应用数学和力学, 第 21 卷 第 5 期(2000 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 05_0488_07

事件空间中单面非 Chetaev 型非完整系统的 Noether 定理*

李元成[1], 张 毅[2], 梁景辉[3]

(1. 石油大学 应用物理系, 山东 东营 257062; 2. 苏州城建环保学院 基础部, 苏州 215011;
3. 山西师范大学 物理系, 山西 临汾 041004)

(樊大钧推荐)

摘要: 研究事件空间中单面非 Chetaev 型非完整系统的 Noether 定理· 首先给出了系统的 D'Alembert_Lagrange 原理; 其次基于该原理在群的无限小变换下的不变性, 研究了非 Chetaev 型非完整系统的 Noether 定理及逆定理; 最后举例说明结果的应用·

关 键 词: 分析力学; 事件空间; 单面约束; 非完整系统; Noether 定理; Noether 逆定理

中图分类号: O316 文献标识码: A

动力学系统的守恒律的研究是近代分析力学的一个重要方面· 1918 年 Noether[1] 利用 Hamilton 作用量在无限小变换下的不变性, 研究了力学系统的守恒律, 提出了著名的 Noether 定理· 利用微分变分原理也可以研究守恒律· 1978 年 Vujanovic[2] 从 D' Alembert 原理出发研究动力学系统的守恒律· 1986 年 Vujanovic[3] 又进一步利用 Jourdain 原理和 Gauss 原理研究完整非保守系统的守恒律· 虽然近十几年来对动力学系统的对称性和守恒律的研究取得了重要进展[4~9], 但这些研究大多局限于位形空间中双面理想系统· 实际上单面约束比双面约束更普遍, 研究起来也更为困难· 文[8] 研究了位形空间中单面约束系统的对称性和守恒律· 本文进一步基于微分变分原理来研究事件空间中非 Chetaev 型非完整系统的 Noether 定理及逆定理并给出算例·

1 系统的 D' Alembert_Lagrange 原理

若系统的位形由 n 个广义坐标 q_s $(s = 1, \cdots, n)$ 来确定, 系统所受的理想单面约束为

$$\varphi_\gamma(q_s, t) \geqslant 0 \qquad (\gamma = 1, \cdots, a), \tag{1}$$

$$\psi_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) \geqslant 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g)\cdot \tag{2}$$

且设约束曲面边界是光滑的, 碰撞是完全弹性的· 约束(1) 为完整约束, 约束(2) 为非完整约束·

当约束(1) 或(2) 左边部分函数值为正时, 就说系统脱离该约束; 当左边部分函数值等于零

---

* 收稿日期: 1999_04_23; 修订日期: 2000_01_06
基金项目: 高校博士学科点专项基金资助课题
作者简介: 李元成(1957~), 副教授, 理学学士.

时, 就说该约束起作用•

设约束(2)加在虚位移上的限制为

$$\sum_{s=1}^{n} f_{\beta s}(t, q_s, \dot{q}_s)\delta q_s = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g), \tag{3}$$

一般说来, $f_{\beta s}$ 与 $\partial\psi_{\beta s}/\partial\dot{q}_s$ 无关, 特别当取 $f_{\beta s} = \partial\psi_{\beta s}/\partial\dot{q}_s$ 时, 则为 Chetaev 型非完整约束•

位形空间中系统的 D' Alembert_Lagrange 原理的 Euler_Lagrange 形式为

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{n}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s} + \frac{\partial L}{\partial q_s} + Q_s + \sum_{\gamma=1}^{a}\lambda_\gamma\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial q_s} + \sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta f_{\beta s}\right]\delta q_s = 0,\\
&\lambda_\gamma \geqslant 0,\quad \varphi_\gamma \geqslant 0,\quad \lambda_\gamma\varphi_\gamma = 0 \qquad (\gamma = 1, \cdots, a),\\
&\mu_\beta \geqslant 0,\quad \psi_\beta \geqslant 0,\quad \mu_\beta\psi_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g),
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中 L 为系统的 Lagrange 函数, Q_s 为非势广义力, λ_γ, μ_β 为约束乘子•

