应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 05_0501_10

一类 Stokes 方程的最小二乘混合元方法*

顾海明[1], 羊丹平[2], 隋树林[1], 刘新民[1]

(1. 青岛化工学院 计算机系, 青岛 266042; 2. 山东大学 数学院, 济南 250100)

(苏煜城推荐)

摘要: 对定常和非定常两种类型的 Stokes 方程建立了一类新的最小二乘混合元方法, 并进行了分析, 对定常的方程, 采用了对 u 和 σ 的不同指标的有限元空间进行计算(LBB 条件不需要), 得到了最优的 H^1 和 L^2 模估计• 对非定常的方程, 采用了传统的 Raviart_Thomas 混合元空间, 得到了最优的 L^2 模估计•

关 键 词: 最小二乘; 混合元; 误差估计
中图分类号: O241.82 文献标识码: A

引 言

解椭圆型方程的最小二乘方法的一般理论是由 Aziz, Kellogg 和 Stephens[1] 研究发展起来的, 该方法的一个重要的优点是能够将一个非自共轭的问题转化成一个对称正定问题 Bramble 和 Nitshe 在文献[2] 中研究了 Dirichlet 问题, 该方法需要解一个条件数为 $O(H^{-2})$ 的对称正定的线性方程组, 因此可以采用各种快速有效的解法求数值解, 但是需要具有 C^1 光滑性的有限元空间• 而混合元方法因能直接求出流函数和压力而受到越来越多的关注, Raviart 和 Thomas[3], Brezzi[4], Carey 和 Oden[5] 发展了这一方法• 但该方法需要有限元空间满足 LBB[4] 条件, 从而限制了有限元空间的选取• 最小二乘混合元方法(LSM) 是由关于流和压力的最小残量引进的, 该方法具有以下优点: 首先, LSM 方法不需要有限元空间满足 LBB 条件, 文献[6] 证明了这一点• 第二, 即使采用原来的有限元空间, 不必需和 Raviart Thomas 空间完全相同(LBB 条件不必需), 也能得最优的误差估计• 第三, 由于离散问题是对称正定的, 使得我们可以用一些快速方法求解• 近年来, 一些与本课题相关的研究如下: A. I. Pehlivanov 和 G. F. Carey[7], Z. Cai 等[8] 研究了对 σ_h 和 u_h 的有限元空间取不同次数的多项式的情况• 本文提出了一个新的具有对称正定性的混合元方法, 这类方法对于解决发展方程有重要的意义• 本文的提纲如下: 在第 1 节中, 给出了定常的 Stokes 方程的数学模型和 LSM 方法, 及一些准备工作• 并给出了最优的 H^1 和 L^2 估计• 在第 2 节中, 我们将 LSM 方法推广到非定常的情形, 给出了非定常的 Stokes 方程的全离散最小二乘混合元逼近格式• 在第 3 节中, 得到了全离散格式的最优 L^2 估计• 文中 C 为一般常数, ε 为任意小正数•

* 收稿日期: 1998_09_01; 修订日期: 2000_01_16
基金项目: 国家教委博士点基金资助项目
作者简介: 顾海明(1967~) , 男, 博士, 副教授.

1 定常 Stokes 方程的最小二乘混合元方法及误差分析

考虑下列 Stokes 方程:

$$\left.\begin{array}{l} -\nu\Delta \boldsymbol{u}+\therefore p=f \qquad (x\in\Omega\subset\mathbf{R}^2), \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}=\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}=0 \qquad (x\in\Omega), \\ \boldsymbol{u}=\mathbf{0} \qquad (x\in\Gamma), \end{array}\right\} \tag{1}$$

此处, Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中平面中有界区域, $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 是流体的流速, $\boldsymbol{p}$ 是压力, 设 ν 为粘性系数, $f=(f_1,f_2)$ 为体积• 为了给出计算方法, 我们先作一些注记• 设 $\omega=2\nu u$, 不妨仍记为 u• 则有

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2}\Delta \boldsymbol{u}+\therefore \boldsymbol{p}=f, \qquad (x\in\Omega\subset\mathbf{R}^2), \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}=\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}=0, \qquad (x\in\Omega), \\ \boldsymbol{u}=0 \qquad (x\in\Gamma)\bullet \end{array}\right\} \tag{1$'$}$$

设给定一个二阶对称矩阵 $\sigma=(\sigma_{ij})$, 并记 $\mathrm{tr}\,\sigma=\sigma_{11}+\sigma_{22}$, δ 是二阶单位矩阵, 令 $\sigma=\sigma-\dfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\sigma\bullet\delta$, 我们总有如下唯一的分解[9]:

$$\sigma=\sigma+\boldsymbol{q}\bullet\delta, \text{其中}, \mathrm{tr}\,\sigma=\mathbf{0},\ \boldsymbol{q}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\sigma\bullet$$

再令

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (i,j=1,2),$$

注意到 $\mathrm{tr}\,\varepsilon(\boldsymbol{u})=\operatorname{div}\boldsymbol{u}$, 因此, 若 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})$ 是(1)的解, 则 $\mathrm{tr}\,\varepsilon(\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$ 或 $\varepsilon(\boldsymbol{u})=\overline{\varepsilon(\boldsymbol{u})}$• 引入新变量 $\sigma=\varepsilon(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{p}\bullet\delta$ 由于

$$\operatorname{div}\sigma=((\operatorname{div}\sigma)_i)=\left(\frac{\partial\sigma_{i1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{i2}}{\partial x_2}\right),$$

