应用数学和力学,第 21 卷 第 5 期(2000 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 05_0529_06

一类非线性中立型抛物微分方程边值问题解的振动性

王培光

(河北大学, 保定 071002)

(林宗池推荐)

摘要: 讨论了一类非线性中立型抛物微分方程, 得到了该类方程的两类边值问题解振动的充分条件

关 键 词: 抛物方程; 边值问题; 振动
中图分类号: O175 2 文献标识码: A

引 言

由于在力学、控制论等应用领域出现了大量的用偏泛函微分方程描述的数学模型[1], 因而对这类方程解的性态问题的研究引起了人们的广泛关注 对于具有偏差变元的抛物型微分方程解的振动理论近年来取得了较大发展, 可参看文献[2~ 7] 但相应的理论仍需进一步完善与发展 本文将考虑下列非线性中立型抛物方程

$$\frac{}{t}[u + (t)u(x, t -)] + p(x, t)u + c(x, t, u) =$$

$$a(t)\ u + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\ u(x, {}_i(t)) \qquad (x, t) \qquad R_+ \quad G, \tag{E}$$

和两类边界条件

$$\frac{u}{n} + (x, t)u = 0 \qquad (x, t) \qquad R_+, \tag{B$_1$}$$

$$u = 0 \qquad (x, t) \qquad R_+, \tag{B$_2$}$$

其中 > 0 为常数; $R_+ = [0, \ )$; $u = u(x, t)$; 是 R^n 中的 Laplacian 算子; 是 R^n 中具有光滑边界 的有界区域 (x, t) 是 R 上的非负连续函数, n 是边界 上的单位外法向量

本文的目的是讨论问题(E), (B$_1$) (或(E), (B$_2$)) 的解的振动性, 并建立一些振动准则

定义 1 问题(E), (B$_1$) (或(E), (B$_2$)) 的解 $u(x, t)$ $C^2(G)$ $C^1(G)$ 称为在区域 G 内振动, 如果对任意 $t_0 > 0$, 存在一点 (x_1, t_1) $(t_0, \ )$ G_0 使得 $u(x_1, t_1) = 0$ 成立

收稿日期: 1998_10_08; 修订日期: 1999_12_08
基金项目: 河北省自然科学基金资助项目
作者简介: 王培光(1963~), 男, 副教授, 博士, 国内外公开刊物发表论文 30 余篇, 著作 1 部, 教材 1 部.

我们称条件 H) 满足, 如果下列诸条件成立:

H_1) (t) $C^1(R_+, R)$; $0<$ $_1$ (t) $_2$, $_1$, $_2$ 为常数;

H_2) $a(t), a_i(t)$ $C(R_+, R_+)$ $i = 1, 2, , n$;

H_3) $p(x.t)$ $C(G, R_+)$;

H_4) $_i(t)$ $C^2(R_+, R)$, $_i(t)$ t, $\lim\limits_{t} {}_i(t) =$, 且 $_i(t)$ 在$(0,)$ 上非减, $i = 1, 2, , n$;

H_5) $c(x, t, u)$ $c(G R, R)$, $c(x, t, - u) = - c(x, t, u)$ (x, t, u) G $(0,)$;

H_6) $c(x, t, u)$ $q(t)h(u)$, (x, t, u) G $(0,)$, 其中 $q(t)$ 是$(0,)$ 上正的连续函数, $h(u)$ 是$(0,)$ 上连续的, 正的凸函数

1 边值问题解的振动性

对于问题(E), (B_1) 的解 $u(x, t)$, 定义函数

$$U(t) = \frac{1}{| |} u(x, t)\mathrm{d}x \quad t \quad 0, \ | \ | = \mathrm{d}x \tag{1}$$

定理 1 设条件 H) 成立, 若微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[U(t) + (t)U(t-)] + P(t)U(t) + q(t)h(U(t)) \quad 0 \quad (t \quad t_0), \tag{2}$$

的每一最终正解当 t 时趋于零, 则问题(E), (B_1) 的每一解在 G 内振动, 或者

$$\lim_{t} u(x, t)\mathrm{d}x = 0,$$

其中 t_0 是充分大的正数 $P(t) = \min\left\{p(x, t), x \right\}$

证明 假设不然, 即问题(E), (B_1) 存在一个解 $u(x, t)$ 在 G 内没有零点, 并且$\lim\limits_{t} u(x, t)\mathrm{d}x$ 0 不妨设 $u(x, t) > 0$ 则存在充分大 t_0 使得 $u(x, t-) > 0$, $u(x, {}_i(t)) > 0$; (x, t) $[t_0,)$, $i = 1, 2, , n$; 对方程(E) 关于 x 在区域 上积分, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[u\mathrm{d}x + (t) u(x, t-)\mathrm{d}x\right] + p(x, t)u\mathrm{d}x + c(x, t, u)\mathrm{d}x =$$

$$a(t) u\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} a_i(t) u(x, {}_i(t))\mathrm{d}x \quad (t \quad t_0), \tag{3}$$

