应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 05_0516_07

$\theta(t)$ 型奇异积分算子的几个有界结果*

赵 凯

(青岛大学 数学系, 青岛 266071)

(云天铨推荐)

摘要: 讨论了 $\theta(t)$ 型奇异积分算子在Banach值 $L_B^p(\mathbf{R}^n)$, $(1 \leqslant p < +\infty)$ 空间上的有界性, 以及在 Banach值 Hardy 空间 $H_B^1(\mathbf{R}^n)$ 上的有界性·

关 键 词: $\theta(t)$ 型奇异积分算子; $L_B^p(\mathbf{R}^n)$ 空间; $H_B^1(\mathbf{R}^n)$ 空间
中图分类号: O174.2 文献标识码: A

1 有关概念和主要结果

设 B 是一个具有无条件基的 UMD(unconditionality of martingale differences) 空间, 记 $L_B^p(\mathbf{R}^n)$, $(1 \leqslant p < +\infty)$, 为 $\mathbf{R}^n$ 上的p 次绝对可积B 值函数构成的 Banach 空间,

$$\|f\|_{L_B^p} = \left(\int_{\mathbf{R}^n} \|f(x)\|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} < +\infty \qquad (1 \leqslant p < +\infty)·$$

其范数是

$$\|f\|_{L_B^p} = \left(\int_{R^n} \|f(x)\|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \qquad (1 \leqslant p < +\infty)·$$

对于满足标准核的主值奇异积分算子, J. Bourgain 和韦旦分别在[1], [2] 中讨论了它在 $L_B^p(\mathbf{R}^n)(1 < p < \infty)$ 和 $H_B^1(\mathbf{R}^n)$ 上的有界性, 即有[1,2]

若主值型奇异积分算子 $T: L_B^p(\mathbf{R}^n) \to L_B^p(\mathbf{R}^n)$

由 $\quad T(f_j) = \mathrm{P.V.}(k_j * f_j) = (\mathrm{P.V.}\, k_j * f_j)$ 定义, 其中 $K = (k_j)$ 满足:

a) $\|\hat{K}\|_\infty \leqslant C$,

b) $|K(x)| \leqslant C|x|^{-n}$, $\qquad (x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$,

c) $|K(x) - K(x-y)| \leqslant C|y| \cdot |x|^{-n-1}$, $\quad 2|y| < |x|$

这里 $\hat{K}$ 是K 的 Fourier 变换, C 为一固定常数, 则有

$$\|Tf\|_{L_B^p} \leqslant C\|f\|_{L_B^p} \qquad (\forall f \in L_B^p(\mathbf{R}^n), 1 < p < \infty),$$

$$\|Tf\|_{H_B^1} \leqslant C\|f\|_{H_B^1} \qquad (\forall f \in H_B^1(\mathbf{R}^n))·$$

这里考虑的是 $\theta(t)$ 型奇异积分算子, 所谓 $\theta(t)$ 型奇异积分算子, 是把标准核的奇异积分算子的条件 c) 改为更广的条件 d), 其它条件不变:

---

* 收稿日期: 1998_09_03; 修订日期: 1999_12_07
基金项目: 山东省教委资助项目(J98P51)
作者简介: 赵凯(1960~), 男, 硕士, 副教授, 研究方向: 调和分析及小波分析, 已发表论文 30 余篇.

d) $|K(x)-K(x-y)| \leqslant C\theta\left(\frac{|y|}{|x|}\right)|x|^{-n} \qquad (2|y|<|x|)$,

这里 $\theta(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的非减函数且 $\theta(0)=0$, $\theta(2t)\leqslant C\theta(t)$, $\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t}\mathrm{d}t<+\infty$.

显然, $\theta(t)$ 型奇异积分算子是一类更广的奇异积分算子. 对于 $\theta(t)$ 型奇异积分算子, 本文利用不同于[2]的方法得到了在Banach空间值Hardy空间 $H_B^1(\mathbf{R}^n)$ 上的有界性, 也得到了它在 $L_B^p(\mathbf{R}^n)$, $(1\leqslant p<+\infty)$ 上的有界性, 从而标准核的奇异积分算子在 $H_B^1(\mathbf{R}^n)$ 等空间上的有界性即为这里的特殊情形.