则有

$$\operatorname{div}\sigma=\operatorname{div}\varepsilon(\boldsymbol{u})-\operatorname{div}(\boldsymbol{p}\bullet\delta)=\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{u}-\therefore\boldsymbol{p}\bullet$$

从而求(1)的解 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})$ 转化为对下列一阶方程组: 即求 $(\boldsymbol{u},\sigma)$, 满足:

$$\left.\begin{array}{l} -\operatorname{div}\sigma=f \qquad (x\in\Omega), \\ \sigma=\varepsilon(\boldsymbol{u}) \qquad (x\in\Omega), \\ \boldsymbol{u}=\mathbf{0} \qquad (\boldsymbol{x}\in\Gamma)\bullet \end{array}\right\} \tag{2}$$

(2)中蕴含了不可压缩条件 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\mathrm{tr}\,\varepsilon(\boldsymbol{u})=0$• 在一些力学问题中, σ 和 $\varepsilon(\boldsymbol{u})$ 的物理意义分别代表应力和形变速率张量, 下列 Green 公式成立:

$$(\varepsilon(\boldsymbol{u}),\chi)=\int_\Gamma(\chi,\boldsymbol{n})\bullet\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}s-(\boldsymbol{u},\operatorname{div}\chi), \tag{3}$$

此处, $\chi,\boldsymbol{n}=(\chi_{i1}n_1+\chi_{i2}n_2)$ 是 $\chi=(\chi_{ij})$ 在 Γ 的外法单位向量 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2)$ 的分量, $(\bullet,\bullet)$ 表 $L^2(\Omega)^m(m=2,4)$ 的内积• 引入空间

$$V=\left\{\boldsymbol{v}\in(H^1(\Omega))^2;\boldsymbol{v}\mid_\Gamma=\mathbf{0}\right\},$$
$$H=\left\{\chi=(\chi_{ij});\chi_{ij}=\chi_{ji}\in L^2(\Omega),\ i,j=1,2,\ \operatorname{div}\chi\in(L^2(\Omega))^2\right\}\bullet$$

问题(1)有如下的正则性:

定理 1.1[10] 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界连通区域, 边界 Γ Lipschitz 连续, $\boldsymbol{f}\in(H^{-1}(\Omega))^n$, 则(1)存在唯一解 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})\in(H^1(\Omega))^n\times L_0^2(\Omega)$, 使得

$$\|u\|_{1,\Omega}^2+\|p\|_{0,\Omega}^2\leqslant\|f\|_{-1,\Omega}^2. \tag{4}$$

现在, 定义最小二乘问题: 求 $(\boldsymbol{u},\sigma)\in V\times H$ 使得

$$J(\boldsymbol{u},\sigma)=\inf_{v\in V,q\in H}J(v,q),$$

此处,

$$J(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})=(\mathrm{div}\boldsymbol{q}+\boldsymbol{f},\mathrm{div}q+f)+(q-\varepsilon(v),q-\varepsilon(v)). \tag{5}$$

则相应于鞍点问题的变分问题: 求 $(\boldsymbol{u},\sigma)\in V\times H$ 使得

$$a(\boldsymbol{u},\sigma;\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})=-(\boldsymbol{f},\mathrm{div}\boldsymbol{q})(\forall v\in V;q\in H), \tag{6}$$

此处

$$a(\boldsymbol{u},\sigma;\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})=(\mathrm{div}\sigma,\mathrm{div}\boldsymbol{q})+(\sigma-\varepsilon(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{q}-\varepsilon(\boldsymbol{v})). \tag{7}$$

为了证明(6)的解的存在唯一性, 下面研究双线性形式 $a(\cdot;\cdot)$ 的强制性.

定理 1.2 存在常数 $\alpha>0$ 使得

$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q};\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\geqslant\alpha(\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}^2+\|\boldsymbol{q}\|_{0,\Omega}^2+\|\mathrm{div}\boldsymbol{q}\|_{0,\Omega}^2+\|\mathrm{tr}\boldsymbol{q}\|_{0,\Omega}^2). \tag{8}$$

为方便起见, $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ 中的 Ω 忽略.

证明:

由(7), 记

$$\mathrm{div}\boldsymbol{q}=g_1,\quad\boldsymbol{q}-\varepsilon(\boldsymbol{v})=g_2. \tag{9}$$

因为 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{q}\cdot\delta$ 则由(9)得

$$\mathrm{div}\left(\boldsymbol{q}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{q}\cdot\delta\right)=\mathrm{div}\left(g_2+\varepsilon(\boldsymbol{v})+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{q}\cdot\delta\right)=g_1.$$

从而

$$\mathrm{div}\left(\varepsilon(\boldsymbol{v})+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{q}\cdot\delta\right)=g_1-\mathrm{div}g_2$$

