应用数学和力学,第21卷 第4期(2000年4月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号:1000-0887(2000)04-0389-04

空间最佳 N 冲击过渡的伴随系统积分*

吴玉良

(大连理工大学 工程力学系,大连 116023)

(钟万勰推荐)

摘要: 推出了发动机点火过程中空间最佳 N 冲击过渡(时间任意)的伴随系统在所选5维相空间中的积分.

关 键 词: 伴随系统; 冲击过渡; 正则变换;
中图分类号: V412.4; O232 **文献标识码:** A

Breakwell 所建立的极值曲线法[1],在解决平面椭圆轨道间的最佳冲击过渡问题时,是一种有力的数值手段. Moyer 用这种方法验证了平面内圆与椭圆轨道间的最佳过渡结果[2]. 得到伴随系统在发动机点火过程中的积分,是把这种方法推广到空间的关键环节. 本篇文章推出了伴随系统在所选5维相空间中的一种积分.

选择轨道坐标元素 $\mathscr{E}$、$\boldsymbol{h}$、$\boldsymbol{e}$ 为轨道参数时,在 $\mathscr{E}$、$\boldsymbol{h}$、$\boldsymbol{e}$ 之间有两个约束方程

$$\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{e} = 0, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{e}^2 = 1 + 2\mathscr{E}\boldsymbol{h}^2/\mu^2, \tag{2}$$

其中 $\mathscr{E}$ 为系统能量,$\boldsymbol{h}$ 为角动量矢量,$\boldsymbol{e}$ 为偏心率矢量,μ 为万有引力常数. 由上两式可得变分约束方程为

$$\boldsymbol{h}\cdot\delta\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}\cdot\delta\boldsymbol{h} = 0, \tag{3}$$

$$\mu^2\boldsymbol{e}\cdot\delta\boldsymbol{e} = \boldsymbol{h}^2\delta\mathscr{E} + 2\mathscr{E}\boldsymbol{h}\cdot\delta\boldsymbol{h}. \tag{4}$$

在下面推导中,我们采用下列直角坐标系,以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为单位矢量的运动坐标系,以 $\boldsymbol{\xi}$、$\boldsymbol{\eta}$、$\boldsymbol{\zeta}$ 为单位矢量的相对坐标系,和以 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$、$\boldsymbol{Z}$ 为单位矢量的绝对坐标系,并选择如下5个参数 $L = \ln h$、e、ω、ϕ、Ω 确定椭圆轨道. 各参数及各坐标系单位矢量的意义见图1.

这样,由状态参数 $\mathscr{E}$、$\boldsymbol{h}$、$\boldsymbol{e}$ 到状态参数 h、e、ω、ϕ、Ω 的正则变换可以写成

$$\begin{aligned} & p_{\mathscr{E}}\delta\mathscr{E} + \boldsymbol{p}_h\cdot\delta\boldsymbol{h} + \boldsymbol{p}_e\cdot\delta\boldsymbol{e} - H\delta t = \\ & \quad p_h\delta h + p_e\delta e + p_\omega\delta\omega + p_\phi\delta\phi + p_\Omega\delta\Omega - H_t\delta t. \end{aligned} \tag{5}$$

由于 t 是独立的,有 $H_t = H$,再由(4)式,有

$$\delta\mathscr{E} = (\mu^2\boldsymbol{e}\cdot\delta\boldsymbol{e} - 2\mathscr{E}\boldsymbol{h}\cdot\delta\boldsymbol{h})/\boldsymbol{h}^2.$$

代入(5)式,得

$$\left(p_{\mathscr{E}}\frac{\mu^2}{\boldsymbol{h}^2}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{p}_e\right)\cdot\delta\boldsymbol{e} + \left(\boldsymbol{p}_h - 2p_{\mathscr{E}}\mathscr{E}\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{h}^2}\right)\cdot\delta\boldsymbol{h} =$$

* 收稿日期: 1997-04-08; 修订日期: 1998-10-26
作者简介: 吴玉良(1944~),男,副教授.

