应用数学和力学, 第 21 卷 第 5 期(2000 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 05_0547_04

关于符号矢量法的理解、问题和建议以及对 Gibbs 符号的辩护*

盛克敏, 薛正庭, 唐晋生, 黄雪梅

(西南交通大学, 成都 610031)

(戴天民推荐)

摘要: 对戴振铎教授所创立的符号矢量法提出了个人的理解, 基于这些理解, 发现其中仍存在一些缺陷并提出了修正的建议• 还就对 Gibbs 符号的批评作了辩护, 但对其不足之处也提出了一些修正意见•

关 键 词: 符号矢量($\dot{-}$) ; ∇ 算符; 积模型
中图分类号: O151. 2 文献标识码: A

引 言

Gibbs ∇ 算符的' 积模型' 对于笛卡尔坐标系来说是正确的; 但当采用其它正交坐标系时, 就可能导致错误• 历史上已经有过许多学者提出过各种解决办法[1~6], 但都不彻底• 九十年代初, 戴振铎教授提出了符号矢量的概念, 确立了一套系统的、严格的理论[7~10], 引入了新的算符, 从而, 根本上解决了问题•

但是, 在戴振铎教授的理论中, 也或多或少存在着一些缺陷• 对于 Gibbs 的 ∇ 算符的' 积模型' 的批评也有一些偏颇[10~11]• 作者对此提出了看法与修正意见•

1 理 解[7~10]

1) 用了一个积分_比_极限(IRL) 式来定义符号矢量表达式(按本文以下建议, 应为它的值) • 这是无坐标的, 因而也是坐标变换不变的•

2) 由 IRL 定义推导出的微分式是与坐标有关的, 但也是坐标变换不变的, 在某种意义上, 与 IRL 定义等价, 是一种派生的定义•

3) 符号矢量仅仅是一种带有某种矢量性的符号, 并非是一种算符, 其价值只是在 IRL 定义(或微分定义式) 中才能体现出来, 故在矢量分析理论中直接引用不是很方便的•

4) 利用符号矢量可以将矢量分析中所有公式(包括积分定理) 建立在一个严格的、统一的基础上•

5) 特别地推导出了三个关键函数的微分表达式, 并引入了两个(按本文以下建议应为三个) 相应的算符• 这使得整个矢量分析理论仍能以一种简洁的形式出现•

---

* 收稿日期: 1998_08_08; 修订日期: 2000_01_20
作者简介: 盛克敏(1937~) , 男, 教授.

2　问题与建议[7~10]

1) 现在, 符号矢量表达式似乎有两种定义• 一种是叙述如何构成一个符号矢量表达式, 另一个便是 IRL 定义• 在 IRL 定义式中, 将一个符号矢量表达式定义成一个具体的、不含符号矢量的式子, 逻辑上似欠妥• 一个符号矢量表达式只能等于它自己(或由符号矢量规定所允许的其他符号矢量表达式, 如 ∸• $\boldsymbol{a}$ = $\boldsymbol{a}$ • ∸等), 如何能等于一个不含符号矢量的表达式?右边的极限是不是符号矢量表达式?如果是, 为何其中不含符号矢量?如果不是, 怎么能够将两个性质不同的式子相等起来呢?因此, 建议将 IRL 定义式改成如下形状:

$$v(T\,∸) = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_S T(\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S}{\Delta V}, \tag{1}$$

其中 v 是值 value 的意思(当然也可用其它符号)• 这样, 一个符号矢量表达式的值等于一个极限式就没有什么问题了• 此时, 我们可以写出 v(∸f) = ∴f, 而不是象戴教授的书中给出的那样, 写成 ∸f = ∴f 等等• 这里, 等式的右端等于一个普通函数表达式是合理的, 因为 ∴ 是一个算符, 而左端则不合理, 因为 ∸ 不是一个算符•

2) 若将单独一个符号矢量也看作一个特殊的符号矢量表达式, 如果有 T(∸) = ∸ 代入原来的定义式, 则会得到 T(∸) = ∸ = 0 这也是与符号矢量表达式的定义矛盾的(式中不含符号矢量)• 用现在的表示法, 则为 v(T(∸)) = v(∸) = 0, 就没有矛盾了•