令 $\boldsymbol{p}=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{q}$, 则有 $\mathrm{div}\,\varepsilon(\boldsymbol{v})-\mathrm{div}(\boldsymbol{p}\cdot\delta)=g_1-\mathrm{div}g_2$ 即 $\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{v}-\nabla\boldsymbol{p}=g_1-\mathrm{div}g_2$ 由定理 1.1, 有

$$\|\boldsymbol{v}\|_1^2+\|\boldsymbol{p}\|_0^2\leqslant\|g_1-\mathrm{div}g_2\|_{-1}^2\leqslant C(\|g_1\|_0^2+\|g_2\|_0^2), \tag{10}$$

上式右边即为 $a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q};\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})$, 从而, 存在 $\alpha>0(\alpha=1/C)$, 使得

$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q};\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\geqslant\alpha(\|\boldsymbol{v}\|_1^2+\|\mathrm{tr}\boldsymbol{q}\|_0^2) \tag{11}$$

由(8)知,

$$\left.\begin{aligned}a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q};\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})&\geqslant\|\mathrm{div}\boldsymbol{q}\|_0^2,\\a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q};\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})&\geqslant\|\boldsymbol{q}-\varepsilon(\boldsymbol{v})\|_0^2,\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

而

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{q}\|_0^2&\leqslant2(\|\boldsymbol{q}-\varepsilon(\boldsymbol{v})\|_0^2+\|\varepsilon(\boldsymbol{v})\|_0^2)\leqslant\\&C(\|\boldsymbol{q}-\varepsilon(\boldsymbol{v})\|_0^2+\|\boldsymbol{v}\|_1^2)\leqslant Ca(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q};,\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}).\end{aligned} \tag{13}$$

综合(10),(11),(12),(13)得到(8)成立.

定理 1.3 设 $f\in H^{-1}(\Omega)$. 则(6)有唯一解 $(\boldsymbol{u},\sigma)\in V\times H$.

证明 定义范数:

$$\| q \|_H^2 = \| q \|_0^2 + \| \mathrm{tr} q \|_0^2 + \| \mathrm{div} q \|_0^2 .$$

由定理 1.1, 知双线性形式在 (V, H) 上是强制的, 有界的, 从而由 Lax_Milgram 定理易知结论成立.

下面给出有限元格式. 设 $\mathscr{T}_{h_u}$, $\mathscr{T}_{h_\sigma}$ 是 Ω 的两簇有限元拟一致正则划分, 剖分半径可取不同, 设为 h_u, h_σ, 但为分析方便起见, 不妨设 $h_u = h_\sigma = h$. 设 $r \geqslant 0$, $k \geqslant 1$ 有限元空间 $V_h \times H_h$ 分别取指标为 k, r 的分片多项式空间. 空间的逼近性质:

$$\inf_{v_I \in V_h} \left\{ \| v - v_I \|_0 + h \| \nabla (v - v_I) \|_0 \right\} \leqslant C h^{k+1} \| v \|_{k+1}, \tag{14}$$

$$\inf_{\sigma_I \in H_h} \left\{ \| \sigma - \sigma_I \|_0 + h \| \mathrm{div}(\sigma - \sigma_I) \|_0 \right\} \leqslant C h^{r+1} \| \sigma \|_{r+1} . \tag{15}$$

从而, 我们可写出最小二乘有限元格式如下: 求 $u_h \in V_h$, $\sigma_h \in H_h$ 使得

$$a(u_h, \sigma_h; v_h, q_h) = -(f, \mathrm{div}\, q_h) \tag{16}$$

下面进行误差分析. 由(6), (16) 得:

$$a(u - u_h, \sigma - \sigma_h; v_h, q_h) = 0 \quad (\forall v_h, q_h \in V_h \times H_h). \tag{17}$$

于是, 有

$$\begin{aligned}
&\alpha(\| u_h - u_I \|_1^2 + \| \sigma_h - \sigma_I \|_H^2) \leqslant a(u_h - u_I, \sigma_h - \sigma_I; u_h - u_I, \sigma_h - \sigma_I) = \\
&\quad a(u - u_I, \sigma - \sigma_I; u_h - u_I, \sigma_h - \sigma_I) - a(u - u_h, \sigma - \sigma_h; u_h - u_I, \sigma_h - \sigma_I) = \\
&\quad a(u - u_I, \sigma - \sigma_I; u_h - u_I, \sigma_h - \sigma_I) = \\
&\quad (\mathrm{div}(\sigma - \sigma_I), \mathrm{div}(\sigma_h - \sigma_I)) + (\overline{\sigma - \sigma_I} - \varepsilon(u - u_I), \overline{\sigma_h - \sigma_I} - \varepsilon(u_h - u_I)) \leqslant \\
&\quad C(\| \mathrm{div}(\sigma - \sigma_I) \|_0^2 + \| \overline{\sigma - \sigma_I} - \varepsilon(u - u_I) \|_0^2)^{1/2} . \\
&(\| \mathrm{div}(\sigma_h - \sigma_I) \|_0^2 + \| \overline{\sigma_h - \sigma_I} - \varepsilon(u_h - u_I) \|_0^2)^{1/2} \leqslant \\
&\quad C(\| u - u_I \|_1^2 + \| \sigma - \sigma_I \|_H^2)^{1/2} \cdot (\| u_h - u_I \|_1^2 + \| \sigma_h - \sigma_I \|_H^2)^{1/2} .
\end{aligned}$$

因而, 有

$$\| u_h - u_I \|_1 + \| \sigma_h - \sigma_I \|_H \leqslant \| u - u_I \|_1 + \| \sigma - \sigma_I \|_H . \tag{18}$$