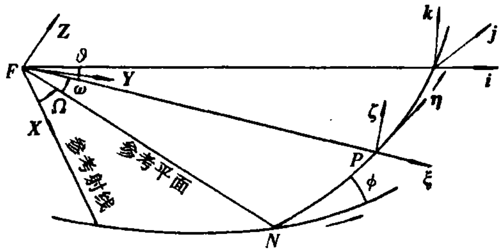

图 1

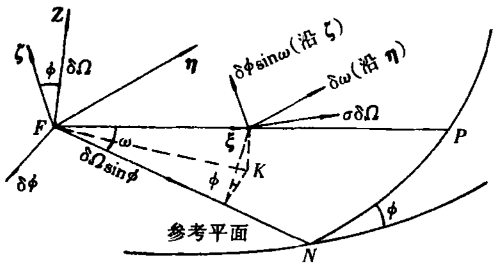

图 2

$$p_h\delta h + p_e\delta e + p_\omega\delta\omega + p_\phi\delta\phi + p_\Omega\delta\Omega. \tag{6}$$

由于

$$\boldsymbol{e} = e\boldsymbol{\xi}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{h} = h\boldsymbol{\zeta}, \tag{8}$$

有

$$\delta\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\xi}\delta e + e\delta\boldsymbol{\xi}, \tag{9}$$

$$\delta\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\zeta}\delta h + h\delta\boldsymbol{\zeta}. \tag{10}$$

在图 2 中，K 为从 $\boldsymbol{\xi}$ 端点向参考平面所引垂线的垂足．从图中可以看出，$\delta\boldsymbol{\zeta}$ 由两个分量构成，其一在瞬时轨道平面内，垂直于节线，大小为 $\delta\phi$，其二沿着节线，大小为 $\delta\Omega\sin\phi$. 将此二分量沿 $\boldsymbol{\xi}$、$\boldsymbol{\eta}$ 方向分解，得

$$\delta\boldsymbol{\zeta} = (-\sin\omega\delta\phi + \sin\phi\cos\omega\delta\Omega)\boldsymbol{\xi} - (\cos\omega\delta\phi + \sin\phi\cos\omega\delta\Omega)\boldsymbol{\eta}. \tag{11}$$

$\delta\boldsymbol{\xi}$ 由三个分量构成，其一在瞬时轨道平面内，垂直于长半轴，大小为 $\delta\omega$，其二垂直于 FK 且平行于参考平面，大小为 $\sigma\delta\Omega$，其三垂直于瞬时轨道平面，大小为 $\sin\omega\delta\phi$. 将此三分量沿 $\boldsymbol{\eta}$、$\boldsymbol{\zeta}$ 分解，得

$$\delta\boldsymbol{\xi} = (\delta\omega + \sigma\tau\delta\Omega)\boldsymbol{\eta} + (\sin\omega\delta\phi - \sigma\lambda\delta\Omega)\boldsymbol{\zeta},$$

其中

$$\sigma = \sqrt{1 - \sin^2\omega\sin^2\phi},\ \tau = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\phi\cos^2\omega}},\ \lambda = \frac{\cos\omega\tan\phi}{\sqrt{1 + \tan^2\phi\cos^2\omega}}.$$

但是，上面三个量有下面简单关系

$$\sigma\tau = \cos\phi,\ \sigma\lambda = \cos\omega\sin\phi.$$

所以，$\delta\boldsymbol{\xi}$ 最后可以写成

$$\delta\boldsymbol{\xi} = (\delta\omega + \cos\phi\delta\Omega)\boldsymbol{\eta} + (\sin\omega - \sin\phi\cos\omega\delta\Omega)\boldsymbol{\zeta}. \tag{12}$$

将(11)、(12)式代入(9)、(10)两式，便得到

$$\delta\boldsymbol{e} = \delta e\boldsymbol{\xi} + e(\delta\omega + \cos\phi\delta\Omega)\boldsymbol{\eta} + e(\sin\omega\delta\phi - \sin\phi\cos\omega\delta\Omega)\boldsymbol{\zeta}, \tag{13}$$

$$\delta\boldsymbol{h} = h(-\sin\omega\delta\phi + \sin\phi\cos\omega\delta\Omega)\boldsymbol{\xi} + h(-\cos\omega\delta\phi - \sin\phi\sin\omega\delta\Omega)\boldsymbol{\eta} + \delta h\boldsymbol{\zeta}. \tag{14}$$