3) 一般地说, 单一函数、函数和以及函数积均可视为表达式, 又考虑到 2) , 为将单一函数以及函数之和的情形排除, 以避免混淆, 建议将符号矢量和符号矢量表达式本身的定义(构成) 改成:“ 在一个含有至少两个函数并其中至少含有一个矢量的、合理的积矢量表达式中, 用一个带有矢量性质的符号, 记为 ∸, 来代替(或分别代替) 其中一个(或多个) 矢量, 这个符号就称为符号矢量, 替代后得到的表达式称为符号矢量表达式• ” 也可避免 v(∸) = 0 的无意义结果• 在戴振铎教授的 GVDA[8] 一书中, 未见直截了当的叙述, 建议补入•

4) 在戴振铎教授所创立的符号矢量法理论中, 导出了 3 个关键函数的微分表达式并采用了两个新的算符来表示矢量的散度的旋度, 而对于标量的梯度则仍用 Gibbs 原来的记号• 在符号矢量法中, 从原始定义出发, 推出了梯度和微分表达式, 发现它可以表示成一个算符作用到一个标量上所得到的结果, 这个算符就用一个记号来表示, 顺理成章• 这个算符的表达式跟 Gibbs 原来的算符的表达式是一样的, 于是, 也就沿用了 Gibbss 原来的记号• 但是, Gibbs ∴符号是原来有了结果, 在笛卡尔座标系内, 反凑出来的一个算符, 并给它一个记号, 就是 ∴• 两者似乎还是有些不同• 为了符号矢量法本身的完整性与独立性, 最好换用一个不同的记号• 建议是否可以用‘ ∴̊ ’, 中间的‘ 0’ 表示‘ 零积’ (即戴教授的 null)• 这也与他的另外两个新算符∴•和∴×形式上有某种对称• 戴教授的∴̊是专对梯度而言的, 而 Gibbs 的∴则一般地也可应用于散度和旋度• 例如, 我们可以有 ∴ • ∴f = ∴^2f, 但不能写成 ∴• ∴̊f = ∴^2f, 虽然 ∴̊ 与 ∴ 两种算符实际上是相同的• 我们或许或可以把它表示成 ∴̸•

5) 符号矢量法的引理 2 无法由 IRL 定义式直接推出, 但可由微分表达式自然导出• 在戴振铎教授的 GVDA 一书中[见 8, 第 52 页] 说, 引理 2 的证明可由定义式(4. 79)_(4. 80) 直接导出, (4. 79) 和(4. 80) 分别为

$$T(∸_1, f_1, f_2) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}[T(\boldsymbol{a}_i, f_1, f_2)]_{f_2 = c},$$

$$T(\nabla_2, f_1, f_2) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}[T(\boldsymbol{a}_i, f_1, f_2)]_{f_1 = c},$$

似还应包括(4.78)式, 即

$$T(\nabla, f_1, f_2) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} T(\boldsymbol{a}_i, f_1, f_2),$$

此处或系刊误, 但因比较重要, 故在此一并提出• 若采用本文建议, 所有 T 前均要冠以 v, 即写成, $v(T(\cdots))$• 因为 f_1 和 f_2 有相乘关系, 导出引理 2 就很自然了•

3 辩护与建议

1) Gibbs ∇ 算符的'积模型'作为一种运算工具, 在笛卡儿坐标系中是正确的, 在数学上, 术语的借用, 多有先例• 例如, 在群的定义中就有元素的积的概念: 一种操作称为一个元素, 两种操作(两个元素)顺次连续作用的总效果看作一种操作也是一个元素, 称为此两个元素的积• 在此, 将一个算符作用到一个函数上得到的结果称为积有何不可? 对应于三个方向上的这样三个积之和借用术语'点积'也应该是可以的• 既是借用, 对其加一些限制, 例如, 规定它放在函数之前表示进行运算, 放在函数之后表示一个'饿算子', 当然也可以•