注意到 $p(t)$ 的定义, 我们得到

$$p(x, t)u\mathrm{d}x \quad p(t) \quad u\mathrm{d}x \quad (t \quad t_0), \tag{4}$$

由 Green 公式, 得

$$u\mathrm{d}x = \frac{u}{n}\mathrm{d}s = - (x, t)u\mathrm{d}s \quad 0 \quad (t \quad t_0), \tag{5}$$

$$u(x, {}_i(t))\mathrm{d}x = - (x, {}_i(t))u(x, {}_i(t))\mathrm{d}s \quad 0 \quad (t \quad t_0), \tag{6}$$

由 H_6) 和 Jensen 不等式, 得

$$c(x, t, u)\mathrm{d}x \quad q(t) \quad h(u)\mathrm{d}x \quad q(t)h\left(\frac{1}{| |} u\mathrm{d}x\right)| \ | \quad (t \quad t_0), \tag{7}$$

利用(4)~(7) 和(3), 我们得到

$$\frac{d}{dt}\left[\quad u dx + \quad (t) \quad u(x, t - \quad) dx\right] + p(t) \quad u dx + q(t) h\left(\frac{1}{| \quad |} \quad u dx\right) | \quad | \quad 0$$

$$(t \quad t_0),$$

即由(1)定义的函数 $U(t)$ 是不等式(2) 的正解且有

$$\lim_{t} U(t) \quad 0,$$

此与定理的条件矛盾

若 $u(x, t) < 0$, 令 $u(x, t) = - u(x, t)$, 由条件 $H_5)$, 容易验证 $u(x, t)$ 是问题(E), (B_1) 的一个正解, 此亦与定理的条件矛盾　定理 1 证毕

为研究问题(E), (B_2) 的解, 我们考虑 Dirichlet 问题

$$\left.\begin{array}{ll} u + \quad u = 0 & (x \quad\quad), \\ u = 0 & (x \quad\quad), \end{array}\right\} \tag{8}$$

其中　为常数　由[8] 可知, 问题(8) 的最小特征值 $_0$ 是正数, 且可以选取其相应的特征函数 (x) 也是正的

对于问题(E), (B_2) 的解 $u(x, t)$, 定义函数

$$V(t) = \frac{u(x, t) \quad (x) dx}{(x) dx} \quad (t \quad 0) \tag{9}$$

定理 2　设条件 H) 成立, 若微分不等式

$$\frac{d}{dt}[V(t) + \quad (t) V(t - \quad)] + P(t) V(t) + q(t) h(V(t)) +$$

$$_0(a(t) V(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t) V(\quad_i(t))) \quad 0 \quad (t \quad t_0) \tag{10}$$

的每一最终正解当 t 　时趋于零, 则问题(E), (B_2) 的每一解在 G 内振动, 或者

$$\lim_{t} \quad u(x, t) \quad (x) dx = 0$$

证明　假设不然, 即问题(E), (B_2) 存在一个解 $u(x, t)$ 在 G 内没有零点, 且

$$\lim_{t} \quad u(x, t) \quad (x) dx \quad 0$$

不妨设 $u(x, t) > 0$, 则存在充分大 t_0 使得 $u(x, t - \quad) > 0$, $u(x, \quad_i(t)) > 0$, (x, t) 　 $[t_0, \quad)$, $i = 1, 2, \quad, n$; 对方程(E) 两端乘特征函数 (x), 且关于 x 在　上积分, 得

$$\frac{d}{dt}\left[\quad u \quad (x) dx + \quad (t) \quad u(x, t - \quad) \quad (x) dx\right] +$$

$$p(x, t) u \quad (x) dx + \quad c(x, t, u) \quad (x) dx =$$

$$a(t) \quad u \quad (x) dx + \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \quad u(x, \quad_i(t)) \quad (x) dx \quad (t \quad t_0), \tag{11}$$

利用 Green 公式, 得

$$u \quad (x) dx = \quad \left(\quad \frac{u}{n} - u \frac{}{n}\right) ds + \quad u \quad dx =$$

$$- \quad_0 \quad u \quad (x) dx \quad (t \quad t_0), \tag{12}$$

同理

$$u(x, \quad_i(t)) \quad (x) dx = - \quad_0 \quad u(x, \quad_i(t)) \quad (x) dx \quad (t \quad t_0), \tag{13}$$

由 H_6) 和 Jensen 不等式, 得

$$c(x, t, u) \quad (x)\mathrm{d}x \quad q(t) \quad (x)\mathrm{d}x \quad h\left(\frac{u \quad (x)\mathrm{d}x}{(x)\mathrm{d}x}\right) \quad (t \quad t_0), \tag{14}$$

