格式的优劣·以三阶偏心格式及三点四阶 Pade' 格式为例,偏心格式形式如下:

$$G_j = (g_{j-2} - 6g_{j-1} + 3g_j + 2g_{j+1})/6h, \quad (6)$$

对方程(6)进行 Fourier 分析, 仍采用上面的假定, 易得

$$\omega_r = (\cos 2\omega - 4\cos \omega + 3)/6, \quad \omega_i = (-\sin 2\omega + 8\sin \omega)/6 \quad (7)$$

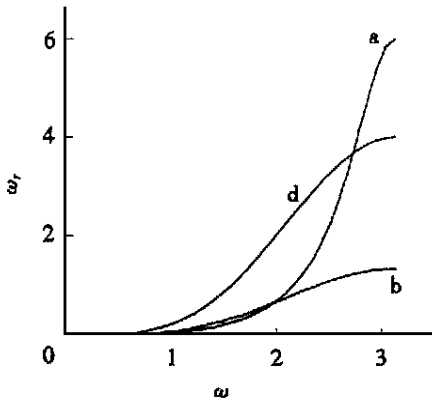
Padé 格式具有如下形式

$$G_{j-1} + 4G_j + G_{j+1} = 3(g_{j+1} - g_{j-1})/h \quad (8)$$

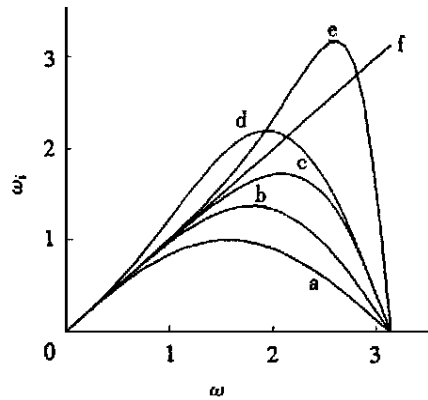
同样, 在上述假定下, 对(8)式进行 Fourier 分析, 得到  $\omega_r = 0$

$$\omega_i = 3\sin \omega / (2 + \cos \omega) \quad (9)$$

为便于比较, 我们将式(5)、(7)和(9)中  $\omega_r$  和  $\omega_i$  随  $\omega$  的变化, 分别描绘在图 1 和图 2 中, 由图 1 可见三阶紧致格式对高波数波具有较强的抑制作用, 且其作用强度远大于四点三阶偏心格式。中心型四阶精度格式因  $\omega_r = 0$ , 因而对任何波数的波均无抑制作用。图 2 反应格式的分辨度, 易知三阶弱迎风紧致格式模拟的 Fourier 分量远优于同阶精度的非紧致差分格式。在总体上甚至优于 Padé 格式。另外, 三阶弱迎风紧致格式, 只须一阶单边迎风格式所用点数。



a. 三阶三点迎风紧致格式  
 b. 四阶三点迎风偏心格式  
 d. 三点二阶迎风单边格式  
 图 1 迎风格式  $\omega_r$  随  $\omega$  的变化



a. 二阶中心差分格式  
 b. 三阶四点迎风偏心格式  
 c. Padé 紧致格式  
 d. 二阶迎风单边格式  
 e. 三阶三点迎风紧致格式  
 f. 精确解  
 图 2 迎风格式  $\omega_i$  随  $\omega$  的变化

## 2 一种具有三阶精度的激波捕捉法

在文献[4]中, 张分析和给出了格式在计算激波时为避免非物理振荡所满足的条件。从分析修正方程中的色散项和耗散项对激波上产生非物理振荡的作用入手构造的 NND 格式, 在保持了解的单调性的同时满足了间断面上的熵条件。本文则从分析激波附近的非物理波动产生的原因入手, 寻找紧致格式处理激波的方法。其基本观点是修正方程中附加项的弥散影响使得在激波上游数值解的波包传播速度比物理传播速度快, 而在激波下游数值解的波包传播速度则比物理传播速度慢, 以使所产生的振荡陷入激波。NND 格式就是完全符合这一思想的产物。