为了方便, 首先给出如下两个概念(见[1], [2]):

定义 A　Banach 值函数 $a(x)$ 称为 B 值原子, 如果它满足:

$$\operatorname{supp} a \subset B(x_0, r); \quad \|a\|_{L_B^2} \leqslant C|B(x_0,r)|^{-\frac{1}{2}}; \quad \int_{\mathbf{R}^n} a(x)\mathrm{d}x = 0,$$

其中 $B(x_0,r)$ 是一中心在 x_0 半径为 r 的球.

定义 B　Banach 值 Hardy 空间 $H_B^1(\mathbf{R}^n)$ 定义为:

$$H_B^1(\mathbf{R}^n)=\left\{f\in L_B^1(\mathbf{R}^n): f=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k,\ \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|<\infty\right\},$$

其中 a_k 均为 B 值原子, 且范数定义为 $\|f\|_{H_B^1}=\inf\left\{\sum|\lambda_k|\right\}$.

这里的主要结果是:

定理 1　若 T 是一个 $\theta(t)$ 型奇异积分算子, 则 T 是 $L_B^1(\mathbf{R}^n)$ 上的弱有界的线性算子, 也是 $L_B^p(\mathbf{R}^n)$, $1<p<+\infty$ 上的强有界的线性算子, 即有

$$\left|\left\{x\in\mathbf{R}^n: \|Tf(x)\|>\alpha\right\}\right| \leqslant \frac{C}{\alpha}\|f\|_{L_B^1} \qquad (\forall f\in L_B^1(\mathbf{R}^n),\ \alpha>0),$$

$$\|Tf\|_{L_B^p}\leqslant C\|f\|_{L_B^p} \qquad (\forall f\in L_B^p(\mathbf{R}^n),\ 1<p<+\infty).$$

定理 2　若 T 是一个 $\theta(t)$ 型奇异积分算子, 则 T 是 $H_B^1(\mathbf{R}^n)$ 到 $L_B^1(\mathbf{R}^n)$ 的有界线性算子, 也是 $H_B^1(\mathbf{R}^n)$ 到自身的有界线性算子, 即有

$$\|Tf\|_{L_B^1}\leqslant C\|f\|_{H_B^1} \qquad (\forall f\in H_B^1(\mathbf{R}^n)),$$

$$\|Tf\|_{H_B^1}\leqslant C\|f\|_{H_B^1} \qquad (\forall f\in H_B^1(\mathbf{R}^n)).$$

2　定理的证明

定理 1 的证明　首先证明 T 是强 $(2,2)$ 型的, 注意到 $\widehat{Tf}(\omega)=\hat{K}(\omega)\hat{f}(\omega)$, 从而有

$$\|Tf\|_{L_B^2}=\|\widehat{Tf}\|_{L_B^2}=\|\hat{K}\hat{f}\|_{L_B^2}\leqslant C\|\hat{f}\|_{L_B^2}=C\|f\|_{L_B^2}. \tag{1}$$

下面证明 T 是弱 $(1,1)$ 型的. 应用 Calderón-Zygmund 分解, 记 $F=\left\{x\in\mathbf{R}^n: \|f(x)\|\leqslant\alpha\right\}$, $\Omega=\mathbf{R}^n\setminus F=\bigcup_j Q_j$, Q_j 是内部不交的方体, 并且

$$|\Omega|\leqslant\frac{C}{\alpha}\|f\|_{L_B^1}, \qquad f_{Q_j}=\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}\|f(x)\|\mathrm{d}x\leqslant C\alpha. \tag{2}$$

令

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\in F),\\ \dfrac{1}{|Q_j|}\displaystyle\int_{Q_j}f(y)\mathrm{d}y & (x\in Q_j),\end{cases} \qquad b(x)=f(x)-g(x), \tag{3}$$

