应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 05_0511_05

等离子体中非线性三维德拜屏蔽的理论研究*

林 长, 张秀莲

(西北师范大学 物理系, 兰州 730070)

(戴世强推荐)

摘要: 研究等离子体中非线性三维德拜屏蔽, 给出了与泊松方程完全等价的一类新的解析方程• 理论结果表明: 解析方程清晰地描述了等离子体中德拜屏蔽的对称分布特征•

关 键 词: 非线性三维德拜屏蔽; 泊松方程; 等离子体; 李兹方法
中图分类号: O53; O175.22 文献标识码: A

等离子体是准电中性介质, 其重要的基本特征是具备抵消电场的能力• 该物理内容的讨论在数学方面是一个求解泊松方程的典型非线性问题• 在以前的研究中, 这类非线性问题通常采用线性化的理论方法, 仅仅局限于粒子势能远小于热能的狭义物理范畴(即 $|e\Phi|/kT_{e,i} \ll 1$)[1~3]• Roberto 等人从广义角度深入研究了一维非线性德拜势• 在泊松方程的求解中, 确立了非线性德拜势的一个精确解析表述(对于 $T_e = T_i$) 和一个近似表述(对于 $T_e \neq T_i$)• 其理论结果既适宜于关于 T_i/T_e 的所有值, 又适宜于粒子中势能对于热能的任意比值, 具有重要的物理意义[4]•

在这篇报道中, 我们重新考虑求解泊松方程的非线性问题• 首次给出了一类新的关于非线性德拜势的解析方程• 在讨论中, 涉及三维泊松方程, 并且假定单荷电离子和电子均服从麦克斯韦_波尔兹曼分布规律• 这个典型问题的非线性处理表明: 一种新的理论模型能够表征等离子体中非线性三维德拜屏蔽•

我们考虑一个完全透明的点电极• 其保持电势 ϕ_0 并位于点 $x = 0, y = 0, z = 0$ 处, 置于电子和单荷电离子组成的无限大的等离子体中• 同时, 粒子分别满足温度 T_e 和 T_i 的麦克斯韦 _波尔兹曼分布规律• 假定, 离电极无限远处两类粒子成份具有相同的密度 n_0, 三维德拜屏蔽的泊松方程为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4\pi e n_0\left[\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) - \exp\left(\frac{-e\phi}{kT_i}\right)\right], \tag{1}$$

其中, 要求 $\phi(x, y, z)$ 满足边界条件:

---

* 收稿日期: 1998_09_01; 修订日期: 1999_12_26
基金项目: 甘肃省自然科学基金资助项目(Z2_96_018)
作者简介: 林长(1949~) , 男, 副教授, 研究方向: 非线性科学, 已发表论文20余篇.

$$\left.\begin{aligned}&\phi(x=0, y=0, z=0)=\phi_0,\\&\phi(x=\pm\infty, y=\pm\infty, z=\pm\infty)=0,\\&\phi_x(x=\pm\infty, y=\pm\infty, z=\pm\infty)=0,\\&\phi_y(x=\pm\infty, y=\pm\infty, z=\pm\infty)=0,\\&\phi_z(x=\pm\infty, y=\pm\infty, z=\pm\infty)=0.\end{aligned}\right\}$$

在下面的讨论中,引入双曲函数 $e^x=\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x$ 和 $e^{-x}=-\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x$,泊松方程转化为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=A(\operatorname{sh}a\phi+\operatorname{ch}a\phi+\operatorname{sh}b\phi-\operatorname{ch}b\phi),\tag{2}$$

其中 $A=4\pi en_0,\ a=\dfrac{e}{kT_{\mathrm{e}}},\ b=\dfrac{e}{kT_{\mathrm{i}}}.$

方程(2)是一个二阶非线性微分方程. 积分给出

$$\int(\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz})\mathrm{d}\phi=A\left[\frac{1}{a}(\operatorname{sh}a\phi+\operatorname{ch}a\phi)+\frac{1}{b}(\operatorname{ch}b\phi-\operatorname{sh}b\phi)\right]+C,\tag{3}$$

其中 $C=A(1/a+1/b)$.