将(13)、(14)式代入(6)式，并利用

$$\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{p}_h = 0, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{p}_e = 0 \tag{16}$$

两式，再由 δh、δe、$\delta\omega$、$\delta\phi$、$\delta\Omega$ 的相互独立性，便得到

$$p_h = -2\mathscr{E}p_{\mathscr{E}}/h, \tag{17}$$

$$p_e = p_{e\xi} + \mu^2 p_{\mathscr{E}} e/h^2, \tag{18}$$

$$p_\omega = e p_{e\eta}, \tag{19}$$

$$p_\phi = h(p_{h\xi}\sin\omega + p_{h\eta}\cos\omega), \tag{20}$$

$$p_\Omega = e p_{e\eta}\cos\phi + h\sin\phi(p_{h\xi}\cos\omega - p_{h\eta}\sin\omega), \tag{21}$$

其中 $p_{e\xi}$、$p_{e\eta}$、$p_{h\xi}$、$p_{h\eta}$ 分别为 $\boldsymbol{p}_e$、$\boldsymbol{p}_h$ 在 $\boldsymbol{\xi}$、$\boldsymbol{\eta}$ 方向上的投影． 当选 L 为状态参数时，(17) 式由下式代替

$$P_L = -2\mathscr{E} p_{\mathscr{E}}. \tag{22}$$

我们知道，对任意弧段，有矢量积分

$$\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{p}_h + \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{p}_e = \boldsymbol{A}(\text{常矢}). \tag{23}$$

对弹道弧，奇异弧及内冲击型冲击，有数量积分

$$-p_C C - 2\mathscr{E} p_{\mathscr{E}} = Hu - 2\mathscr{E} p_{\mathscr{E}} = B(\text{常量}), \tag{24}$$

其中 $u = C/\mu$，而 C 是特征速度，H 是以 u 为独立变量时的哈米顿函数． 另外，还有变换式

$$h^2 \boldsymbol{p}_h = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{h}, \tag{25}$$

由(23)、(25)式并利用(15)、(16)式，得到

$$e p_{e\eta} = A_\zeta, \tag{26}$$

$$h^2 p_{h\xi} = h A_\eta, \tag{27}$$

$$h p_{h\eta} = -A_\xi. \tag{28}$$

将(24)、(26)、(27)、(28)式代入(19)、(20)、(21)、(22)式，保持(18)式不变，得到

$$p_L = B - Hu, \tag{29}$$

$$p_\omega = A_\zeta, \tag{30}$$

$$p_\phi = A_\xi\cos\omega - A_\eta\sin\omega, \tag{31}$$

$$p_\Omega = A_\xi\sin\phi\sin\omega + A_\eta\sin\phi\cos\omega + A_\zeta\cos\phi, \tag{32}$$

$$p_e = p_{e\xi} + \mu^2 p_{\mathscr{E}} e/h^2. \tag{33}$$

注意到 A_ξ、A_η、A_ζ 是在动坐标系中的投影，不是常量，很不方便． 下面利用式

$$\begin{Bmatrix} A_\xi \\ A_\eta \\ A_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{Bmatrix} \tag{34}$$