则对每一个 Q_j 有$\int_{Q_j} b(x)\mathrm{d}x = 0$, 并且 $Tf(x) = Tg(x) + Tb(x)$, 因此有

$$|\{x \in \mathbf{R}^n: \|Tf(x)\| > \alpha\}| \leqslant \left|\left\{x \in \mathbf{R}^n: \|Tg(x)\| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbf{R}^n: \|Tb(x)\| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right| = I_1 + I_2.$$

对于 I_1, 由于 T 在$L_B^2(\mathbf{R}^n)$ 上有界, 又显然 $g \in L_B^2(\mathbf{R}^n)$, 所以

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant \frac{C}{\alpha^2}\|g\|_{L_B^2}^2 = \frac{C}{\alpha^2}\int_{\mathbf{R}^n}\|g(x)\|^2\mathrm{d}x = \\
&\frac{C}{\alpha^2}\int_F\|g(x)\|^2\mathrm{d}x + \frac{C}{\alpha^2}\int_\Omega\|g(x)\|^2\mathrm{d}x \leqslant \\
&\frac{C}{\alpha^2}\alpha\int_F\|f(x)\|\mathrm{d}x + \frac{C}{\alpha^2}\sum_j\int_{Q_j}|f_{Q_j}|^2\mathrm{d}x \leqslant \\
&\frac{C}{\alpha}\int_F\|f(x)\|\mathrm{d}x + \frac{C}{\alpha^2}\sum_j|f_{Q_j}|^2|Q_j| \leqslant \\
&\frac{C}{\alpha}\int_{\mathbf{R}^n}\|f(x)\|\mathrm{d}x + \frac{C}{\alpha^2}\alpha^2|\Omega| \leqslant \\
&\frac{C}{\alpha}\int_{\mathbf{R}^n}\|f(x)\|\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{4}$$

对于 I_2, 记 $b(x) = \sum_j b_j(x)$, 其中 $b_j(x) = b(x)\chi_{Q_j}(x)$, $\chi_{Q_j}(x)$ 是特征函数. 因此

$$Tb(x) = \sum_j Tb_j(x),$$

注意到$\int_{Q_j} b_j(x)\mathrm{d}x = 0$, 记 $E = (\cup_j 2Q_j)^c$, 则当 $x \notin \cup_j 2Q_j$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\int_E\|Tb(x)\|\mathrm{d}x &\leqslant \int_E\Big(\sum_j\int_{Q_j}|K(x-y) - K(x-y_j)|\cdot\|b_j(y)\|\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x \leqslant \\
&C\sum_j\int_{Q_j}\|b_j(y)\|\left(\int_E\theta\left(\frac{|y-y_j|}{|x-y|}\right)|x-y|^{-n}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \leqslant \\
&C\sum_j\int_{Q_j}\|b_j(y)\|\mathrm{d}y\left(\int_{|x|>cd_j}\theta\left(\frac{d_j}{|x|}\right)|x|^{-n}\mathrm{d}x\right) \leqslant \\
&C\sum_j\int_{Q_j}\|b_j(y)\|\mathrm{d}y \leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}\|f(y)\|\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{5}$$

所以

$$\begin{aligned}
I_2 &\leqslant \Big|\bigcup_j 2Q_j\Big| + \left|\left\{x \notin \bigcup_j 2Q_j: \|Tb(x)\| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right| \leqslant \\
&C|\Omega| + \frac{C}{\alpha}\|f\|_{L_B^1} \leqslant \frac{C}{\alpha}\|f\|_{L_B^1}.
\end{aligned} \tag{6}$$

这样证明了 T 是弱(1, 1) 型的.

最后证明 T 是强(p, p) 型的$(1 < p < +\infty)$. 对于$1 < p < 2$, 因为T 是弱(1, 1) 型的, 又是强(2, 2) 型的, 所以可由 Marcinkiewicz 的算子内插定理直接得到. 如果 $2 < p < +\infty$, 令 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, 则有$(1 < p' < 2$, $g(x) \in L_B^{p'} \cap L_B^1)$

$$\|Tf\|_{L_B^p} = \sup_{\|g\|_{L_B^{p'}} \leqslant 1}\left\|\int_{\mathbf{R}^n}Tf(x)g(x)\mathrm{d}x\right\| =$$

$$\sup_{\|g\|_{L_B^{p'}}\leqslant 1}\left\|\int_{\mathbf{R}^n} f(y)\left(\int_{\mathbf{R}^n} K(x-y)g(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right\|\leqslant$$
$$\sup_{\|g\|_{L_B^{p'}}\leqslant 1}\|f\|_{L_B^p}\|Tg\|_{L_B^{p'}}\leqslant C\|f\|_{L_B^p}\|g\|_{L_B^{p'}}\leqslant C\|f\|_{L_B^p}\cdot \tag{7}$$