方程(3)解析地描述等离子体中非线性德拜势的非线性结构. 在一般情况下

$$\begin{aligned}(\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz})\mathrm{d}\phi=&(\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz})(\phi_x\mathrm{d}x+\phi_y\mathrm{d}y+\phi_z\mathrm{d}z)=\\&(\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz})\phi_x\mathrm{d}x+(\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz})\phi_y\mathrm{d}y+\\&(\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz})\phi_z\mathrm{d}z=\mathrm{d}U.\end{aligned}$$

采用对称方法,我们实施变量 $M=\dfrac{1}{2}[(\phi_x)^2+(\phi_y)^2+(\phi_z)^2]$ 的变换. 于是,我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}M=&M_x\mathrm{d}x+M_y\mathrm{d}y+M_z\mathrm{d}z=\\&(\phi_x\phi_{xx}+\phi_y\phi_{yx}+\phi_z\phi_{zx})\mathrm{d}x+(\phi_x\phi_{xy}+\phi_y\phi_{yy}+\phi_z\phi_{zy})\mathrm{d}y+\\&(\phi_x\phi_{xz}+\phi_y\phi_{yz}+\phi_z\phi_{zz})\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(M-U)=&(\phi_y\phi_{yx}+\phi_z\phi_{zx}-\phi_{yy}\phi_x-\phi_{zz}\phi_x)\mathrm{d}x+\\&(\phi_x\phi_{xy}+\phi_z\phi_{zy}-\phi_{xx}\phi_y-\phi_{zz}\phi_y)\mathrm{d}y+\\&(\phi_x\phi_{xz}+\phi_y\phi_{yz}-\phi_{xx}\phi_z-\phi_{yy}\phi_z)\mathrm{d}z.\end{aligned}\tag{4}$$

使用这些关系. 方程(4)用下式表示.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}M-A(\operatorname{sh}a\phi+\operatorname{ch}a\phi+\operatorname{sh}b\phi-\operatorname{ch}b\phi)\mathrm{d}\phi=&P(x,y,z)\mathrm{d}x+\\&Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z,\end{aligned}\tag{5}$$

其中
$$\begin{aligned}P(x,y,z)&=\phi_y\phi_{yx}+\phi_z\phi_{zx}-\phi_{yy}\phi_x-\phi_{zz}\phi_x,\\Q(x,y,z)&=\phi_x\phi_{xy}+\phi_z\phi_{zy}-\phi_{xx}\phi_y-\phi_{zz}\phi_y,\\R(x,y,z)&=\phi_x\phi_{xz}+\phi_y\phi_{yz}-\phi_{xx}\phi_z-\phi_{yy}\phi_z.\end{aligned}$$

假定,势函数 $\phi(x,y,z)$ 的混合偏导数是连续函数,方程(5)中存在如下关系:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=&(\phi_{yy}\phi_{yx}+\phi_y\phi_{yxy}+\phi_{zy}\phi_{zx}+\phi_z\phi_{zxy}-\phi_{yyy}\phi_x-\phi_{yy}\phi_{xy}-\phi_{zzy}\phi_x-\phi_{zz}\phi_{xy})-\\&(\phi_{xx}\phi_{xy}+\phi_x\phi_{xyx}+\phi_{zx}\phi_{zy}+\phi_z\phi_{zyx}-\phi_{xxx}\phi_y-\phi_{xx}\phi_{yx}-\phi_{zzx}\phi_y-\phi_{zz}\phi_{yx})=\\&\phi_y(\phi_{yxy}+\phi_{xxx}+\phi_{zzx})-\phi_x(\phi_{yyy}+\phi_{zzy}+\phi_{xyx})=\\&\phi_y\partial_x(\phi_{yy}+\phi_{xx}+\phi_{zz})-\phi_x\partial_y(\phi_{yy}+\phi_{zz}+\phi_{xx})=\\&\phi_y\phi_x(4\pi en_0(a\exp(a\phi)-b\exp(b\phi)))-\\&\phi_x\phi_y(4\pi en_0(a\exp(a\phi)-b\exp(b\phi)))=0,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}=(\phi_{xz}\phi_{xy}+\phi_x\phi_{xyz}+\phi_{zz}\phi_{zy}+\phi_z\phi_{zyz}-\phi_{xxz}\phi_y-\phi_{xx}\phi_{yz}-\phi_{zzz}\phi_y-\phi_{zz}\phi_{yz})-$$
$$(\phi_{xy}\phi_{xz}+\phi_x\phi_{xzy}+\phi_{yy}\phi_{yz}+\phi_y\phi_{yzy}-\phi_{xxy}\phi_z-\phi_{xx}\phi_{zy}-\phi_{yyy}\phi_z-\phi_{yy}\phi_{zy})=$$
$$\phi_z(\phi_{zyz}+\phi_{xxy}+\phi_{yyy})-\phi_y(\phi_{xxz}+\phi_{zzz}+\phi_{yzy})=$$
$$\phi_z\partial_y(\phi_{zz}+\phi_{xx}+\phi_{yy})-\phi_y\partial_z(\phi_{xx}+\phi_{zz}+\phi_{yy})=$$
$$\phi_z\phi_y(4\pi en_0(a\exp(a\phi)-b\exp(b\phi)))-$$
$$\phi_y\phi_z(4\pi en_0(a\exp(a\phi)-b\exp(b\phi)))=0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}=(\phi_{xx}\phi_{xz}+\phi_x\phi_{xzx}+\phi_{yx}\phi_{yz}+\phi_y\phi_{yzx}-\phi_{xxx}\phi_z-\phi_{xx}\phi_{zx}-\phi_{yyx}\phi_z-\phi_{yy}\phi_{zx})-$$
$$(\phi_{yz}\phi_{yx}+\phi_y\phi_{yxz}+\phi_{zz}\phi_{zx}+\phi_z\phi_{zxz}-\phi_{yyz}\phi_x-\phi_{yy}\phi_{xz}-\phi_{zzz}\phi_x-\phi_{zz}\phi_{xz})=$$
$$\phi_x(\phi_{xzx}+\phi_{yyz}+\phi_{zzz})-\phi_z(\phi_{xxx}+\phi_{yyx}+\phi_{zxz})=$$
$$\phi_x\partial_z(\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz})-\phi_z\partial_x(\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz})=$$
$$\phi_x\phi_z(4\pi en_0(a\exp(a\phi)-b\exp(b\phi)))-$$
$$\phi_z\phi_x(4\pi en_0(a\exp(a\phi)-b\exp(b\phi)))=0.$$