由(18), 设 $k = r$, 得到

$$\| u_k - u_I \|_1 + \| \sigma_h - \sigma_I \|_H \leqslant C h^k \left\{ \| v \|_{k+1} + \| \sigma \|_{k+1} \right\}, \tag{19}$$

$$\| u - u_h \|_1 + \| \sigma - \sigma_h \|_H \leqslant C h^k \left\{ \| v \|_{k+1} + \| \sigma \|_{k+1} \right\} . \tag{20}$$

于是, 得到下列结论:

定理 1.4　设 $k = r$, 则(6) 的解和(16) 的有限元解有下列估计:

$$\| u - u_h \|_1 + \| \sigma - \sigma_h \|_H \leqslant C h^k \left\{ \| u \|_{k+1} + \| \sigma \|_{k+1} \right\} . \tag{21}$$

进一步, 还有下列误差估计.

定理 1.5　设 $k + 1 = r$, 则(6) 的解和(16) 的有限元解有下列估计:

$$\| u - u_h \|_0 + \| \sigma - \sigma_h \|_0 + \| \mathrm{div}(\sigma - \sigma_h) \|_0 \leqslant C h^k \left\{ \| u \|_r + \| \sigma \|_{r+1} \right\}, \tag{22a}$$

$$\| \mathrm{tr}(\sigma - \sigma_h) \|_0 \leqslant C h^r \left\{ \| u \|_r + \| \sigma \|_{r+1} \right\} . \tag{22b}$$

证明:

定义下列投影, $S_h: V \to V_h$ 使得

$$(S_h v - v, \mathrm{div}\, \chi_h) = 0 \qquad (\forall \chi \in H_h). \tag{23}$$

由[9], 有下述先验估计:

若 $v|_\Gamma = 0$ 则

$$\| \boldsymbol{v} - S_h \boldsymbol{v} \|_0 \leqslant Ch^{k+1} \| \varepsilon(\boldsymbol{v}) \|_k \leqslant Ch^r \| \boldsymbol{v} \|_r, \tag{24}$$

则

$$\begin{aligned} \alpha(\| \boldsymbol{u}_h - S_h \boldsymbol{u} \|_1^2 + \| \sigma_h - \sigma_I \|_H^2) \leqslant \\ a(\boldsymbol{u}_h - S_h \boldsymbol{u}, \sigma_h - \sigma_I; \boldsymbol{u}_h - S_h \boldsymbol{u}, \sigma_h - \sigma_I) = \\ a(\boldsymbol{u} - S_h \boldsymbol{u}, \sigma - \sigma_I; \boldsymbol{u}_h - S_h \boldsymbol{u}, \sigma_h - \sigma_I) = \\ (\mathrm{div}(\sigma - \sigma_I), \mathrm{div}(\sigma_h - \sigma_I)) + \\ (\sigma - \sigma_I - \varepsilon(\boldsymbol{u} - S_h \boldsymbol{u}), \sigma_h - \sigma_I - \varepsilon(\boldsymbol{u}_h - S_h \boldsymbol{u}))\cdot \end{aligned} \tag{25}$$

由(23), 并利用 Green 公式(3), 得

$$\begin{aligned} (\| \boldsymbol{u}_h - S_h \boldsymbol{u} \|_1^2 + \| \sigma_h - \sigma_I \|_H^2)^{1/2} \leqslant Ch^r (\| \sigma \|_{r+1} + \| \boldsymbol{u} \|_r) (\| \overline{\sigma_h - \sigma_I} \|_0^2 + \\ \| \mathrm{div}(\sigma_h - \sigma_I) \|_0^2 + \| \boldsymbol{u}_h - S_h \boldsymbol{u} \|_1^2)^{1/2})\cdot \end{aligned} \tag{26}$$

因为

$$\| \overline{\sigma_h - \sigma_I} \|_0 + \| \mathrm{div}(\sigma_h - \sigma_I) \|_0 \leqslant \| \sigma_h - \sigma_I \|_H,$$

从而, 有

$$\| \boldsymbol{u}_h - S_h \boldsymbol{u} \|_1 + \| \overline{\sigma_h - \sigma_I} \|_0 + \| \mathrm{div}(\sigma_h - \sigma_I) \|_0 \leqslant Ch^r (\| \boldsymbol{u} \|_r + \| \sigma \|_{r+1})\cdot \tag{27}$$

再由三角不等式, 得

$$\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h \|_0 + \| \overline{\sigma - \sigma_h} \|_0 + \| \mathrm{div}(\sigma - \sigma_h) \|_0 \leqslant Ch^r (\| \boldsymbol{u} \|_r + \| \sigma \|_{r+1})\cdot \tag{28}$$

即得到结论(22a), 再证(22b), 令 $\mathrm{div}\boldsymbol{q} = l_1$, $\boldsymbol{q} = l_2$ 由 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{q}\cdot\delta$ 得

$$\mathrm{div}\left(\boldsymbol{q} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{q}\cdot\delta \right) = \mathrm{div}\left(l_2 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{q}\cdot\delta \right) = l_1,$$