下一节中, 我们将从另一种观点出发, 分析非物理振荡产生的原因。

上述修正方程的思想虽难于直接应用在紧致格式上, 但基本思想是相同的。因此, 在激波上游, 采用快格式, 比如

$$\left. \begin{aligned} 5G_{j-1}^+ + 8G_j^+ - G_{j+1}^+ &= \frac{12}{h}(g_j^+ - g_{j-1}^+), \\ G_{j-1}^- + 4G_j^- + G_{j+1}^- &= \frac{3}{h}(g_j^- - g_{j-1}^-), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中, 上标“+”或“-”分别对应于分裂后的正、负通量。另一方面, 在激波下游, 采用慢格式, 如

$$\left. \begin{aligned} G_{j-1}^+ + 4G_j^+ + G_{j+1}^+ &= \frac{3}{h}(g_{j+1}^+ - g_{j-1}^+), \\ -G_{j-1}^- + 8G_j^- + 5G_{j+1}^- &= \frac{12}{h}(g_{j+1}^- - g_j^-), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

当  $(g_{j+1}^+ - g_j^+)(g_j^+ - g_{j-1}^+) < 0$  或  $(g_{j+1}^- - g_j^-)(g_j^- - g_{j-1}^-) < 0$  时, 象 NND 格式一样降为一阶精度。

试验表明, 仅依靠上述技术还不能完全抑制非物理振荡, 因此, 还要采用文献[5]中的粘性比拟方法。也就是说加这样一项:

$$h \frac{\partial}{\partial x} u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (12)$$

其中

$$u = \sigma h^{n-1} \frac{|\partial^n g / \partial x^n|}{|\partial g / \partial x|} a, \quad (13)$$

其中,  $\sigma$  是可调参数, 本文取  $n = 5$ 。

### 3 准激波装配方法

利用激波的装配法可以得到很精确的数值解, 但是, 以其以往的方式, 在实际操作中并不方便。例如, 由于激波而划分出子区, 在激波两边都需提边界条件, 这样, 在任一边所需的边界面上的导数, 只能用该子区内的网格点来求。这样一来可能导致计算不稳定, 尤其是在马赫数或格式精度较高时。此外, 如果激波运动, 在每一步必须生成新的网格点。

我们在提出新方法前, 从另一种观点出发来分析为什么在数值计算中激波附近会发生非物理振荡出现。而以往的分析在别的文献中能够到, 我们就不重复了。

对一维激波问题, 如果, 我们把 Euler 方程写成守恒形式, 即

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (14)$$

式中  $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, e_t]^T$ ,  $\mathbf{F} = [\rho u, \rho u^2 + p, (e_t + p)u]^T$ ,  $\rho, p, u$  分别表示流场的密度、压力、速度值,  $e_t$  为总能量定义为

$$e_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2,$$

其中  $\gamma$  是气体常数,  $t, x$  分别为时间和空间坐标。

在激波上,  $\mathbf{U}$  是不连续的, 但  $\mathbf{F}$  是连续的。事实上, 跨过激波时,  $\mathbf{F}$  保持不变。因而, 在(14)中的  $\partial \mathbf{F} / \partial x$  在过激波时, 似乎如不采用基于特征方向分裂形式, 就不应产生非物理振荡。但若没有通量分裂, 实际计算常常是不稳定的。如果通量分裂, 无论采用那种分裂技术, 正、负通量在激波上都出现不连续。由于, 正、负通量在激波上存在间断, 因此, 它们的导数就不可避免地要出现非物理振荡。而用迎风格式计算数值导数, 对同一物理点的正、负通量导数却依赖不同的网格点。从这个意义上说, 使用迎风格式会更糟。

例如,若激波在  $j$  和  $j+1$  之间时,用一阶迎风格式计算的正通量  $f^+$  在  $j+1$  处的导数是  $(f_{j+1}^+ - f_j^+)/h$ , 而用一阶迎风格式计算的负通量  $f^-$  在  $j$  处的导数是  $(f_{j+1}^- - f_j^-)/h$ . 对定常激波而言,在跨过激波时,总通量没有变化,所以,理论上,这两个值应相互抵消. 然而,它们却代表  $j$  和  $j+1$  两点点上的值,所以,在差分近似中要引起非物理振荡.

