应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 05_0541_00

多项式系统的类旋转向量场*

沈伯骞

(辽宁师范大学 数学系, 大连 116029)

(张鸿庆推荐)

摘要: 构造了一类依赖于某一参数 δ 的多项式系统, 位于此系统的向量场中的多个相邻的单重极限环可以随 δ 的单调变化而同时扩大(或缩小), 不过这时极限环的扩大(或缩小) 不一定是单调的• 由于这种向量场类似于旋转向量, 故称此系统的这些极限环关于 δ 形成“ 类旋转向量场”, 它们可以作为研究重环和分界线环分支的一种有效工具•

关 键 词: 多项系统; 类旋转向量场; 极限环; Poincar 分支
中图分类号: O175 文献标识码: A

1 引言•类旋转向量场的定义

一个位于依赖于参数 α 的多项式系统的旋转向量场中的极限环, 当参数 α 单调变化时, 此极限环将会随之扩大(或缩小)• 但是在旋转向量场中多个相邻的极限环却不能随参数 α 的单调变化而同时扩大(或缩小)• 本文藉多项式系统的 Poincar 分支之助, 给出这样一类依赖于某一参数 δ 的多项式系统, 使得此系统多个相邻的极限环却可以随此参数 δ 的单调变化而同时扩大(或缩小)• 但这时极限环的扩大(或缩小) 不是严格单调的• 我们给出以下的定义•

定义 1 设 Γ_δ 是依赖于参数 δ 的多项式系统的向量场中的一个极限环, 它位于一条闭曲线 C_δ 的充分小领域内• 如果 C_δ 随 δ 的单调变化而单调扩大(或缩小), 而此极限环 Γ_δ 却始终位于 C_δ 的充分小邻域内, 则称此极限环 Γ_δ 是随 δ 的单调变化而扩大(或缩小) 的• 因为此向量场与旋转向量场相似, 所以我们称此多项式系统的极限环 Γ_δ 关于 δ 形成“ 类旋转向量场”•

2 类旋转向量场中多个极限环的实例

我们只考虑如下的三次系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} = {} & -y + x^2 + \mu(a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3 + a_5x^2 + a_6xy + {} \\ & a_7y^2 + a_8x + a_9y + a_{10}), \\ \dot{y} = {} & x(1+y) + \mu(b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5x^2 + b_6xy + {} \\ & b_7y^2 + b_8x + b_9y + b_{10})\bullet \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

在系统(1) 的两个方程右端同乘以 $1/(1+y)^3$ 得

* 收稿日期: 1997_10_18; 修订日期: 1999_11_08
作者简介: 沈伯骞(1932~) , 男, 教授.

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{-y+x^2}{(1+y)^3}+\frac{\mu}{(1+y)^3}(a_1x^3+a_2x^2y+a_3xy^2+a_4y^3+a_5x^2+a_6xy+\\&\quad a_7y^2+a_8x+a_9y+a_{10}),\\ \dot{y} &= \frac{x}{(1+y)^2}+\frac{\mu}{(1+y)^3}(b_1x^3+b_2x^2y+b_3xy^2+b_4y^3+b_5x^2+b_6xy+\\&\quad b_7y^2+b_8x+b_9+b_{10})\cdot\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

系统(2)当 $\mu=0$ 时是 Hamilton 系统, Hamilton 函数为

$$H(x,y)=\frac{2y-x^2+1}{(1+y)^2}=h\cdot\tag{3}$$

当 $h=0$ 时, (3) 表示抛物线 $2y-x^2+1=0$;

当 $h=1$ 时, (3) 表示一个孤立点 $0(0,0)$;

当 $0<h<1$ 时, (3) 表示位于抛物线内部围绕点 $0(0,0)$ 的闭曲线族·

为了讨论系统(2)可能出现极限环的个数, 按 Poincare 分支理论[1]来讨论以下函数

$$A(h)=\iint_{D(h)}(P_{x\mu}+Q_{y\mu})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