由方程(5), 我们得到一个关于三维非线性德拜势的微分_积分方程

$$\frac{1}{2}((\phi_x)^2+(\phi_y)^2+(\phi_z)^2)-A\left(\frac{1}{a}(\operatorname{sh}a\phi+\operatorname{ch}a\phi)+\frac{1}{b}(\operatorname{ch}b\phi-\operatorname{sh}b\phi)\right)+C=$$
$$\int_\infty^x P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+\int_\infty^y Q(\infty,y,z)\,\mathrm{d}y+\int_\infty^z R(\infty,\infty,z)\,\mathrm{d}z=$$
$$N(x,y,z). \tag{6}$$

这个典型方程完全描述非线性德拜势, 其涉及到三维泊松方程. 这个理论模型满足于具有任意势能的粒子和所有 T_i/T_e 的比值. 与泊松方程完全一致, 等离子体中非线性德拜势的许多重要特征能够由其得出.

方程(6) 的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\phi_x}=\frac{\mathrm{d}y}{\phi_y}=\frac{\mathrm{d}z}{\phi_z}=\frac{\mathrm{d}\phi}{(\phi_x)^2+(\phi_y)^2+(\phi_z)^2}=$$
$$\frac{\mathrm{d}(\phi_x)}{N_x+A\phi_x(\operatorname{sh}a\phi+\operatorname{ch}a\phi+\operatorname{sh}b\phi-\operatorname{ch}b\phi)}=$$
$$\frac{\mathrm{d}(\phi_y)}{N_y+A\phi_y(\operatorname{sh}a\phi+\operatorname{ch}a\phi+\operatorname{sh}b\phi-\operatorname{ch}b\phi)}=$$
$$\frac{\mathrm{d}(\phi_z)}{N_z+A\phi_z(\operatorname{sh}a\phi+\operatorname{ch}a\phi+\operatorname{sh}b\phi-\operatorname{ch}b\phi)}. \tag{7}$$

上述结果给出了等离子体中德拜屏蔽的一些对称分布特征:

$$\phi_x\mathrm{d}(\phi_x)=(N_x(x,y,z)+A\phi_x(\operatorname{sh}a\phi+\operatorname{ch}a\phi+\operatorname{sh}b\phi-\operatorname{ch}b\phi))\mathrm{d}x,$$
$$\phi_y\mathrm{d}(\phi_y)=(N_y(x,y,z)+A\phi_y(\operatorname{sh}a\phi+\operatorname{ch}a\phi+\operatorname{sh}b\phi-\operatorname{ch}b\phi))\mathrm{d}y,$$
$$\phi_z\mathrm{d}(\phi_z)=(N_z(x,y,z)+A\phi_z(\operatorname{sh}a\phi+\operatorname{ch}a\phi+\operatorname{sh}b\phi-\operatorname{ch}b\phi))\mathrm{d}z.$$
$$\phi_x=((\phi_x)^2+(\phi_y)^2+(\phi_z)^2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi},$$
$$\phi_y=((\phi_x)^2+(\phi_y)^2+(\phi_z)^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi},$$
$$\phi_z=((\phi_x)^2+(\phi_y)^2+(\phi_z)^2)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\phi}.$$