现在建立 $(n+1)$ 维扩充的位形空间, 即事件空间•　在此空间中点的坐标是广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 和时间 t, 引入记号

$$x_1 = t, \qquad x_{s+1} = q_s \qquad (s = 1, \cdots, n)• \tag{5}$$

所有变量 $x_\alpha(\alpha = 1, \cdots, n+1)$ 可作为某参数 τ 的已知函数, 令

$$x_\alpha = x_\alpha(\tau), \tag{6}$$

使得

$$\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = x'_\alpha \tag{7}$$

不同时为零, 有

$$\dot{x}_\alpha = \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{x'_\alpha}{x'_1}• \tag{8}$$

在事件空间中, 约束方程(1)和(2)可表为

$$\Phi_\gamma(x_\alpha) \geqslant 0 \qquad (\gamma = 1, \cdots, a), \tag{9}$$

$$\Psi_\beta(x_\alpha, x'_\alpha) \geqslant 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g)• \tag{10}$$

约束(10)加在虚位移上的条件为

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} h_{\beta\alpha}(x_\alpha, x'_\alpha)\delta x_\alpha = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g), \tag{11}$$

则原理(4)可表示为事件空间中的 Euler_Lagrange 形式

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha} + \frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha} + P_\alpha + \sum_{\gamma=1}^{a}\lambda_\gamma\frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial x_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta h_{\beta\alpha}\right]\delta x_\alpha = 0,\\
&\lambda_\gamma \geqslant 0,\quad \Phi_\gamma \geqslant 0,\quad \lambda_\gamma\Phi_\gamma = 0, \qquad (\gamma = 1, \cdots, a),\\
&\mu_\beta \geqslant 0,\quad \Psi_\beta \geqslant 0,\quad \mu_\beta\Psi_\beta = 0, \ (\beta = 1, \cdots, g),
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

其中

$$\Lambda = x'_1 L\left(x_\alpha, \frac{x'_2}{x'_1}, \cdots, \frac{x'_{n+1}}{x'_1}\right)$$

为事件空间中系统的 Lagrange 函数; 而

$$P_1 = -\sum_{s=1}^{n} Q_s x'_{s+1}, \qquad P_{s+1} = x'_1 Q_s\left(x_\alpha, \frac{x'_2}{x'_1}, \cdots, \frac{x'_{n+1}}{x'_1}\right)$$

为事件空间中非势广义力•

2 等参数变分和非等参数变分

定义事件空间中坐标 x_α 的等参数变分 δx_α 为在保持参数不变的情况下的无限小增量

$$x_\alpha^*(\tau)=x_\alpha(\tau)+\delta x_\alpha,\quad \tau^*=\tau. \tag{13}$$

并定义事件空间中广义变分即非等参数变分 Δx_α 是参数函数 $\Delta\tau$ 产生的事件空间中变轨和正轨之间的无限小增量

$$x_\alpha^*(\tau^*)=x_\alpha(\tau)+\Delta x_\alpha,\quad \tau^*=\tau+\Delta\tau. \tag{14}$$

因为 $\Delta\tau$ 取得足够小, 展开式(14) 且保留一次项, 得

$$x_\alpha^*(\tau+\Delta\tau)=x_\alpha^*(\tau)+x_\alpha'\Delta\tau. \tag{15}$$

比较式(13) 和(15), 并考虑式(14), 得

$$\delta x_\alpha=\Delta x_\alpha-x_\alpha'\Delta\tau. \tag{16}$$

引进 F_α 和 f 作为无限小变换的生成元, 令

$$\Delta x_\alpha=\varepsilon F_\alpha(x_\alpha,x_\alpha'),\quad \Delta\tau=\varepsilon f(x_\alpha,x_\alpha'). \tag{17}$$