在区间 $0<h<1$ 内可能出现零点的个数· 这里 $D(h)$ 表示闭曲线(3)所围区域· 计算 $A(h)$ 得

$$\begin{aligned}A(h)=\iint_{D(h)}\Big\{&\frac{1}{(1+y)^3}[3a_1x^2+2a_2xy+a_3y^2+2a_5x+a_6y+a_8+b_2x^2+\\&2b_3xy+3b_4y^2+b_6x+2b_7y+b_9]-\frac{3}{(1+y)^4}[b_1x^3+b_2x^2y+b_3xy^2+\\&b_4y^3+b_5x^2+b_6xy+b_7y^2+b_8x+b_9y+b_{10}]\Big\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\cdot\end{aligned}$$

注意到区域 $D(h)$ 关于 y 轴对称, 所以

$$\begin{aligned}A(h)=\iint_{D(h)}\Big\{&\frac{1}{(1+y)^3}[(3a_1+b_2)x^2+(a_3+3b_4)y^2+(a_6+2b_7)y+\\&(a_8+b_9)]-\frac{3}{(1+y)^4}[b_2x^2y+b_4y^3+b_5x^2+b_7y^2+b_9y+b_{10}]\Big\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\\&\int_{y_1}^{y_2}\Big\{\left[\left(-2a_1+\frac{4}{3}b_2\right)h+2a_3\right]\frac{1}{1+y}+[(2b_5-2b_2)h-4a_1-\frac{8}{3}b_2+\\&2a_6-2b_7-4a_3+6b_4]\frac{1}{(1+y)^2}+\left[-2a_1+\frac{16}{3}b_2+2a_8-4b_9+\right.\\&\left.2a_3-12b_4-2a_6+8b_7-4b_5\right]\frac{1}{(1+y)^3}+[-2b_2-6b_{10}+6b_4-\\&6b_7+6b_9+2b_5]\frac{1}{(1+y)^4}\Big\}\sqrt{1+2y-h(1+y)^2}\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

这里 $y_1=-1+\frac{1}{h}-\frac{\sqrt{1-h}}{h}$, $y_2=-1+\frac{1}{h}+\frac{\sqrt{1-h}}{h}$, 设

$$\alpha=-2a_1+\frac{4}{3}b_2,\quad \beta=2a_3,\quad \gamma=2b_5-2b_2,$$

$$\delta=4a_1-\frac{8}{3}b_2+2a_6-2b_7-4a_3+6b_4,$$

$$\xi=-2a_1+\frac{16}{3}b_2+2a_8-4b_9+2a_3-12b_4-2a_6+8b_7-4b_5,$$

$$\eta = -2b_2 - 6b_{10} + 6b_4 - 6b_7 + 6b_9 + 2b_5,$$

$$A(h) = \alpha h I_1(h) + \beta I_1(h) + \gamma h I_2(h) + \delta I_2(h) + \xi I_3(h) + \eta I_4(h), \tag{4}$$

这里 $I_n(h) = \int_{y_1}^{y_2} (1+y)^{-n}\sqrt{1+2y-h(1+y)^2}\,\mathrm{d}y \qquad (n = 1, 2, 3, 4)$,

设 $1 + y = z$, 则

$$I_n(h) = \int_{z_1}^{z_2} z^{-n}\sqrt{-h(z-z_1)(z-z_2)}\,\mathrm{d}z,$$

这里 $z_1 = \frac{1}{h}(1-\sqrt{1-h}), z_2 = \frac{1}{h}(1+\sqrt{1-h})$• 再设

$$\sqrt{-h(z-z_1)(z-z_2)} = -t(z-z_2), \text{则}$$

$$I_n(h) = 2h^2(z_2-z_1)^2\int_0^\infty \frac{t^2(t^2+h)^{n-3}}{(z_2t^2+hz_1)^n}\mathrm{d}t,$$

$$I_1(h) = 2h^2(z_2-z_1)^2\int_0^\infty \frac{t^2\mathrm{d}t}{(z_2t^2+hz_1)(t^2+h)^2} =$$

$$2h^2(z_2-z_1)^2\left[-\frac{z_1z_2}{h(z_2-z_1)^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(z_2t^2+hz_1)} + \frac{1}{z_2-z_1}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+h)^2} + \frac{z_1}{h(z_2-z_1)^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+h}\right] =$$

$$-2hz_1z_2\frac{\pi}{2\sqrt{ht_1z_2}} + 2h^2(z_2-z_1)\frac{\pi}{4h\sqrt{h}} + 2hz_1\frac{\pi}{2\sqrt{h}} =$$