鉴于这些讨论,为避免非物理振荡,一种可行的方法是人为令正、负通量的差分在跨过激波时等于零. 这种方法也可应用于那些格式中只需两相邻点的通量值的紧致格式,如式(10)和(11)所示的迎风紧致格式. 事实上,只要格式的右边保持与(10)中的第一式或(11)中的第二式具有相同的形式,它可以推广到任意阶精度的紧致格式. 例如,这种方法也适用于如下所示五阶精度的迎风紧致格式:

$$\left. \begin{aligned} -19G_{j-2}^+ + 346G_{j-1}^+ + 456G_j^+ - 74G_{j+1}^+ + 11G_{j+2}^+ &= \frac{720}{h}(g_j^+ - g_{j-1}^+), \\ 11G_{j-2}^- - 74G_{j-1}^- + 456G_j^- + 346G_{j+1}^- - 19G_{j+2}^- &= \frac{720}{h}(g_{j+1}^- - g_j^-). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

为使用这种方法,必须知道激波的位置. 这个位置可通过寻找压力或密度有显著变化的点来确定. 当然,确定这类点的标准多少有些人为因素. 如果,我们找到的这种点的位置在第  $i$  和第  $i+1$  个网格点之间,那么,我们令(15)中的第一式的右边项在  $j = i+1$  时等于零,其第二式的右边项在  $j = i$  时等于零. 用这种方法,数值计算的非物理振荡可以得到非常有效地抑制,即完全“陷入”或“吸收进”激波. 然而,由于上述人为动作,在跨过激波时,通量不再保持恒定. 所以,在跨过激波时,必须使用 R\_H 关系. 我们在计算中不是步步而是每两、三步使用一次 R\_H 关系. 上述方法与从前的激波装配法的差别在于:首先,激波不一定在一个网格点上,所以,无须在每一步重新生成网格点. 其次,也不需要对接波分隔的每个子区提边界条件,这样就大大增强了在高马赫数情况下的计算能力. 事实上,数值试验的情况表明对马赫数实际上没有限制. 这种方法能很干脆地分辨激波,就是说,激波的厚度只有一个网格间距.

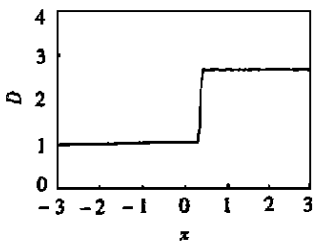
这种方法还能应用于变截面管道的准一维问题. 在这种情况下,所使用的 R\_H 关系必须适用于运动激波,以计算激波的运动速度并相应调整激波位置. 最终激波将运动到正确位置. 显然,利用这种方法,激波位置可以确定到两网格点之间. 根据我们的试验激波位置的误差在一个网格间距以内. 若在两网格点之间设虚点代表激波的精确位置,并用等熵流条件由激波两边的变量值导出它们在相邻的网格点之值,就能得到更准确的激波位置. 但对于变截面流动,数值方法不可避免地要引入数值误差,所以,激波位置不能达到任意精确的程度. 但能满足小于一个网格间距.

## 4 结 果

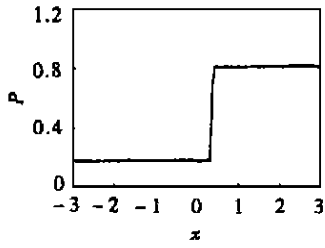
本文运用 2 和 3 节中建议的方法进行了一系列试验. 各算例计算域均在区间  $x \in [-3, 3]$  上,网格点总数是 131. 对定常激波,在出口处的压力由精确解给出. 边界条件均采用 Poinso 和 Lele<sup>[7]</sup> 提出的无反射边界条件.