可用上述生成元将等参数变分表示为

$$\delta x_\alpha=\varepsilon[F_\alpha(x_\alpha,x_\alpha')-x_\alpha' f(x_\alpha,x_\alpha')]. \tag{18}$$

3 系统的 Noether 定理

下面从原理(12) 出发研究系统存在的守恒律. 将式(18) 代入式(12), 有

$$\begin{aligned}\varepsilon\Bigg\{&\sum_{\alpha=1}^{n+1}P_\alpha(F_\alpha-x_\alpha' f)+\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}F_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}F_\alpha'-\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}x_\alpha' f'-\\&\left(\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}x_\alpha'+\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}x_\alpha''\right)f+\sum_{\gamma=1}^{a}\lambda_\gamma\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial x_\alpha}(F_\alpha-x_\alpha' f)+\\&\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{\alpha=1}^{n+1}h_{\beta\alpha}(F_\alpha-x_\alpha' f)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}(F_\alpha-x_\alpha' f)\right]\Bigg\}=0.\end{aligned} \tag{19}$$

注意到

$$\Lambda'=\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}x_\alpha'+\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}x_\alpha'', \tag{20}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}x_\alpha'=\Lambda, \tag{21}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}P_\alpha x_\alpha'=0. \tag{22}$$

在式(17) 中加上并减去一个函数 $\varepsilon G'(x_\alpha,x_\alpha')$, 得

$$\begin{aligned}\varepsilon\Bigg\{&\sum_{\alpha=1}^{n+1}P_\alpha F_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}F_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}F_\alpha'+\sum_{\gamma=1}^{a}\lambda_\gamma\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial x_\alpha}(F_\alpha-x_\alpha' f)+\\&\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{\alpha=1}^{n+1}h_{\beta\alpha}(F_\alpha-x_\alpha' f)+G'(x_\alpha,x_\alpha')-\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}F_\alpha+G(x_\alpha,x_\alpha')\right]\Bigg\}=0,\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $G(x_\alpha,x_\alpha')$ 为事件空间中的规范函数. 式(23) 为事件空间中单面非 Chetaev 型非完整系统的 D'Alembert_Lagrange 原理在无限小变换下的变形. 于是有

定理 1　对于事件空间中非 Chetaev 型非完整系统(9),(10),(12),如果由式(16),(17)确定的无限小变换生成元 F_α, f 和规范函数 G 满足条件

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial x_\alpha}(F_\alpha - x'_\alpha f) = 0, \tag{24}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}h_{\beta\alpha}(F_\alpha - x'_\alpha f) = 0, \tag{25}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}F_\alpha + \frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}F'_\alpha + P_\alpha F_\alpha\right) + G'(x_\alpha, x'_\alpha) = 0. \tag{26}$$

则系统存在如下的守恒量

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}F_\alpha + G(x_\alpha, x'_\alpha) = \mathrm{const}. \tag{27}$$

定理 1 是事件空间中单面非 Chataev 型非完整系统的广义 Noether 定理. 式(24),(25),(26)是事件空间中非 Chetaev 型非完整系统的广义 Noether 等式. 上述定理给出了事件空间中单面非 Chetaev 型非完整系统存在守恒律的条件和形式.

4　系统的 Noether 逆定理

假设事件空间中单面非 Chetaev 型非完整系统(9)、(10)、(12)有第一积分

$$I = I(\tau, x_\alpha, x'_\alpha) = C, \tag{28}$$

需要求出相应的 Noether 对称性. 由式(28)得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial I}{\partial\tau} + \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial I}{\partial x_\alpha}x'_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial I}{\partial x'_\alpha}x''_\alpha. \tag{29}$$

由式(12)可得系统的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha} = P_\alpha + \sum_{\gamma=1}^{a}\lambda_\gamma\frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial x_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta h_{\beta\alpha}\qquad(\alpha = 1, \cdots, n+1). \tag{30}$$