至此完成了定理 1 的证明•

定理 2 的证明　首先证明 T 是 $H_B^1(\mathbf{R}^n)$ 到 $L_B^1(\mathbf{R}^n)$ 的有界算子• 为此只需证明对任意的 B 值原子 $a(x)$ 有

$$\|Ta\|_{L_B^1}\leqslant C \tag{8}$$

事实上, 令

$$\|Ta\|_{L_B^1}=\int_{2B}\|Ta(x)\|\mathrm{d}x+\int_{R^n\setminus 2B}\|Ta(x)\|\mathrm{d}x=J_1+J_2\cdot$$

对于 J_1, 由于 T 是 $L_B^p(R^n)$, $(1<p<\infty)$ 有界的以及原子的范数条件, 故有

$$J_1\leqslant C|B|^{\frac12}\left(\int_{2B}\|Ta(x)\|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\leqslant$$
$$C|B|^{\frac12}\|a\|_{L_B^2}\leqslant C|B|^{\frac12}|B|^{\frac12-1}=C\cdot \tag{9}$$

对于 J_2, 由原子的消失矩条件以及 $\theta(t)$ 函数的特性得

$$J_2\leqslant\int_{(2B)^c}\left(\int_B|K(x,y)-K(x,x_0)|\cdot\|a(y)\|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\int_B\|a(y)\|\left(\int_{(2B)^c}\theta\left(\frac{|y-x_0|}{|x-y|}\right)|x-y|^{-n}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\leqslant$$
$$C\int_B\|a(y)\|\mathrm{d}y\int_{|x|>\alpha}\theta\left(\frac{t}{|x|}\right)|x|^{-n}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\int_B\|a(y)\|\mathrm{d}y\leqslant C|B|^{\frac12}\left(\int_B\|a(y)\|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac12}\leqslant$$
$$C|B|^{\frac12}|B|^{\frac12-1}=C\cdot \tag{10}$$

下面证明 T 是 $H_B^1(R^n)$ 到 $H_B^1(R^n)$ 有界的• 首先, 证明每个 B 值原子 $b(x)$ 有如下分解式:

$$Tb(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k(b)a_k(x,b),\quad|\mu_k(b)|\leqslant C\theta\left(\frac{1}{2^k}\right)\qquad(k=1,2,3,\cdots), \tag{11}$$

这里每个 $a_k(x,b)$ 都是一 B 值原子•

令 $B_k=2^kB$, $E_k=B_k\setminus B_{k-1}$, $(k=1,2,3,\cdots)$, 并且记

$$Tb(x)=\chi_{B_1}(x)Tb(x)+\sum_{k=2}^{+\infty}\chi_{E_k}(x)Tb(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}b_k(x)\cdot$$

由于 T 是 L_B^p, $(1<p<\infty)$ 上有界的, 故

$$\|b_1\|_{L_B^2}\leqslant\|Tb\|_{L_B^2}\leqslant C\|b\|_{L_B^2}\leqslant C|B|^{-\frac12}\leqslant C|B_1|^{-\frac12}\cdot$$

如果记 $\mu_1(b)=C$, $a_1(x)=\dfrac{b_1(x)}{\mu_1(b)}$, 则 $\mathrm{supp}\,a_1\subset B_1$, $\|a_1\|_{L_B^2}\leqslant|B_1|^{-\frac12}\cdot$