算例 1 定常激波问题,设来流马赫数为  $M_\infty$ ,无量纲化后的入口条件是

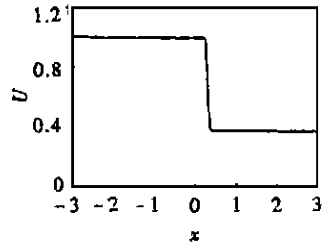
$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2}} \end{bmatrix} \quad (\text{当 } x = -3 \text{ 时}). \quad (16)$$



(a) 密度

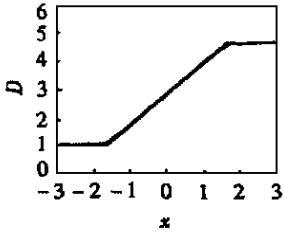


(b) 压力

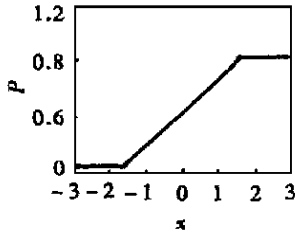


(c) 速度

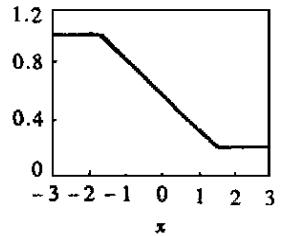
图3 捕捉法计算的定常激波



(a) 密度

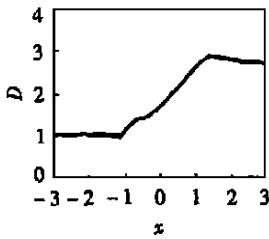


(b) 压力

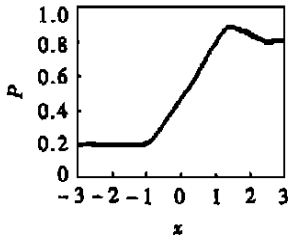


(c) 速度

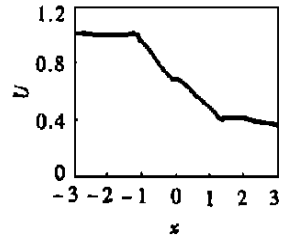
图4a 初始值



(a) 密度

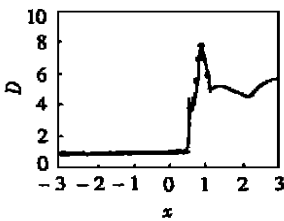


(b) 压力

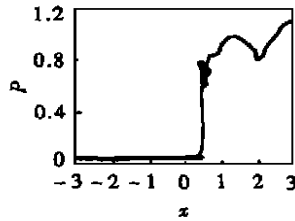


(c) 速度

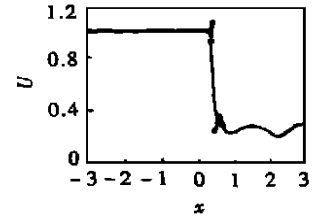
图4b  $t = 2$ 时物理量的空间分布



(a) 密度



(b) 压力



(c) 速度

图4c  $t = 4$ 时物理量的空间分布

图3 为马赫数  $M_\infty = 2$  时, 由2节中的捕捉激波的办法得到的密度, 压力和速度在空间的分布. 由图可见, 激波附近无非物理振荡, 且激波上只有两个不满足 R-H 关系的非物理点, 如定义通量误差  $\epsilon_E = \max \left| \frac{[E_{fi} - E_{f0}]}{E_{f0}} \right|$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $E_{fi}$  是任一点,  $E_{f0}$  是进口处通量. 则