从而, 有

$$\mathrm{div}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{q}\cdot\delta \right) = \therefore\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{q} \right) = \boldsymbol{l}_1 - \mathrm{div}\boldsymbol{l}_2 \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \| \mathrm{tr}\boldsymbol{q} \|_0^2 \leqslant \| \boldsymbol{l}_1 - \mathrm{div} l_2 \|_{-1}^2 \leqslant C(\| \boldsymbol{l}_1 \|_0^2 + \| \boldsymbol{l}_2 \|_0^2) \leqslant \\ C(\| \mathrm{div}\boldsymbol{q} \|_0^2 + \| \boldsymbol{q} \|_0^2) \quad (\forall \boldsymbol{q} \in H), \end{aligned} \tag{30}$$

从而

$$\| \mathrm{tr}(\sigma - \sigma_h) \|_0^2 \leqslant C(\| \mathrm{div}(\sigma - \sigma_h) \|_0^2 + \| \sigma - \sigma_h \|_0^2), \tag{31}$$

即(22b) 成立, 定理(5) 证毕•

下面我们证明, 有限元空间若取 Raviart_Thomas[3] 空间, 指标为 r, 则 L^2 估计的阶可达到 $r + 1$•

定理 1.6 若 RT 空间的指标为 r, 则(6) 的解和(16) 的有限元解有下列结论:

$$\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h \|_0 + \| \sigma - \sigma_h \|_0 \leqslant Ch^{r+1} \left\{ \| \boldsymbol{u} \|_{r+1} + \| \sigma \|_{r+1} \right\}, \tag{32a}$$

$$\| \mathrm{tr}(\sigma - \sigma_h) \|_0 \leqslant Ch^{r+1} \left\{ \| \boldsymbol{u} \|_{r+1} + \| \sigma \|_{r+1} \right\}\cdot \tag{32b}$$

证明:

由于指标为 r, (24) 成为

$$\| \boldsymbol{v} - S_h \boldsymbol{v} \|_0 \leqslant Ch^{r+1} \| \boldsymbol{v} \|_{r+1}\cdot$$

再定义 Raviart-Thomas 投影, $Q_h : H \rightarrow H_h$ 使得

$$(\mathrm{div}\, Q_h \chi, \boldsymbol{v}_h) = (\mathrm{div}\, \chi, \boldsymbol{v}_h) \qquad (\forall \boldsymbol{v}_h \in V_h, \chi \in H)\cdot \tag{33}$$

由[9], 有下列结论:

$$\left.\begin{aligned}&\|Q_h\chi-\chi\|_0\leqslant Ch^{r+1}\|\chi\|_{r+1},\\&\left\|\frac{\partial(Q_h\chi-\chi)}{\partial t}\right\|_0\leqslant Ch^{r+1}\left\|\frac{\partial\chi}{\partial t}\right\|_{r+1},\\&\|\overline{Q_h\chi}\|_0\leqslant C\|\chi\|_{1,1}.\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

从而, 在(25)中用 $Q_h\sigma$ 代替 σ_I, 由于

$$(\operatorname{div}(\sigma-Q_h\sigma),\operatorname{div}(\sigma_h-Q_h\sigma))=0,$$

因此

$$(\|\boldsymbol{u}_h-S_h\boldsymbol{u}\|_1+(\|\sigma_h-\overline{Q_h\sigma}\|_0\leqslant Ch^{r+1}(\|\boldsymbol{u}\|_{r+1}+\|\sigma\|_{r+1}).\tag{35}$$

再由三角不等式, 得

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_0+\|\sigma-\sigma_h\|_0\leqslant Ch^{r+1}(\|\boldsymbol{u}\|_{r+1}+\|\sigma\|_{r+1}).\tag{36}$$

即得到(32a), 同定理1.5的证明, 可得(32b), 定理1.6证完.

2　非定常Stokes方程的最小二乘混合元方法

考虑下列非定常Stokes方程:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{u}_t-\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{p}=f\qquad(x\in\Omega\times J),\\&\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0\quad(x\in\Omega\times J),\\&\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}\quad(x\in\Gamma),\\&\boldsymbol{u}(\cdot,0)=\boldsymbol{u}_0.\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

此处 $J=[0,T]$. 与上一节作同样的变换, 得到:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{u}_t-\operatorname{div}\sigma=f\qquad(x\in\Omega\times J),\\&\sigma=\varepsilon(\boldsymbol{u})\quad(x\in\Omega\times J),\\&\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}\quad(x\in\Gamma),\\&\boldsymbol{u}(\cdot,0)=\boldsymbol{u}_0.\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

同样, $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$ 蕴含在上式中, 由(38)中第二式对 t 求导, 得到

$$\sigma_t=\varepsilon(u_t).\tag{39}$$

令 $w=u_t$, 则(38)的等价形式是:

$$\left.\begin{aligned}&w-\operatorname{div}\sigma=f\qquad(x\in\Omega\times J),\\&\sigma_t=\varepsilon(\boldsymbol{w})\quad(x\in\Omega\times J),\\&w=u_t\quad(x\in\Omega\times J).\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