$$-\sqrt{h}\frac{1}{\sqrt{h}}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{h}\frac{2\sqrt{1-h}}{h}\pi + \sqrt{h}\left(\frac{1}{h} - \frac{\sqrt{1-h}}{h}\right)\pi =$$

$$\frac{1}{\sqrt{h}}(1-\sqrt{h})\pi\text{•}$$

对于 $I_2(h), I_3(h), I_4(h)$ 都可以用以上同样的方法通过初等积分法计算得

$$I_2(h) = 2h^2(z_2-z_1)^2\int_0^\infty \frac{t^2\mathrm{d}t}{(z_2t^2+hz_1)^2(t^2+h)} = (1-\sqrt{h})\pi\text{•}$$

$$I_3(h) = 2h^2(z_2-z_1)^2\int_0^\infty \frac{t^2\mathrm{d}t}{(z_2t^2+hz_1)^3} = \frac{1}{2}(1-h)\pi\text{•}$$

$$I_4(h) = 2h^2(z_2-z_1)^2\int_0^\infty \frac{t^2(t^2+h)\mathrm{d}t}{(z_2t^2+hz_1)^4} = \frac{1}{2}(1-h)\pi\text{•}$$

计算过程从略• 将以上的 $I_n(h)(n = 1, 2, 3, 4)$ 代入公式(4) 得

$$A(h) = \sqrt{h}(1-\sqrt{h})\pi\alpha + \frac{1}{\sqrt{h}}(1-\sqrt{h})\pi\beta + h(1-\sqrt{h})\pi\gamma +$$

$$(1-\sqrt{h})\pi\delta + \frac{1}{2}(1-h)\pi\xi + \frac{1}{2}(1-h)\pi\eta =$$

$$\frac{1-\sqrt{h}}{\sqrt{h}}\pi\left[\beta + \left(\delta + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta\right)\sqrt{h} + \left(\alpha + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta\right)h + h\sqrt{h}\gamma\right]\text{•}$$

设 $\delta' = \delta + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta, \quad \alpha' = \alpha + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta,$

则

$$A(h)=\frac{1-\sqrt{h}}{\sqrt{h}}\pi(\beta+\delta'\sqrt{h}+\alpha' h+\gamma h\sqrt{h})\qquad(0<h<1)\cdot \tag{5}$$

记
$$\Phi(h)=\beta+\delta'\sqrt{h}+\alpha' h+\gamma h\sqrt{h}\qquad(0<h<1)\cdot \tag{6}$$

因为 $\Phi(h)$ 是关于$\sqrt{h}$ 的三次多项式, 所以 $\Phi(h)$ 在 $0<h<1$ 内至多有三个实零点• 例如对任意给定的 h_1, h_2, h_3:$\{0<h_1<h_2<h_3<1\}$, 令 $\Phi(h_1)=\Phi(h_2)=\Phi(h_3)=0$, 即

$$\left.\begin{aligned}&\beta+\delta'\sqrt{h_1}+\alpha' h_1+\gamma h_1\sqrt{h_1}=0,\\&\beta+\delta'\sqrt{h_2}+\alpha' h_2+\gamma h_2\sqrt{h_2}=0,\\&\beta+\delta'\sqrt{h_3}+\alpha' h_3+\gamma h_3\sqrt{h_3}=0\cdot\end{aligned}\right\}$$

从此方程组可解出 β, δ', α' 得

$$\left.\begin{aligned}&\beta=-\sqrt{h_1h_2h_3}\,\gamma,\\&\delta'=(\sqrt{h_1h_2}+\sqrt{h_2h_3}+\sqrt{h_1h_3})\,\gamma,\\&\alpha'=-(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{h_3})\,\gamma\qquad(\gamma\neq 0)\cdot\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

条件(7)等价于

$$\left.\begin{aligned}&a_3=-\sqrt{h_1h_2h_3}(b_5-b_2),\\&a_b=-3a_1+2b_2-3b_4+b_7+(\sqrt{h_1h_2}+\sqrt{h_2h_3}+\sqrt{h_1h_3}+\sqrt{h_1}+\\&\qquad\sqrt{h_2}+\sqrt{h_3}-2\sqrt{h_1h_2h_3})(b_5-b_2),\\&a_8=-b_9+3b_{10}+(\sqrt{h_1h_2}+\sqrt{h_2h_3}+\sqrt{h_1h_3}-\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2}-\\&\qquad\sqrt{h_3}-\sqrt{h_1h_2h_3}+1)\cdot(b_5-b_2)\qquad(b_5-b_2\neq 0)\cdot\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