最大通量的误差发生在激波上两个非物理点上,其大小在 5% 左右,其它各点上的  $\varepsilon_E$  均小于 0.1%。

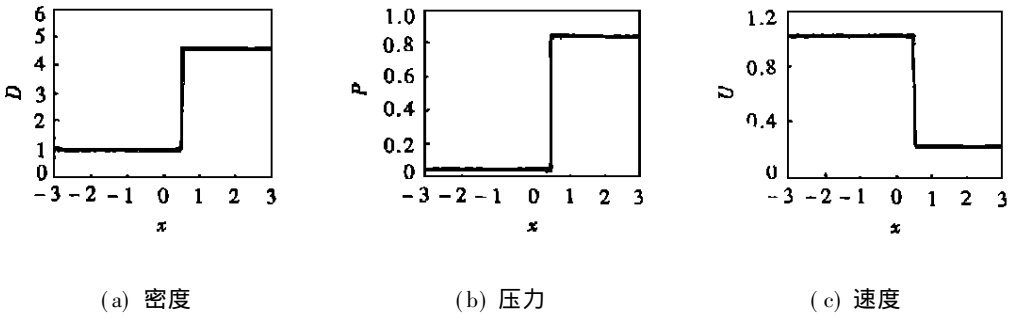


图 4d  $t = 40$  时物理量的空间分布

图 4 新方法计算的定常激波

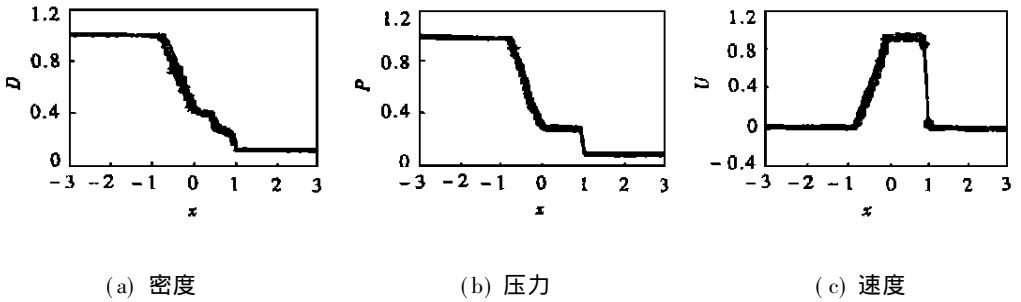


图 5a 全网格点图

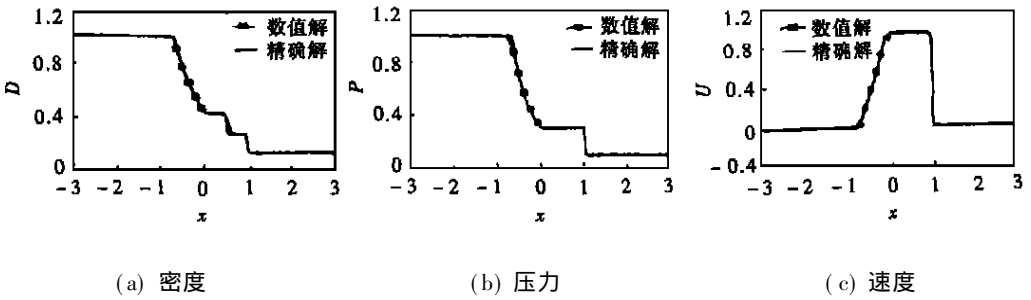


图 5b 与精确解的比较

图 5 捕捉法计算的激波管,当  $t = 0.57$  时物理量的空间分布

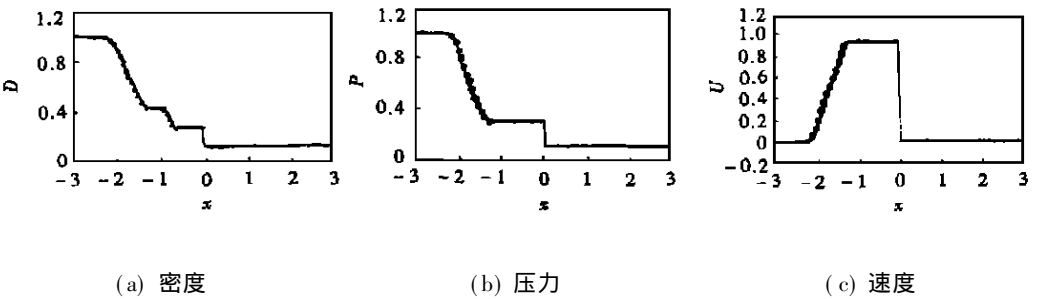


图 6 新方法计算的激波管,当  $t = 0.5$  时,物理量沿空间分布

这种方法还适用于  $M_\infty > 5$  的高超音速。

算例2 定常激波问题, 本例取  $M_\infty = 4$ 。结果运用3节中提出的方法得到,  $\Delta t = 0.005$ 。图4a是密度, 压力和速度的初始值, 图4a、c、d分别为当  $t = 2, 4$  和40个时间单位时的数值扰动情况。可以看到当  $t = 40$ 时, 已很好地解出了激波。在算例1中定义的通量误差在任意点均小于0.00001%。