在特殊情况下, 即方程(6) 中函数 $N(x, y, z)$ 的效应忽略不计时, 我们得到非线性德拜势的一般解析解[5]

$$\int\left(\frac{2A((1/a)(\mathrm{sh}a\phi+\mathrm{ch}a\phi)+(1/b)(\mathrm{ch}b\phi-\mathrm{sh}b\phi))+C}{1+\alpha_1^2+\alpha_2^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\phi = x+\alpha_1 y+\alpha_2 z+B \cdot \tag{8}$$

在这里, 上述积分形式表征了三维非线性德拜势的非线性结构特征• 它是一个解析解, 适宜于粒子势能和热能比率的所有值•

在普遍情况下, 微分_积分方程(6) 中的函数 $N(x, y, z)$ 的效应不能忽视• 要足够准确地描述等离子体的非线性特征, 就亟须考虑积分项 _ 函数 $N(x, y, z)$ 的重要作用机理•

另外, 考虑泊松方程(1), 将其归结为泛函极值问题讨论, 即考察泛函极值

$$V[\phi(x, y, z)] = \iiint_D\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2-2A\left[\frac{1}{a}(\mathrm{sh}a\phi+\mathrm{ch}a\phi)+\frac{1}{b}(\mathrm{ch}b\phi-\mathrm{sh}b\phi)\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{9}$$

满足边界条件•

采用李兹方法, 取其近似解的级数形式

$$\phi(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\phi_i(x, y, z), \tag{10}$$

其中, α_i 是实系数, $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_i, \cdots$ 是某一函数序列•

选取泛函数的前 n 项

$$\phi_n(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\phi_i(x, y, z) \tag{11}$$

代入式(9) 讨论, 泛函由无穷多个变量的函数退化为有限个变量的函数, 即

$$V[\phi_n(x, y, z)] = V(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \cdot \tag{12}$$

系数 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的选择, 以使函数 $V(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 取极值, 故有方程组

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \cdot \tag{13}$$

从而, 对应的函数为

$$\phi_n = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\phi_i(x, y, z) \cdot \tag{14}$$

若 $n \to \infty$ 时实施极限运算, 极限存在时, 得出变分问题的精确解; 若不能完成极限运算, 得出变分问题的近似解•

亟待解决的首要问题是: 函数序列 $\phi_i(x, y, z)$ 的选择是十分重要的, 直接关系到计算的复杂性和理论结果的有效性• 这是解决问题的关键•

概括地讲, 本文提出了一类新的描述非线性德拜屏蔽的解析方程, 这种理论模型的引入, 使等离子体中物理特征的描述具有完全的对称分布特征• 我们认为: 它可以作为一维非线性德拜屏蔽结论的直接推论• 对于等离子体基本性质的研究具有一定的有益作用•

[参 考 文 献]

[1] Chen F F. Introduction to Plasmas Physics [M]. New York: Plenum Press, 1974, 8.

[2] Chakraborty B. Principles of Plasmas Physics [M]. 2nd Ed, New Dehli: Wiley Eastern Ltd, 1990,

121.

[3] Tanembaum B S. *Plasma Physics*[M]. New York: McGraw_Hill Book Co, 1961, 203.

[4] Roberto A. Clemente and pablo martin[J]. *J Phys Soc Jpn*, 1992, **61**(6): 1969.

[5] Lin Chang, Zhang Xiulian. *J Phys Soc Jpn*, 1995, **64**(10): 3768.

Study of the Nonlinear Three_Dimensional Debye Screening in Plasmas

Lin Chang, Zhang Xiulian

(Department of Physics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, P R China)

Abstract: The nonlinear three_dimensional Debye screening in plasmas is investigated. A new kind of analytical equation, which is in agreement with the three_dimensional Poisson equation for the nonlinear Debye potential, is obtained. It is shown that the symmetry distribution of the Debye screening in plasmas can be described by the equation.

Key words: the nonlinear three_dimensional Debye screening; the Poisson equation; plasmas; the Ritz method