利用(11) ~ (14), 并注意到 $p(t)$ 的定义, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\quad u \quad (x)\mathrm{d}x + \quad (t) \quad u(x, t - \quad) \quad (x)\mathrm{d}x\right] +$$

$$p(t) \quad u \quad (x)\mathrm{d}x + q(t) \quad (x)\mathrm{d}x \quad h\left(\frac{u \quad (x)\mathrm{d}x}{(x)\mathrm{d}x}\right)$$

$$- \quad {}_0 a(t) \quad u \quad (x)\mathrm{d}x - \quad {}_0 \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \quad u(x, \quad {}_i(t)) \quad (x)\mathrm{d}x \quad (t \quad t_0), \tag{15}$$

由(15) 可知, (9) 所定义的函数 $V(t)$ 是不等式(10) 的正解, 且有 $\lim\limits_{t} V(t) \quad 0$ 此与定理的条件矛盾

$u(x, t) < 0$ 的情况, 类似定理 1 的证明, 亦可推出矛盾 定理 2 证毕

2 边值问题的振动准则

以下我们通过对微分不等式解的振动性研究, 建立边值问题(E), (B_1) 和(E), (B_2) 的振动准则

由定理 1 和定理 2 知, 方程(E) 的解在 G 内振动的充分条件可以归结为下列非线性中立型微分不等式的振动性质的研究

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t) + \quad (t)x(t - \quad)] + \quad (t)x(t) + \sum_{i=1}^{n} \quad {}_i(t)x(\quad {}_i(t)) + \quad (t)h(x(t)) \quad 0 \quad (t \quad t_0), \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t) + \quad (t)x(t - \quad)] + \quad (t)x(t) + \sum_{i=1}^{n} \quad {}_i(t)x(\quad {}_i(t)) + \quad (t)h(x(t)) \quad 0 \quad (t \quad t_0), \tag{17}$$

与(16), (17) 相应的我们可考虑下列中立型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t) + \quad (t)x(t - \quad)] + \quad (t)x(t) + \mathop{E}_{i=1}^{n} A_i(t)x(R_i(t)) + B(t)h(x(t)) = 0 \quad (t \setminus t_0) \# \tag{18}$$

定义 2 方程(18) 的解 $x(t)$ 称为振动的, 如果存在满足 $\lim\limits_{t y]} t_n =]$ 的 $\{t_n\}$ 使得 $x(t_n) = 0\#$

我们首先给出下面一个引理#

引理[5] 设下列条件成立

) $x(t) \ I \ C([t_0,]), R_+)$,

) $K(t) \ I \ C([t_0,]), R), 0 < K_1 [\ K(t) [\ K_2$, K_1, K_2 为常数,

) $x(t) + K(t)x(t - S) \setminus k, S > 0, k > 0$,

则存在集合 $E < [t_0,])$ 和常数 $k_1 > 0$ 使得

$$x(t) \setminus k_1, t \ I \ E; \quad \mathrm{meas}(E \ H [t, t + 2S]) \setminus S, t \setminus t_0 \#$$

定理 3 设下列条件成立

A1) $p(t)\in C^1([t_0,\infty),R)$, $0<p_1\le p(t)\le p_2$, p_1, p_2 为常数,

A2) $\sigma_i(t)\in C^2([t_0,\infty),R)$, $\sigma_i(t)\le t$, $\lim_{t\to\infty}\sigma_i(t)=\infty$, 且 $\sigma_i(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上非减, $i=1, 2, \dots, n$,

A3) $A(t), A_i(t)\in C([t_0,\infty),R_+)$; $B(t)\in C([t_0,\infty),(0,\infty))$; $i=1,2,\dots,n$,

A4) $h(u)\in C(R,R)$, $h(-u)=-h(u)$, 其中 $h(u)$ 是 $(0,\infty)$ 上正的单增函数,

A5) 对任一闭可测集 $E\subset[t_0,\infty)$, 且 $\mathrm{meas}(E\cap[t,t+2\tau])\ge\tau$, $t\in[t_0,\infty)$ 有下列条件成立,

$$\int_E B(t)\,\mathrm{d}t=\infty, \tag{19}$$

则有

i) 不等式(16)的每一最终正解当 $t\to\infty$ 时趋于零;

ii) 不等式(17)的第一最终负解当 $t\to\infty$ 时趋于零;

iii) 方程(18)的每一解振动, 或者趋于零。

证明 (i) 设 $x(t)$ 是不等式(16)的最终正解, 则存在 $t_1\ge t_0$, 使得当 $t\ge t_1$ 时, $x(t)>0$, $x(t-\tau)>0$ 和 $x(\sigma_i(t))>0$。 由不等式(16), 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)+p(t)x(t-\tau)]\le 0 \qquad (t\ge t_1),$$