对  $M_\infty > 5$  的情况, 由于本例中的初值是完全任意的, 故可能发生类似压力或密度出负这样的问题。但出问题的点并不在激波上, 而在别的某个位置。我们是这样解决这个问题: 先采用一阶迎风格式得到较好的初场后, 再转用3节中提出的方法。这样做直至  $M_\infty = 15$  均无问题。

如果采用五阶格式计算, 时间步长要略小一些。据试验  $\Delta t = 0.004$  为宜。

算例3 激波管问题

图5是利用第2节中建议的激波捕捉法计算得到的结果。并在0.57个时间单位时与精确解进行了比较, 可以看出数值解和精确解很一致。

图6是同一个问题采用第3节中建议的激波计算方法得到的当  $t = 0.5$ 个时间单位时的计算结果。为利用方便, 将坐标系随激波运动, 激波速度由R<sub>H</sub>关系得出。显然, 激波可以解的非常好。

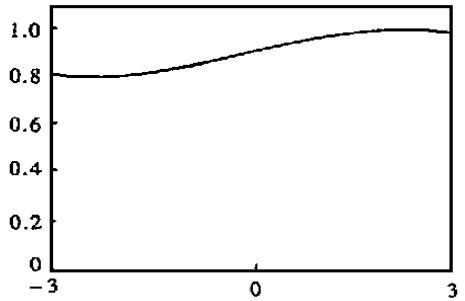
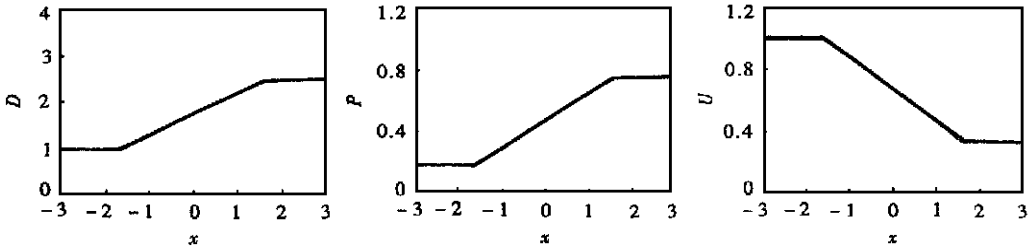
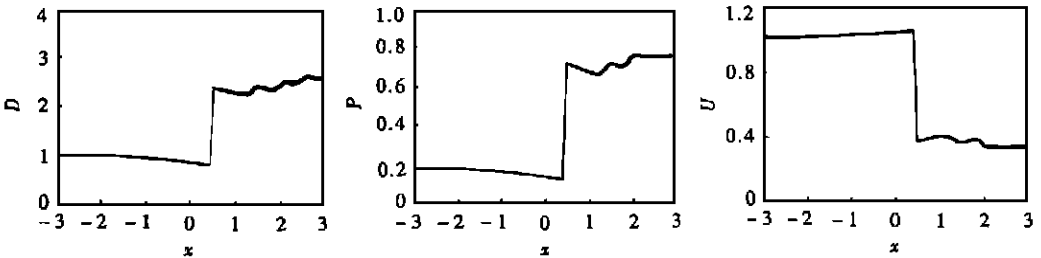