2) 在利用'积模型'时, 例如对散度来说, 先取上述三个分量'积', 这是点积运算的一部分, 再取导数, 是微分运算, 最后, 把上述三个积相加又是点积运算, 所以很难说哪个先哪个后, 所以也谈不上交换两种运算次序的问题, 即并无'应用不存在命题• $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}$•'之误• 两种运算应该看作是同时进行• 此种误解的来源是由于将点积公式写成了利用求和号的横列式的缘故• 至于将此种运算 2+ × 3 相比[11], 因为四则运算是排它的, 根本不存在这样的算式, 直接拿来与之相比, 加以批评, 也是不公平的•

3) 在笛卡儿座标系以外的坐标系中, Gibbs ∇ 算符的'积模型'确是错误的• 则可以采用戴教授的新算符作为一种推广, 可称'广义积模型', 因为在新算符中确有点积或叉积的意义在内• 当将其应用到笛卡儿坐标时, 它又回到 Gibbs 的'积模型'•

4 结 论

1) 以符号矢量 ∇ 概念和 IRL 定义为基础的符号矢量法是一套完整、严格的理论•

2) 由 IRL 定义推出的三个关键函数的微分表达式也是严格的, 三个新算符的表达式在任意坐标系中是不变的•

3) Gibbs 的'积模型'在笛卡儿坐标系中是正确的, 数学上并无矛盾•

4) 戴教授的新算符 $\nabla\cdot$ 与 $\nabla\times$, 可以作为 Gibbs 符号的推广, 可称为广义 Gibbs 符号或与 ∇ 一起统称 Gibbs_戴符号•

5) Gibbs_戴符号, 由于其严格性、简洁性, 引入矢量分析、电磁理论的书籍及有关论文中是合适的•

[参 考 文 献]

[1] Heaviside O. Electromagnetic Theory[M]. New York: Chelsea Publishing Company, 1971.

[2] Sommerfeld A. Electromagnetics[M]. New York: Academic Press, 1952.

[3] ÀÉº ¿ . ¶¼ÄÀÂ¿À¶ Ãº ¿Ã½¶¿º¶ ±É ±½± ¶¿¹ÀÂ¿À´À Ãº ¿Ã½¶¿º¶[M]. ÀÃ¼³ ± ¹µ , 1951.(有中译本, H. E 柯青. 向量计算及张量计算初步[M]. 史福培译. 上海: 商务印书馆出版,

1954).
[4] Feynman Richard P, Leighton Robert B, Sands Matthew. The Feynman Lectures on Plysics [M]. Reading MA: Addison Wesley, 1964. (有中译本: Feynman R P, Leighton R B, Sands M. 费曼物理学讲义[M]. 王子辅译, 上海: 上海科学技术出版社, 1981).
[5] 华罗庚. 高等数学引论(第一卷第二分册)[M]. 北京: 科学出版社, 1979.
[6] 方能航. 矢量、并矢分析与符号运算法[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
[7] Tai C T, Fang N H. A systematic treatment of vector analysis[J]. IEEE Trans on Edu, 1991, **34**(2): 167~ 174.
[8] Tai C T. Generalized Vector and Dyadic Analysis [M]. New York: IEEE Press, 1992.
[9] 戴振铎. 散度、旋度和梯度的统一定义[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(1): 1~ 6.
[10] 戴振铎, 鲁述. 电磁理论中的并矢格林函数[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1995.
[11] Tai C T. Another matter of histor[J]. Antenna and Propagation Magazine, 1991, **33**(1): 21~ 26.

The Comprehension, Some Problems and Suggestions to Symbolic Vector Method and Some Defenses for Gibbs' Symbol

Sheng Kemin, Xue Zhenting, Tang Jinsheng, Huang Xuemei
(Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P R China)

Abstract: The comprehension of Prof. Tai's symbolic vector method in vector analysis is presented, some problems are found and some suggestions are provided to solve them. Some defenses for Gibbs' symbol have been made as well.

Key words: symbolic vector($\dot{-}$); operator; vector product model