定理 1 在系统(2)中任意给定 h_1, h_2, h_3:$\{0<h_1<h_2<h_3<1\}$, 如果系统(2)中的系数满足条件(8), 则当 $0<|\mu|\ll 1$ 时, 此系统的 Poincare 分支恰好出现三个极限环, 它们分别位于三条闭曲线

$$\frac{2y-x^2+1}{(1+y)^2}=h_i\qquad(i=1,2,3) \tag{9}$$

的充分小领域内•

证 因为 $\Phi(h)$ 是关于$\sqrt{h}$ 的三次多项式, 所以知道当条件(7)成立时, 方程 $A(h)=0$ 在 $0<h<1$ 内恰好存在三个单实根 $h=h_i(i=1,2,3)$• 即 $A(h_i)=0$, $A'(h_i)\neq 0$, 根据文[1]中的推论, 系统(2)当 $0<|\mu|\ll 1$ 时, 其 Poincare 分支恰好存在三个单重极限环, 它们分别位于三条闭曲线(9)的充分小邻域内, 又因条件(8)与条件(7)等价, 所以本定理 1 的结论成立•证毕•

设系统(2)(即系统(1)满足条件(8), 令 $h_1=\delta^3$, $h_2=\delta^2$, $h_3=\delta$, $(0<\delta<1)$, 则有 $0<\delta^3<\delta^2<\delta<1$, 系统(1)变成以下形状

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{x} = & -y + x^2 + \mu\{a_1x^3 + a_2x^2y - \sqrt{\delta\delta^2\delta^3}(b_5 - b_2) \times y^2 + a_4y^3 + \\
& a_5x^2 + [-3a_1 + 2b_2 - 3b_4 + b_7 + (\sqrt{\delta\delta^2} + \sqrt{\delta^2\delta^3} + \sqrt{\delta\cdot\delta^3} + \\
& \sqrt{\delta} + \sqrt{\delta^2} + \sqrt{\delta^3} - 2\sqrt{\delta\delta^2\delta^3})(b_5 - b_2)]xy + a_7y^2 + [-b_9 + \\
& 3b_{10} + (\sqrt{\delta\delta^2} + \sqrt{\delta^2\delta^3} + \sqrt{\delta\delta^3} - \sqrt{\delta} - \sqrt{\delta^2} - \sqrt{\delta^3} - \\
& \sqrt{\delta\delta^2\delta^3} + 1)(b_5 - b_2)]x + a_9y + a_{10}\}, \\
\dot{y} = & x(1 + y) + \mu\{b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5x^2 + \\
& b_6xy + b_7y^2 + b_8x + b_9y + b_{10}\} \qquad (b_5 - b_2 \neq 0).
\end{aligned}\right\} \tag{10}
$$

由定理 1 可知当 $0 < |\mu| \ll 1$ 时, 系统(10) 的 Poincare 分支恰好出现三个极限环, 它们分别位于三条闭曲线

$$
\frac{2y - x^2 + 1}{(1 + y)^2} = \delta^2 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{11}
$$

的充分小领域内. 我们把系统(10) 看作是只依赖于参数 δ 的系统. 有以下定理.

定理 2 对于任意给定的小正数 $\varepsilon > 0$, 当 $0 < |\mu| \ll 1$ 时, 系统(10) 的参数 δ 在闭区间 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 上单调变化时, 系统(10) 的三个极限环关于 δ 形成类旋转向量场, 也就是当 δ 在闭区间 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 上单调增加(或减小) 时, 系统(10) 的这三个极限环将随之同时缩小(或扩大), 且始终不消失.