图7 变截面管外形图



(a) 密度 (b) 压力 (c) 速度

图8a 初始值



(a) 密度 (b) 压力 (c) 速度

图8b  $t = 2$ 时物理量的空间分布

算例4 变截面管道中的定常激波

图7是变截面管的外形。  $M_\infty = 2$ 。图8a是密度, 压力和速度的初值, 与等截面的情况类似。图8b、c、d分别为  $t = 2, 4$  和40个时间单位的计算结果。激波位置精确到小于一个



网格间距·密度,压力和速度任意点的误差均在0.05%以下·例如,出口处的密度的精确解应为0.255 29,数值解的结果是0.255 16·若采用上述在两网格之间设虚点来标示激波位置,出口处密度可达0.255 27·

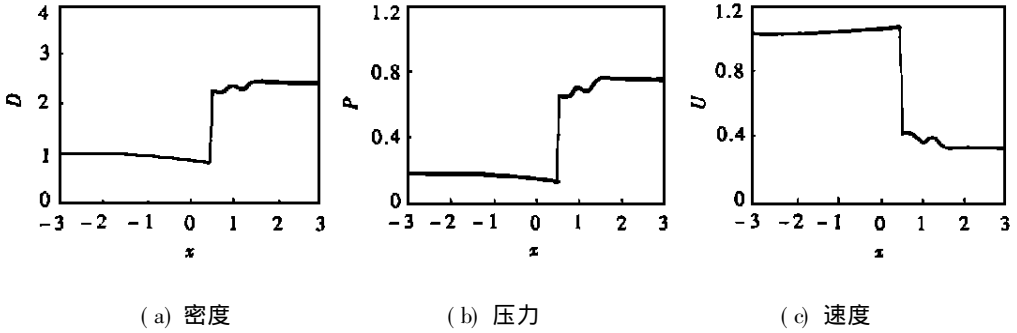


图 8c  $t = 4$  时物理量的空间分布

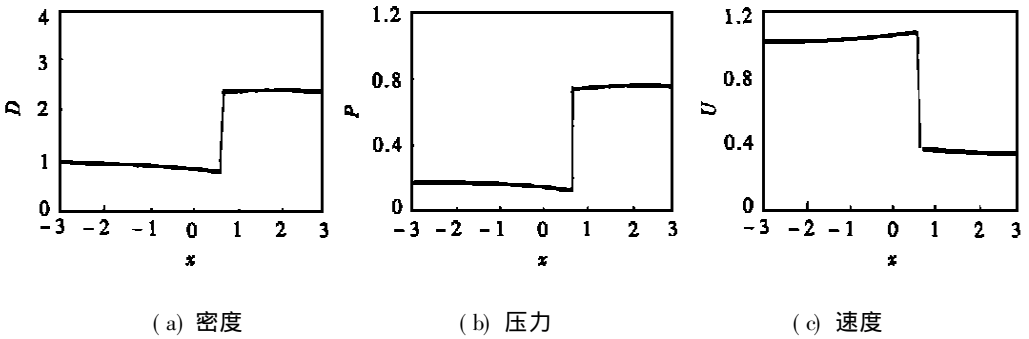


图 8d  $t = 40$  时物理量的空间分布

图 8 新方法计算的变截面定常激波

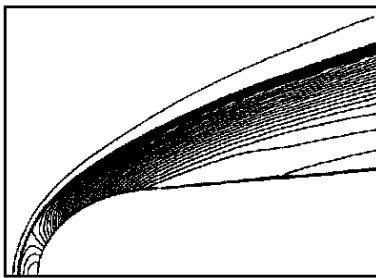


图 9a 等密度线

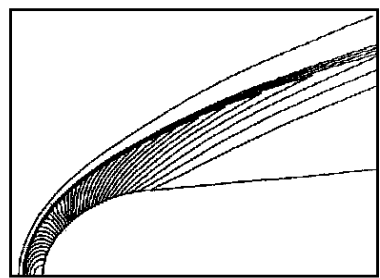


图 9b 等压力线

算例 5 绕球锥的轴对称流动

图 9 是计算网格和球锥子午面上的物理量分布·  $M_\infty = 2$ , 雷诺数  $Re = 10^6$ ,  $T_e = 65K$ ·由于网格点的位置在计算中每一步都要变化, 根据轴对称的特点, 我们采用一般曲线坐标系下的 N\_S 方程, 使激波位于一条坐标线上· 在激波法向, 采用第 3 节中提出的计算方法, 切向则无须特殊处理· 图 9a、b、c 分别表示密度, 压力和马赫数的等值线图· 很显然, 跨过激波时没有振荡, 激波问题得以很好的解决·

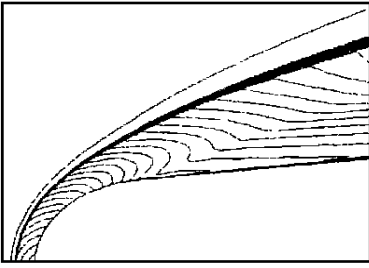


图 9c 等马赫线

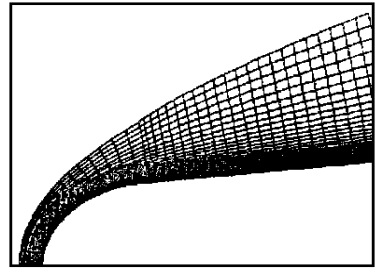


图 9d 计算网格

图 9 用准装配法计算的球锥绕流流场

## [ 参 考 文 献 ]

- [1] Gary J. On certain finite difference schemes for hyperbolic systems[J]. *Math Comp*, 1964, (18):
- [2] Harten A. High resolution schemes for conservation laws[J]. *J Comp Phys*, 1983, **49**: 357~ 393.
- [3] Harten A, Osher S. Uniformly high\_order accurate non\_oscillatory schemes I[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1987, **24**(2): 279~ 309.