变换到定坐标系中去，得到伴随系统积分的最终形式为

$$p_L = B - Hu, \tag{35}$$

$$p_\omega = A_X\sin\Omega\sin\phi - A_Y\cos\Omega\sin\phi + A_Z\cos\phi, \tag{36}$$

$$p_\phi = A_X\cos\Omega + A_Y\sin\Omega, \tag{37}$$

$$p_\Omega = A_Z. \tag{38}$$

式(34)中的各元素为

$$\gamma_{11}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}) = \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\sin\phi,$$

$$\gamma_{21}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\eta}) = -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos\phi,$$

$$\gamma_{31}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\zeta}) = \sin\Omega\sin\phi,$$

$$\gamma_{12}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\xi}) = \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega,$$

$$\gamma_{22}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\eta}) = -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos\phi,$$

$$\gamma_{32}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\zeta}) = -\cos\Omega\sin\phi,$$

$$\gamma_{13}(Z,\xi) = \sin\omega\sin\phi,$$
$$\gamma_{23}(Z,\eta) = \cos\omega\sin\phi,$$
$$\gamma_{33}(Z,\zeta) = \cos\phi .$$

伴随系统的最后一个积分 p_e 比较复杂，得到这个积分要用到下面的变换式

$$\boldsymbol{p}_v = p_{\mathscr{E}}\boldsymbol{v} + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{p}_e + \left(\frac{1}{\mu}\boldsymbol{p}_e \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{p}_h\right) \times \boldsymbol{r}, \tag{a}$$

其中 $\boldsymbol{p}_v$ 为速度 $\boldsymbol{v}$ 的伴随矢量，$\boldsymbol{r}$ 为矢径．在冲击点，p_v 达到极大值 1，若令 α、β、γ 分别为 $\boldsymbol{p}_v$ 与 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的夹角，则 $\boldsymbol{p}_v$ 可用 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 表示．将(a)式两边向 $\boldsymbol{\eta}$ 方向投影，可以得到 $\boldsymbol{p}_e$ 在 $\boldsymbol{\xi}$ 方向的投影

$$p_{e\xi} = \Big[\frac{\mu}{h}(\cos\alpha\sin\theta + \cos\beta\cos\theta)(1 + e\cos\theta) - \frac{\mu^2}{h^2}p_{\mathscr{E}}(e + \cos\theta)(1 + e\cos\theta) - \frac{A_\zeta}{e}\sin\theta\cos\theta\Big]/(1 + 2e\cos\theta + \cos^2\theta). \tag{b}$$

在上面过程中用到了 $r = h^2/\mu(1 + e\cos\theta)$，速度在矢径方向上的投影 $v_r = (e\mu/h)\sin\theta$，速度在 $\boldsymbol{j}$ 方向上的投影 $v_\theta = h/r$ 及 $p_{e\eta} = A_\zeta/e$ 等式子．再将(b)式代入(33)式，并利用式(22)及 $\mathscr{E} = -\mu/2a$（a 为长半轴），即可得到

$$p_e = \Big[\frac{\mu}{h}(\cos\alpha\sin\theta + \cos\beta\cos\theta)(1 + e\cos\theta) - \frac{1}{e}\sin\theta\cos\theta(A_X\sin\Omega\sin\phi - A_Y\cos\Omega\sin\phi + A_Z\cos\phi) - (B - Hu)(1 + e)\cos\theta\Big]/(1 + 2e\cos\theta + \cos^2\theta). \tag{39}$$

在时间任意的最佳 N 冲击过渡中，哈米顿函数 $H = \text{const}$，且取极大值．我们正是利用这一点搜寻最佳冲击点，确定最佳冲击方向和最佳冲击值．在这个过程中，利用 $H = \text{const}$，即可计算 p_e 的值．所以，对于伴随系统，有(35)～(38)这 4 个积分式就足够了，(39)式并不是必需的．

[参 考 文 献]

[1] Breakwell J V. Minimum impulse transfer[A]. In: *AIAA Astrodynamics Conference*, New Haven, August ,19-21,1963,No63～416.

[2] Moyer H G. Minimum impulse coplanar circle-ellipse transfer[J]. *AIAA J*,1965,3(4):723～726.

Adjoint System Integrals for Optimal Space N-Impulse Transfer

Wu Yuliang

(*Department of Engineering Mechanics*, *Dalian University of Technology*, *Dalian* 116023, *P R China*)

Abstract: The adjoint system integrals for time free, optimal N-impulse transfer during a firing period in 5-phase selected are derived.

Key words: adjoint system; impulse transfer; regular transform