对于 $k\geqslant 2$, 这里由算子 T 的定义及性质等, 得到

$$\|b_k\|_{L_B^2}\leqslant\left(\int_{E_k}\|Tb(x)\|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\leqslant$$
$$C\left(\int_{E_k}\left(\int_B\theta\left(\frac{|t-x_0|}{|x-x_0|}\right)|x-x_0|^{-n}\|b(t)\|\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\leqslant$$

$$C\theta\left(\frac{1}{2^k}\right)|B_k|^{-1}\left(\int_{B_k}\left(\int_B \|b(t)\|\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$C\theta\left(\frac{1}{2^k}\right)|B_k|^{-1}|B|^{\frac{1}{2}}\|b\|_{L_B^2}\left(\int_{B_k}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$C\theta\left(\frac{1}{2^k}\right)|B_k|^{-1}|B|^{\frac{1}{2}}\|b\|_{L_B^2}|B_k|^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$C\theta\left(\frac{1}{2^k}\right)|B_k|^{-1}|B|^{\frac{1}{2}}|B|^{-\frac{1}{2}}|B_k|^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$C\theta\left(\frac{1}{2^k}\right)|B_k|^{-\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

如果再记 $\mu_k(b)=C\theta\left(\frac{1}{2^k}\right)$, $a_k(x)=\dfrac{b_k(x)}{\mu_k(b)}$, 则 $\operatorname{supp} a_k\subset B_k$, 且 $\|a_k\|_{L_B^2}\leqslant|B_k|^{-\frac{1}{2}}$.

这样, $a_k(x)$ 满足 B 值原子的支集条件和范数条件, $k\geqslant 1$, 并且有等式

$$Tb(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k(b)a_k(x). \tag{13}$$

再令 $F_1=B_1$, $F_k=E_k(k\geqslant 2)$, 并且记

$$Tb(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(b_k(x)-\frac{\chi_{F_k}(x)}{|F_k|}\int b_k(t)\mathrm{d}t\right)+$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\int_{F_j}b_j(t)\mathrm{d}t\right)\left(\frac{\chi_{F_{k+1}}(x)}{|F_{k+1}|}-\frac{\chi_{F_k}(x)}{|F_k|}\right)+$$

$$\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{F_j}b_j(t)\mathrm{d}t\right)\cdot\frac{\chi_{F_1}(x)}{|F_1|}=$$

$$M_1+M_2+M_3.$$

把 M_1 再记为

$$M_1=\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k(b)\left(a_k(x)-\frac{\chi_{F_k}(x)}{|F_k|}\int a_k(t)\mathrm{d}t\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k(b)a_k(x),$$

这里 $\mu_k(b)=2\mu_k(b),(k=1,2,3,\cdots)$.

则容易验证每个 $a_k(x)$ 都是一个 B 值原子, 并且系数有

$$|\mu_1|\leqslant C,\qquad |\mu_k|\leqslant C\theta\left(\frac{1}{2^k}\right)\qquad(k=2,3,4,\cdots).$$

因此 M_1 满足分解式(11).

如果记

$$M_2=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\int_{F_j}b_j(t)\mathrm{d}t\right)\left(\frac{\chi_{F_{k+1}}(x)}{|F_{k+1}|}-\frac{\chi_{F_k}(x)}{|F_k|}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k a_k(x),$$

其中

$$a_k(x)=\left(\theta\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)^{-1}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\int_{F_j}b_j(t)\mathrm{d}t\right)\left(\frac{\chi_{F_{k+1}}(x)}{|F_{k+1}|}-\frac{\chi_{F_k}(x)}{|F_k|}\right),\quad \mu_k=\theta\left(\frac{1}{2^k}\right).$$

则有 $\operatorname{supp} a_k(x)\subset B_{k+1}$, $\int a_k(x)\mathrm{d}x=0$, 并且由于

$$\sum_{j=k+1}^{+\infty}\left\|\int_{F_j}b_j(t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant C\sum_{j=k+1}^{+\infty}\left(\int_{F_j}\|b_j(t)\|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{F_j}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$
\begin{aligned}
& C \sum_{j=k+1}^{+\infty} \| b_j \|_{L_B^2} | B_j |^{\frac{1}{2}} \leqslant \\
& C \sum_{j=k+1}^{+\infty} | B_j |^{\frac{1}{2}} \theta\left(\frac{1}{2^j}\right) | B_j |^{-\frac{1}{2}} \leqslant \\
& C\theta\left(\frac{1}{2^k}\right),
\end{aligned} \tag{14}
$$

得到

$$
\| a_k \|_{L_B^2} \leqslant C \frac{1}{| B_{k+1} |}\left(\int_{B_{k+1}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C | B_{k+1} |^{-\frac{1}{2}}. \tag{15}
$$

从而每个 $a_k(x)$ 也都是一 B 值原子.