给式(30)两端同乘以 $(F_\alpha - x'_\alpha f)$ 并对 α 求和, 且注意到

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}\right)x'_\alpha = 0, \tag{31}$$

再将结果与式(29)相加, 分出含 x''_ρ 的项, 令其系数为零, 得到

$$\frac{\partial I}{\partial x'_\rho} - \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x'_\alpha\partial x'_\rho}F_\alpha = 0\qquad(\rho = 1, \cdots, n+1). \tag{32}$$

注意到, 式(32)中的 $(n+1)$ 个方程不是彼此独立的, 不能由此求出所有 F_α. 令积分(28)等于守恒量(27), 即

$$I = \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}F_\alpha + G. \tag{33}$$

这样, 由方程(32)、(33)在已知规范函数 G 的情况下可以求得无限小变换的生成元 F_α, f, 如果它们还满足条件(24)、(25), 则必为事件空间中非 Chetaev 型非完整系统的无限小变换. 于是有

定理 2 如果已知事件空间中单面非 Chetaev 型非完整系统(9)、(10)、(12)的第一积分(28)，那么由式(12)、(32)、(33)确定的无限小变换，只要满足条件(24)、(25)，必是事件空间中单面非 Chetaev 型非完整系统的无限小变换•

定理 2 为事件空间中单面非 Chetaev 型非完整系统的广义 Noether 逆定理•

5 算 例

在位形空间中系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3 \tag{34}$$

单面约束为

$$\varphi = q_1 \geqslant 0, \tag{35}$$

$$\phi = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 - t\dot{q}_3 \geqslant 0 \tag{36}$$

约束(36)的虚位移条件为

$$\delta q_1 + \delta q_2 - \delta q_3 = 0 \tag{37}$$

求事件空间中系统的 Noether 对称性和守恒量•

在事件空间中系统的 Lagrange 函数为

$$\Lambda = \frac{m}{2x'_1}[(x'_2)^2 + (x'_3)^2 + (x'_4)^2] - mgx'_1x_4 \tag{38}$$

单面约束为

$$\Phi = x_2 \geqslant 0, \tag{39}$$

$$\Psi = \frac{1}{x'_1}[x'_2 + x'_3 - x_1x'_4] \geqslant 0 \tag{40}$$

虚位移条件为

$$\delta x_2 + \delta x_3 - \delta x_4 = 0 \tag{41}$$

首先应用定理 1 由已知的对称性求守恒量• 由式(24)，(25)，(26)知，无限小变换生成元 F_α, f 满足

$$F_2 - x'_2 f = 0, \tag{42}$$

$$(F_2 - x'_2 f) + (F_3 - x'_3 f) - (F_4 - x'_4 f) = 0, \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &- mgx'_1F_4 + \left\{- \frac{1}{2}m\frac{1}{(x'_1)^2}[(x'_2)^2 + (x'_3)^2 + (x'_4)^2] - mgx_4\right\}F'_1 + \\ &\quad m\frac{x'_2}{x'_1}F'_2 + m\frac{x'_3}{x'_1}F'_3 + m\frac{x'_4}{x'_1}F'_4 + G' = 0 \end{aligned} \tag{44}$$

从(42)～(44)可得

$$F_1 = 0,\quad F_2 = 0,\quad F_3 = 1,\quad F_4 = 1,\quad f = 0,\quad G = mgx_1 \tag{45}$$

将式(45)代入式(27)得该系统的守恒量为

$$I = m\frac{x'_3}{x'_1} + m\frac{x'_4}{x'_1} + mgx_1 = \text{const} \tag{46}$$

其次，应用定理 2 由已知积分求相应的广义准对称变换• 假设系统有积分(46)，此时式(32)、(33)给出

$$
\begin{aligned}
&m\frac{1}{(x_1')^3}\left[(x_2')^2+(x_3')^2+(x_4')^2\right]F_1-m\frac{x_2'}{(x_1')^2}F_2-m\frac{x_3'}{(x_1')^2}F_3-\\
&\qquad m\frac{x_4'}{(x_1')^2}F_4=-m\frac{1}{(x_1')^2}(x_3'+x_4'),
\end{aligned}
\tag{47}
$$