因此 $x(t)+p(t)x(t-\tau)$ 在 $[t_1,\infty)$ 上是单调减函数。 再由 $x(t)+p(t)x(t-\tau)>0$, $t\ge t_1$, 我们有

$$\lim_{t\to\infty}[x(t)+p(t)x(t-\tau)]=C\ge 0, \tag{20}$$

若 $C>0$, 则存在 $t_2\ge t_1$ 使得当 $t\ge t_2$ 时有

$$x(t)+p(t)x(t-\tau)\ge\frac{C}{2}>0.$$

因而由引理可知, 存在闭可测集 $E\subset[t_2,\infty)$ 和常数 $C_1>0$ 使得

$$x(t)\ge C_1\quad(t\in E);\qquad \mathrm{meas}(E\cap[t,t+2\tau])\ge\tau\quad(t\ge t_2),$$

由条件(A4), 得 $h(x(t))\ge h(C_1)=C_2>0$, $t\in E$

从 t_2 到 t 对不等式(16)积分, 得

$$\begin{aligned}
C_2\int_{E\cap[t_2,t]}B(s)\,\mathrm{d}s &\le \int_{t_2}^{t}B(s)h(x(s))\,\mathrm{d}s\le\\
&x(t_2)+p(t_2)x(t_2-\tau)-[x(t)+p(t)x(t-\tau)]-\\
&\int_{t_2}^{t}A(s)x(s)\,\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}A_i(s)x(\sigma_i(s))\,\mathrm{d}s\le\\
&x(t_2)+p(t_2)x(t_2-\tau)=C_3.
\end{aligned}\tag{21}$$

令 $t\to\infty$, 由不等式(21)得 $\int_E B(t)\,\mathrm{d}t<\infty$, 此与条件(19)矛盾, 因而有 $C=0$, 即 $\lim_{t\to\infty}[x(t)+p(t)x(t-\tau)]=0$, 由此可知 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$。 结论(i)证毕。

ii) 注意到若 $x(t)$ 是微分不等式(17)的最终负解, 则 $-x(t)$ 是不等式(16)的最终正解。 因而由 i) 即可得结论 ii)。

iii) 由结论 i) 和 ii) 可知结论 iii) 成立。 定理3证毕。

由定理3, 容易得到下面的定理。

定理4 设条件H) 和 A_4) 成立# 如果对任一闭可测集 $E < [t_0,])$, 且meas$(E\ H[t, t + 2S])\ \backslash\ S, t\ I\ [t_0,])$ 有下列条件成立

$$Q_E q(t)\mathrm{d}t = \ ] , \tag{22}$$

则问题(E) , (B_1) 的每一个解 $u(x, t)$ 在 G 内振动, 或

$$\lim_{t y]Q_8} u(x, t)\mathrm{d}x = 0\#$$

定理5 设定理4的条件成立, 则问题(E) , (B_2) 的每一个解 $u(x, t)$ 在 G 内振动, 或

$$\lim_{t y]Q_8} u(x, t)\ 5(x)\mathrm{d}x = 0\#$$

[参 考 文 献]

[1] Wu J H. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations[M]. New York: Springer, 1996.

[2] Georgiou D, Kreith K. Functional characteristic initial value problems[J]. J Math Anal Appl, 1985, 107: 414~ 424.

[3] Mishiev D P, Bainov D D. Oscillation of the solutions of parabolic differential equations of neutral type[J]. Appl Math Comput, 1988, 28: 97~ 111.

[4] Yoshida N. Oscillation of nonlinear parabolic equations with functional arguments[J]. Hiroshima Math J, 1986, 16: 305~ 314.

[5] Zahariev A I, Bainov D D. Oscillating properties of the solutions of a class of neutral type functional differential equations[J]. Bull Austral Math Soc, 1980, 22(3): 365~ 372.

[6] Fu X L, Liu X Z. Oscillation criteria for a class of nonlinear neutral parabolic partial differential equations[J]. Appl Anal, 1995, 58: 215~ 218.

[7] Lin S Z, Yu Y H. On the oscillations solutions of parabolic differential equations of neutral type[J]. Demonstrate Math, 1996, 3: 603~ 614.

[8] Vladimirov V S. Equations of Mathematical Physics[M]. Moscow: Nauka, 1981.

Oscillation of Solutions for a Class of Nonlinear Neutral Parabolic Differential Equations Boundary Value Problem

Wang Peiguang

(Department of Mathematics, Hebei University, Baoding, Hebei 071002, P R China)

Abstract: A class of nonlinear neutral partial differential equations was considered, and some oscillation criteria for such equations subject to two different boundary value conditions are established.

Key words: parabolic equation; boundary value problem; oscillation