证 只证括号内的情形. 从定理 1 可知, 在 δ 的参数区间 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 上所取的任意一值 δ_i, 必存在相应的 $\mu_i(>0)$ 值, 使得当 $0 < |\mu| < \mu_i$ 时, 系统(10) 存在三个极限环, 它们分别位于三条闭曲线(11) 的互不重叠的三个小邻域内. 由于 δ_i 的集合 $\{\delta_i\}$ 是闭集 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$; 并注意到单重极限环关于系统(10) 的系数的连续依赖性, 易推知集合 $\{\mu_i\}$ 必存在一个正的下确界 μ_0. 即 $\inf\{\mu_i\} = \mu_0 > 0$. 因此在 $0 < |\mu| < \mu_0$ 的条件下, 系统(10) 当 δ 取 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 上的任一值时均存在着三个单重极限环, 它们分别位于三条闭曲线(11) 的互不重叠的小邻域内. 当 δ 在 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 上单调减小时, 这三条闭曲线(11) 将随之逐渐扩大. 而对应于这三条闭曲线(11) 的互不重叠的三个小邻域也随着逐渐扩大. 而这三个极限环却始终位于这三个小邻域内. 根据定义 1, 这三个极限环都随 δ 的单调减小而扩大, 而且不会消失. 证毕.

3 结 束 语

从以上定理 2 的证明可知系统(10) 的这三个极限环的扩大不一定是单调的. 不妨举一个形象化的比喻. 系统(10) 当 $0 < |\mu| < \mu_0$ 时, 对于每个给定的 $\delta \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$, 三条闭曲线(11) 所对应的环形邻域好比三个环形笼子, 它们互不重叠. 每个环形邻域内的极限环好比关在笼子里的一条首尾相连的蛇. 当 δ 单调减小时, 三个笼子将随 δ 而同时扩大, 笼子里的蛇在笼子里扭动挣扎仍逃不出笼子. 所以极限环的扩大过程不是单调的, 而是像蛇一样挣扎和扭动着扩大的. 单调扩大只不过是极限环扩大过程中的一种极特殊的扩大形式而已.

如果在定理 2 中令 $\varepsilon \to 0$, 即在系统(10) 中令 $\delta \to 0$, 这时系统(10) 变成如下形式

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{x} = & -y + x^2 + \mu[a_1x^3 + a_2x^2y + a_4y^3 + a_5x^2 + (-3a_1 + 2b_2 - 3b_4 + \\
& b_7)xy + a_7y^2 + (-b_2 + b_5 - b_9 + 3b_{10})x + a_9y + a_{10}] \\
\dot{y} = & x(1 + y) + \mu[b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5x^2 + b_6xy + \\
& b_7y^2 + b_8x + b_9y + b_{10}].
\end{aligned}\right\} \tag{12}
$$

实际上系统(12)是具有三阶细分界线环(即能分支出三个极限环)的系统的一个近似系统• 对于具有分界线环的多项式系统,其精确形式一般是写不出来的• 至多只能写出它的近似系统的形式• 以上结论的证明,以及与此类问题相似的重环情形,不是几句话所能说清楚的• 我们将另文予以专门研讨•

类旋转向量场的例子是很容易构造出来的• 而且不必一定是三个极限同时扩大(或缩小),也可以令它们随心所欲地变化• 可以令它们之中的两个或三个重合而出现二重环或三重环;也可以令其中的一个或数个同时扩大而出现分界线形或细分界线环• 尽管所得到的这些重环或分界线环的多项式系统的例子都是近似的,但至少可以证明具有重环或细分界线环的多项式系统是存在的• 正因为这种例子很容易构造,所以它就成了研究重环和细分界线环分支的一种有效工具•

[参 考 文 献]

[1] 叶彦谦,等. 极限环论[M]. 上海:上海科技出版社,1984,85~88.

An Analogue Rotated Vector Field of Polynomial System

Shen Boqian

(Department of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian, Liaoning 116029, P R China)

Abstract: A class of polynomial system was structured, which depends on a parameter δ. When δ monotonous changes, more than one neighbouring limit cycles located in the vector field of this polynomial system can expand (or reduce) together with the δ. But the expansion (or reduction) of these limit cycles is not surely monotonous. This vector field is like the rotated vector field. So these limit cycles of the polynomial system are called to constitute an "analogue rotated vector field" with δ. They may become an effective tool to study the bifurcation of multiple limit cycle or fine separatrix cycle.

Key words: polynomial system; analogue vector field; limit cycle; Poincûre bifurcation