- [4] 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式[J]. *空气动力学学报*, 1988, **6**(2): 143~ 164.
- [5] 傅德薰, 马延文. 群速度控制方法及三维平面混合流的数值模拟[A]. 纪念中国力学学会成立四十周年论文集[C]. 北京: 清华大学出版社, 1998, 535~ 538.
- [6] 傅德薰, 马延文. 计算空气动力学中的一个新的激波捕捉法——耗散比拟法[J]. *中国科学, A 辑*, 1992, **22**(3): 263~ 271.
- [7] Poinso T J, Lele S K. Boundary conditions for direct numerical simulations of compressible viscous flows[J]. *J Comp Phys*, 1992, **101**(1): 104~ 129.

## Numerical Schemes With High Order of Accuracy for the Computation of Shock Waves

Yuan Xiangjiang<sup>1,2</sup>, Zhou Heng<sup>1</sup>

(1 Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China;

2 Research and Development Center of Aerodynamics of China,

Miangyang, Sichuan 621000, P R China)

**Abstract:** High order accurate scheme is highly desirable for flow computation with shocks. After analysis has been made for the reason of the generation of non\_physical oscillations around the shock in numerical computations, a third order, upwind biased, shock capturing scheme was proposed. Also, a new shock fitting method, called pseudo shock fitting method, was suggested, which in principle can be with any order of accuracy. Test cases for one dimensional flows show that the new method is very satisfactory.

**Key words:** numerical method; computation of shock waves; upwind compact scheme