下面, 对(40)进行离散. 设时间步长为 $\tau>0$, $t^n=n\tau$, $(n=0,1,\cdots,N=T/\tau)$, 并记 $u^n=u(x,t^n)$, 选取初值 $\sigma^0=\varepsilon(u_0)$ 记之为 σ_0, 且 $w^n=\dfrac{u^n-u^{n-1}}{\tau}$, $n\leqslant 1$. 结合(40), 得到相应的对时间的离散形式:

$$\left.\begin{aligned}&w^n-\operatorname{div}\sigma^n=f^n,\\&\frac{\sigma^n-\sigma^{n-1}}{\tau}=\varepsilon(w^n),\\&w^n=\frac{u^n-u^{n-1}}{\tau},\\&\sigma^0=\sigma_0,\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

此处$f^n = f(x, t^n)$． 对(41)的每一层再用最小二乘混合元方法进行计算． 定义下列极小二乘泛函:

$$I(v^n, q^n) = (v^n - \operatorname{div}\boldsymbol{q}^n - f^n, v^n - \operatorname{div}q^n - f^n) + \left(\frac{q^n - q^{n-1}}{\tau} - \varepsilon(v^n), \frac{q^n - q^{n-1}}{\tau} - \varepsilon(v^n)\right).$$

于是, 我们得到鞍点问题: 求$(w^n, \sigma^n) \in V \times H$ 使得

$$I(w^n, \sigma^n) = \inf_{v \in V, q \in H} I(v, q). \tag{42}$$

记$J^n = [t^{n-1}, t^n]$, 则可得相应于问题(42)的变分形式:

求$(w^n, \sigma^n): J^n \to V \times H$ 使得

$$a(w^n, \sigma^n; v, q) = \tau(f^n, v - \operatorname{div}q) \qquad (\forall (v, q) \in V \times H), \tag{43}$$

此处

$$a(w^n, \sigma^n; v, q) = (\sigma^n - \sigma^{n-1} - \tau\varepsilon(w^n), q - \tau\varepsilon(v)) + \tau(w^n - \operatorname{div}\sigma^n, v - \operatorname{div}q).$$

设有限元空间V_h, H_h取成指标为r的 Raviart_Thomas[3] 或 Johnson_Thomee[9] 的混合元空间． 从而, 得到问题(37)的全离散最小二乘混合元格式:

求$(w_h^n, \sigma_h^n): J^n \to V_h \times W_h$, 使得

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma_h^n - \sigma_h^{n-1} - \tau\varepsilon(w_h^n), q_h - \tau\varepsilon(v_h)) + \tau(w_h^n - \operatorname{div}\sigma_h^n, v_h - \operatorname{div}q_h) = \\ &\quad \tau(f^n, v_h - \operatorname{div}q_h) \quad (\forall v_h \in V_h, q_h \in H_h), \\ &\sigma_h^0 = \sigma_{0h},\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

此处, σ_{0h}是σ_0的某个近似． 显然格式的解是存在唯一的．

3 全离散收敛性分析

为了进行误差分析, 先引入两个投影．

求$\tilde{w}: J^n \to V_h$ 由下式决定:

$$(\varepsilon(w - \tilde{w}), \varepsilon(v_h)) = 0 \qquad (\forall v_h \in V_h). \tag{45}$$

记$\eta = w - \tilde{w}$, $\pi = \tilde{w} - w_h$ 由[11], 有下列标准结果:

$$\left.\begin{aligned}&\|\eta\|_0 + h\|\eta\|_1 \leqslant C\|u\|_{r+1}h^{r+1}, \\ &\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_0 + h\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_1 \leqslant C\left(\|u\|_{r+1} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{r+1}\right)h^{r+1}.\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

并记$\rho = \sigma - Q_h\sigma$, $\xi = Q_h\sigma - \sigma_h$． 由(43), (44)得到误差方程:

$$((\sigma^n - \sigma_h^n) - (\sigma^{n-1} - \sigma_h^{n-1}) - \tau\varepsilon(w^n - w_h^n), q_h - \tau\varepsilon(v_h)) + \tau(w^n - w_h^n - \operatorname{div}(\sigma^n - \sigma_h^n), v_h - \operatorname{div}q_h) = 0, \tag{47}$$

经过整理, 得到:

$$((\rho^n + \xi^n) - (\rho^{n-1} + \xi^{n-1}) - \tau\varepsilon(\eta^n + \pi^n), q_h - \tau\varepsilon(v_h)) + \tau(\eta^n + \pi^n - \operatorname{div}(p^n + \xi^n), v_h - \operatorname{div}q_h) = 0, \tag{48}$$

令$q_h = \xi^n$, $v_h = \pi^n$． 得到

$$((\rho^n + \xi^n) - (\rho^{n-1} + \xi^{n-1}) - \tau\varepsilon(\eta^n + \pi^n), \xi^n - \tau\varepsilon(\pi^n)) + \tau(\eta^n + \pi^n - \operatorname{div}(\rho^n + \xi^n), \pi^n - \operatorname{div}\xi^n) = 0. \tag{49}$$