因此, M_2 也满足(11) 的分解式.

对于 M_3, 由[2] 的引理 2 知$\int_{R^n} Tb(x)\mathrm{d}x = 0$, 所以

$$
\sum_{j=1}^{+\infty} \int_{F_j} b_j(t)\mathrm{d}t = \int_{R^n} Tb(x)\mathrm{d}x = 0, \tag{16}
$$

即知 M_3 也满足分解式(11).

至此, 我们证明了分解式(11).

最后, 对任意$f(x) \in H_B^1(R^n)$, 由定义 B 和分解式(11), 得到:

$$
Tf(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} c_{k,j} a_{k,j}(x), \tag{17}
$$

这里每个 $a_{k,j}(x)$ 都是一 B 值原子, 并且

$$
c_{k,j} = \lambda_k \mu_j(b_k), \quad | \mu_j(b_k) | \leqslant C\theta\left(\frac{1}{2^j}\right), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} | \lambda_k | < +\infty,
$$

所以系数有

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} | c_{k,j} | \leqslant & C\left(\sum_{k=1}^{+\infty} | \lambda_k |\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} | \mu_j(b_k) |\right) \leqslant \\
& C\left(\sum_{k=1}^{+\infty} | \lambda_k |\right)\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \theta\left(\frac{1}{2^j}\right)\right) \leqslant \\
& C \sum_{j=1}^{+\infty} \theta\left(\frac{1}{2^j}\right) \leqslant \\
& C \int_0^1 \frac{\theta(t)}{t} \mathrm{d}t < +\infty.
\end{aligned} \tag{18}
$$

因此　$Tf(x) \in H_B^1(R^n)$.　由(18) 式显然也得

$$
\| Tf \|_{H_B^1} \leqslant C \| f \|_{H_B^1}.
$$

至此定理全部证完.

[参　考　文　献]

[1] Bourgain J. Extension of a result of Benedek, Calder n and Panzone[J]. Ark for Mat, 1984, **22**(1): 91~ 95.

[2] 韦旦. 一类奇异积分算子在 Banach 空间值 Hardy 空间上的有界性[J]. 数学物理学报, 1997, **17**(2): 235~ 240.

[3] 赵凯. On generalized Calder n_Zygmund operators[J]. 数学研究与评论, 1995, **15**(2): 211~ 215.

[4] Jos L, Rubio de Francia. Fourier series and Hilbert transforms with values in UMD Banach spaces [J]. Studia Math, 1985, **81**(1): 95~ 105.
[5] 彭立中. 广义 Calderыn_Zygmund 算子及其加权模不等式[J]. 数学进展, 1985, **14**(2): 97~ 115.
[6] 邓东皋, 韩永生. H^p 空间论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1992.
[7] 赵凯. 向量值函数的奇异积分算子[J]. 青岛大学学报(自然), 1992, **5**(1): 41~ 49.
[8] Stein E M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions [M]. Princeton N J: Princeton University Press, 1970.

Some Bounded Results of θ(t)_Type Singular Integral Operators

Zhao Kai
(Department of Mathematics, Qingdao University, Qingdao 266071, P R China)

Abstract: Let B be a Banach space in UMD with an unconditional basis. The boundedness of the $\theta(t)$_type singular integral operators in $L^p_B(\mathbf{R}^n)$, $(1 \leqslant p < +\infty)$ and $H^1_B(\mathbf{R}^n)$ spaces are discussed.

Key words: $\theta(t)$_type singular integral operators; $L^p_B(\mathbf{R}^n)$ space; $H^1_B(\mathbf{R}^n)$ space