$$
-m\frac{x_2'}{(x_1')^2}F_1+m\frac{1}{x_1'}F_2=0,
\tag{48}
$$

$$
-m\frac{x_3'}{(x_1')^2}F_1+m\frac{1}{x_1'}F_3=m\frac{1}{x_1'},
\tag{49}
$$

$$
-m\frac{x_4'}{(x_1')^2}F_1+m\frac{1}{x_1'}F_4=m\frac{1}{x_1'},
\tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{-m\frac{1}{2(x_1')^2}\left[(x_2')^2+(x_3')^2+(x_4')^2\right]-mgx_4\right\}F_1+m\frac{x_2'}{x_1'}F_2+\\
&\qquad m\frac{x_3'}{x_1'}F_3+m\frac{x_4'}{x_1'}F_4+G=m\frac{x_3'}{x_1'}+m\frac{x_4'}{x_1'}+mgx_1\cdot
\end{aligned}
\tag{51}
$$

可见式(47)~(50)中四个方程并不彼此独立,若令 $G=mgx_1$,则由方程(47)~(51)可求得

$$
F_1=0,\quad F_2=0,\quad F_3=1,\quad F_4=1,\quad f=0\cdot
\tag{52}
$$

式(52)满足式(42),(43),故是系统的广义准对称变换•

[参 考 文 献]

[1] Noether A E. Invariante variationsprobleme[A]. In: Nachr Akad Wiss Göttingen Math_Phys K Ⅰ, Ⅱ [C]. 1918, 235~257.

[2] Vujanovic B. Conservation laws of dynamical systems via D' Alembert' s principle[J]. Int J Non_Linear Mech, 1978, **13**: 185~197.

[3] Vujanovic B. A study of conservation laws of dynamical systems by means of the differential principle of Jourdain and Gauss[J]. Acta Mechanica, 1986, **65**: 63~80.

[4] 刘端. 非完整非保守动力学系统的守恒律[J]. 力学学报, 1989, **21**(1): 75~83.

[5] 刘端. 非完整非保守动力学系统的Noether定理及其逆定理[J]. 中国科学, A辑, 1990, **20**(11): 1189~1197.

[6] 张解放. 高阶非完整非保守系统的广义Noether定理[J]. 科学通报, 1989, **34**(22): 1756~1757.

[7] 梅凤翔. 利用Jourdain原理研究二阶非完整系统的守恒律[J]. 北京理工大学学报, 1998, **18**(1): 17~21.

[8] 张毅. 单面约束力学系统的基本理论研究[D]. 博士学位论文. 北京: 北京理工大学, 1998.

[9] 李子平. 经典和量子力学约束系统及其对称性质[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1993.

Noether's Theorem for Nonholonomic Systems of Non_Chetaev's Type With Unilateral Constraints in Event Space

Li Yuancheng[1], Zhang Yi[2], Liang Jinghui[3]

(1. Department of Applied Physics, University of Petroleum, Dongying, Shandong 257062, P R China;
2. Suzhou Institute of Urban Construction and Environmental Protection, Suzhou 215011, P R China;
3. Department of Physics, Shanxi Normal University, Linfen, Shanxi 041004, P R China)

Abstract: To study the Noether's theorem of nonholonomic systems of non_Chetaev's type with unilateral constraints in event space, firstly, the principle of D'Alembert_Lagrange for the systems with unilateral constraints in event space is presented, secondly, the Noether's theorem and the Noether's inverse theorem for the nonholonomic systems of non_Chetaev's type with unilateral constraints in event space are studied and obtained, which is based upon the invariance of the differential variational principle under the infinitesimal transformations of group, finally, an example is given to illustrate the application of the result.

Key words: analytical mechanics; event space; unilateral constraint; nonholonomic system; Noether's theorem; Noeter's inverse theorem