由(49), 进一步整理, 得

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= ((\xi^n - \xi^{n-1}) - \tau\varepsilon(\pi^n), \xi^n - \tau\varepsilon(\pi^n)) + \\
&\quad \tau(\pi^n - \mathrm{div}\,\xi^n, \pi^n - \mathrm{div}\,\xi^n) = I_1 + I_2, \\
\text{右边} &= -((\rho^n - \rho^{n-1}) - \tau\varepsilon(\eta^n), \xi^n - \tau\varepsilon(\pi^n)) - \\
&\quad \tau(\eta^n - \mathrm{div}\,\rho^n, \pi^n - \mathrm{div}\,\xi^n) = I_3,
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= (\xi^n - \tau\varepsilon(\pi^n), \xi^n - \tau\varepsilon(\pi^n)) - (\xi^{n-1}, \xi^n - \tau\varepsilon(\pi^n)) \geqslant \\
&\frac{1}{2}[(\xi^n - \tau\varepsilon(\pi^n), \xi^n - \tau\varepsilon(\pi^n)) - (\xi^{n-1}, \xi^{n-1})] = \\
&\frac{1}{2}\left\{(\xi^n, \xi^n) - (\xi^{n-1}, \xi^{n-1}) - 2\tau(\xi^n, \varepsilon(\pi^n)) + \tau^2(\varepsilon(\pi^n), \varepsilon(\pi^n))\right\}.
\end{aligned}$$

由于 $I_2 \geqslant 0$, 有 $I_2 \geqslant \frac{1}{2}I_2$, 从而

$$\begin{aligned}
\text{左边} \geqslant &\frac{1}{2}\Big\{[(\xi^n, \xi^n) - (\xi^{n-1}, \xi^{n-1})] - 2\tau(\xi^n, \varepsilon(\pi^n)) + \\
&\tau^2(\varepsilon(\pi^n), \varepsilon(\pi^n)) + \tau(\pi^n - \mathrm{div}\,\xi^n, \pi^n - \mathrm{div}\,\xi^n)\Big\} = I_4.
\end{aligned}$$

由 Green 公式 $(\xi^n, \varepsilon(\pi^n)) = -(\pi^n, \mathrm{div}\,\xi^n)$.

$$\begin{aligned}
I_4 = &\frac{1}{2}[(\xi^n, \xi^n) - (\xi^{n-1}, \xi^{n-1})] + \\
&\frac{1}{2}\left\{\tau(\pi^n, \pi^n) + \tau(\mathrm{div}\,\xi^n, \mathrm{div}\,\xi^n) + \tau^2(\varepsilon(\pi^n), \varepsilon(\pi^n))\right\}.
\end{aligned} \tag{51}$$

由于 $\mathrm{div}H_h \subset V_h$, 故

$$(\mathrm{div}\,\rho^n, \mathrm{div}\,\xi^n) = 0,$$

且

$$(\xi^n, \varepsilon(\eta^n)) = -(\eta^n, \mathrm{div}\,\xi^n).$$

从而(50) 简化为

$$I_3 = -(\rho^n - \rho^{n-1}, \xi^n) + \tau(\rho^n - \rho^{n-1}, \varepsilon(\pi^n)) - \tau(\eta^n, \pi^n). \tag{52}$$

由(51)和(52), 两边对 n 从 0, 1, …, N 求和, 得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[\|\xi^N\|_0^2 - \|\xi^0\|_0^2] + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}[\|\pi^n\|_0^2 + \\
&\quad \|\xi^n\|_0^2 + \|\varepsilon(\pi^n)\|_0^2\tau]\tau \leqslant \sum_{i=1}^{3}|T_i|.
\end{aligned} \tag{53}$$

下面依次估计 $T_i(i = 1, 2, 3)$:

$$|T_1| = \left|\sum_{n=0}^{N}(\rho^n - \rho^{n-1}, \xi^n)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\rho^n - \rho^{n-1}}{\tau}, \xi^n\right)\tau\right|.$$

由于

$$\left\|\frac{\rho^n - \rho^{n-1}}{\tau}\right\|_0^2 \leqslant C\tau\int_\Omega\int_{t^{n-1}}^{t^n}\left|\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x,$$

从而,

$$|T_1| \leqslant \varepsilon\sum_{n=0}^{N}\|\xi^n\|_0^2\tau + C\tau^2\left\|\frac{\partial\rho}{\partial t}\right\|_{L^2(J, L^2)}^2. \tag{54}$$

同理, 可得

$$|T_2| \leqslant \varepsilon\sum_{n=0}^{N}\|\varepsilon(\pi^n)\|_0^2\tau^2 + C\tau^2\left\|\frac{\partial\rho}{\partial t}\right\|_0^2, \tag{55}$$

$$|T_3| = \left|\sum_{n=0}^{N}(\eta^n, \pi^n)\tau\right| \leqslant \varepsilon\sum_{n=0}^{N}\|\pi^n\|_0^2\tau + C\sum_{n=0}^{N}\|\eta^n\|_0^2\tau. \tag{56}$$

设 $n = 0, 1, \cdots, N$ 中某个 n^* 使得 $\|\xi^n\|_0$ 取得最大值, 仍记为 $\|\xi^N\|_0$, 对(52) 两边取上确界, 得到

$$\|\xi^N\|_0^2 + \sum_{n=0}^{N}[\|\pi^n\|_0^2 + \|\mathrm{div}\,\xi^n\|_0^2 + \|\varepsilon(\pi^n)\|_0^2\tau]\tau \leqslant C(\tau^2 + h^{2r+2}). \tag{57}$$

注意到

$$\|u^N\|_0^2 = \sum_{n=1}^{N}\frac{\|u^n\|_0^2 - \|u^{n-1}\|_0^2}{\tau}\tau \leqslant C\sum_{n=1}^{N}\tau\|u^n\|_0^2 + \varepsilon\|w^n\|_{L^2(J,L^2)}^2, \tag{58}$$

此处, $w^n = \dfrac{u^n - u^{n-1}}{\tau}$, 由(57) 和(58), 有,

$$\max_{0\leqslant n\leqslant t/\tau}\left\{\|u^n - u_h^n\|_{L^2}^2 + \|\sigma^n - \sigma_h^n\|_{L^2}\right\} + \|w - w_h\|_{L^2(J,L^2)}^2 + \tau\|w - w_h\|_{L^2(J,H^1)} \leqslant C(\tau^2 + h^{2r+2}), \tag{59}$$

由(48), 令 $q_h = 0$, $v_h = \pi^n$. 得到,

$$(\xi^n - \xi^{n-1}, \varepsilon(\pi^n)) - (\mathrm{div}\,\xi^n, \pi^n) = -\tau(\varepsilon(\pi^n), \varepsilon(\pi^n)) - (\eta^n, \pi^n) + (\rho^n - \rho^{n-1}, \varepsilon(\pi^n)). \tag{60}$$

应用文献[9]的 Lemma 3.6 于(58), 得到.

$$\|\mathrm{tr}\,\xi^n\|_0^2 \leqslant C\left\{\tau^2 + h^{2r+2} + \tau(\varepsilon(\pi^n), \varepsilon(\pi^n)) + \|\xi^n\|_0^2\right\}, \tag{61}$$

从而,

$$\|\mathrm{tr}(\sigma - \sigma_h)\|_0^2 \leqslant C\left\{\tau\|\varepsilon(\sigma - \sigma_h)\|_0^2 + \|\sigma - \sigma_h\|_0^2 + \tau^2 + h^{2r+2}\right\}. \tag{62}$$

从而, 得到下列结论:

定理 3.1 对任意时间步长 $\tau > 0$, 最小二乘混合元逼近格式(44) 具有唯一解, 且有下列误差估计

$$\max_{0< n\leqslant T/\tau}\left\{\|\sigma^n - \sigma_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u^n - u_h^2\|_{L^2}^2\right\} + \|w - w_h\|_{L^2(J,L^2)}^2 + \tau\|w - w_h\|_{L^2(J,H^1)}^2 = O(\tau^2 + h^{2r+2}), \tag{63}$$

$$\max_{0\leqslant n\leqslant T/\tau}\|\mathrm{tr}(\sigma^n - \sigma_h^n)\|_0^2 = O(\tau^2 + h^{2r+2}).$$

常数 C 不依赖于 τ, h.

致谢 作者感谢山东大学袁益让教授的热情鼓励和指导.

[参 考 文 献]

[1] Aziz A K, Kellogg R B, Stephens A B. Least_squares methods for elliptic systems[J]. Math Comp, 1985, **44**: 53~70.

[2] Bramble J H, Nitsche J A. A generalized Ritz_least_squares method for Dirichlet problems[J]. SIAM J Numer Anal, 1973, **10**: 81~93.

[3] Raviart R A, Thomas J M. A mixed finite element method for 2nd elliptic problems[A]. In: Math Aspects of the FEM, Lecture Notes in Math[C]. Vol, **606**, Berlin and New York: Springer_Verlag, 1977, 292~315.

[4] Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers[J]. RAIRO Anal Numer, 1974, **8**: 129~151.

[5] Carey G F, Oden J T. Finite Element: A Second Course[M]. Vol Ⅱ. Englewood Cliffs N J: Printice_

Hall, 1983.

[6] Pehlivanov A I, Carey G F, Lazarov R D. Least_squares mixed finite element for second_order elliptic problems[J]. SIAM J Numer Anal, 1994, **5**: 1368~ 1377.

[7] Pehlivanov A I, Carey G F. Error estimates for least_squares mixed finite elements[J]. Math Model Numer Anal, 1994, **5**: 517~ 537.

[8] Cai Z, Lazarov R, Nanteuffel T A, et al. First_order system least squares for second_order partial differential equations Part Ⅰ [J]. SIAM J Numer Anal, 1994, **6**: 1785~ 1799.

[9] Johnson C, Thomee V. Error estimates for some mixed finite element methods for parabolic type problems[J]. RAIRO Anal Numer, 1981, **15**: 41~ 78.

[10] Girault V, Raviart P A. Finite element approximation of the Naviart_Stokes equations[A]. In: Lecture Notes in Mathematics [C]. Vol **749**, Berlin, Heidelberg, New York: Springer_Verlag, 1979.

[11] Wheeler M F. A priori error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1973, **4**: 723~ 758.

Least_Squares Mixed Finite Element Method for a Class of Stokes Equation

Gu Haiming[1], Yang Danping[2], Sui Shulin[1], Liu Xinmin[1]

(1. Qingdao Institute of Chemical Technology, Qingdao 266042, P R China;
2. Department of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, P R China)

Abstract: A least_squares mixed finite element method was formulated for a class of Stokes equations in two dimensional domains. The steady state and the time_dependent Stokes' equations were considered. For the stationary equation, optimal L^2 and H^1_error estimates are derived under the standard regularity assumption on the finite element partition (the LBB_condition is not required). For the evolutionary equation, optimal L^2 estimates are derived under the conventional Raviart_Thomas spaces.

Key words: Least squares; mixed finite element method; error estimates