应用数学和力学,第 21 卷 第 4 期(2000 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号:1000-0887(2000)04-0437-04

映射 $F_p: X \to \|AXB - C\|_p^p$ 的临界点的特征*

杨长森

(河南师范大学 数学系,河南 新乡 453002)

(丁协平推荐)

摘要: 对于 Hilbert 空间上有界线性算子 A、B、C,考虑了当 A 有一个广义逆 A^- 使得 $(AA^-)^* = AA^-$,B 有一个广义逆 B^- 使得 $(B^-B)^* = B^-B$ 时,映射 $F_p: X \to \|AXB - C\|_p^p$ 临界点的特征的一般形式($1 < p < \infty$),推广了 P.J.Maher 的关于 $p = 2$ 时的结果,并指出该定理可推广到多个算子的情形.

关 键 词: 广义逆; 临界点; 极分解;
中图分类号: O177.1 **文献标识码**: A

1 定义与记号

设 H 是 Hilbert 空间,H 上有界线性算子组成空间 $\mathscr{B}(H)$,若 $T \in \mathscr{B}(H)$,并存在一个算子 $T^- \in \mathscr{B}(H)$ 使 $TT^-T = T$ 则称 T^- 为 T 的广义逆. [1] 指出 T 有广义逆当且仅当 T 的值域 ran(T) 闭. R.Penrose 证明[1],若算子方程 $AXB = C$ 有一特解 X_1,且 A、B 有广义逆 A^-、B^- 则这个方程的通解为

$$X = X_1 + L - A^-ALBB^-, \qquad (\forall L \in \mathscr{B}(H)).$$

若 $T^- \in \mathscr{B}(H)$,且 ran(T) 闭,令 $T_0 = T|_{(\ker T)^\perp}$,则 T_0 为 $(\ker T)^\perp$ 到 ran(T) 的一一对应. 且 T_0 有有界逆 T_0^{-1}. 令 Q 为 H 到 ran(T) 上的正交投影,则 $T^+ = T_0^{-1}Q$ 是 T 的一个广义逆,并称为 T 的 Moore-Penrose 逆,T^+ 满足

ⅰ) $TT^+T = T$, ⅱ) $T^+TT^+ = T^+$,

ⅲ) $(TT^+)^* = TT^+$, ⅳ) $(T^+T)^* = T^+T$.

T^+ 是满足 ⅰ) ~ ⅳ) 的唯一算子.

定义 1 若 T^- 满足 ⅰ)、ⅲ)(或 ⅰ)、ⅳ)),则称 T^- 为 T 的 ⅰ)、ⅲ)(或 ⅰ)、ⅳ))逆.

定义 2 设 A 上 H 上的紧有界线性算子,$s_1(|A|), s_2(|A|), \cdots, s_n(|A|), \cdots$ 表示 $|A|$ 的一切特征值按其重数重复的非增排列,若

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^p(|A|) < +\infty,$$

* 收稿日期: 1998-03-23; 修订日期: 1999-11-23
基金项目: 河南省教委基金资助项目(98110012)
作者简介: 杨长森(1965~),男,河南延津人,副教授,博士.

则称 A 在 von Neumann-Schatten$p$ 类中,记为 $A \in c_p$,且

$$\| A \|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i^p(|A|) \right)^{1/p}.$$

定义 3 设 Z_1、Z_2 是 Banach 空间,Ω 为 Z_1 的开子集,$g:\Omega \to Z_2$ 为一映射,$a \in \Omega$,若存在 $\Lambda \in \mathscr{B}(Z_1, Z_2)$ 使

$$\lim_{z_1 \to 0} \frac{\| g(a + z_1) - g(a) - \Lambda z_1 \|}{\| z_1 \|} = 0,$$

则称 Λ 为映射 g 在 a 点的 F- 导数,记为 D_a .

引理 1[2] 设 $c_p \to \mathbf{R}(\forall X \in c_p, X \to \| X \|_p^p)$ 是 F 可微的,且它在 X 处有 F- 导数 D_X:

$$D_X(A) = p\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(|X|^{p-1} U^* A),$$

其中 $X = U|X|$ 为 X 的极分解 .

定义 4 设 $A_i \in \mathscr{B}(H)$,$B_i \in \mathscr{B}(H)$,$C \in \mathscr{B}(H)$,

$$F_p:(X_1, X_2, \cdots, X_n) \to \left\| \sum_{i=1}^{n} A_i X_i B_i - C \right\|_p^p, \qquad (1 < p < +\infty),$$

其中 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 使 $\sum_{i=1}^{n} A_i X_i B_i - C \in c_p$. 称$(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ 是 F_p 的一个临界点,若

(ⅰ) $\sum_{i=1}^{n} A_i V_i B_i - C \in c_p$,

(ⅱ) $\forall S_i \in \mathscr{B}(H)$,只在 $A_i S_i B_i \in c_p$ 就有

$$D_{\sum_{i=1}^{n} A_i V_i B_i - C}(A_i S_i B_i) = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

2 主要结果及证明

P.J.Maher[3]中考虑映射 $F_p: X \to \| AXB - C \|_p^p$ 的临界点,其中 A 有 ⅰ)、ⅲ) 逆 A^-,B 有 ⅰ)、ⅳ) 逆 B^-,且 $X \in \mathscr{B}(H)$ 使 $AXB - C \in c_p$,并证明了,当 $p = 2$ 时,V 是 F_p 的一个临界点当且仅当

$$V = A^- CB^- + L - A^- ALBB^-, \qquad \forall L \in \mathscr{B}(H).$$

对一般 $p > 1$,我们建立下述结果:

定理 1 $A, B, C \in \mathscr{B}(H)$,A 有 ⅰ)、ⅲ) 逆 A^-,B 有 ⅰ)、ⅳ) 逆 B^-,$X \in \mathscr{B}(H)$ 使 $AXB - C \in c_p$,$(p > 1)$,$F_p: X \to \| AXB - C \|_p^p$,则 V 是 F_p 的一个临界点当且仅当

$$V = A^-(C + Q_0)B^- + L - A^- ALBB^-, \qquad L \in \mathscr{B}(H),$$

其中 $Q_0 = U_0 Q_1^{1/(p-1)}$, $Q_1 = | L_1^* - AA^- L_1^* B^- B |$,

且 $L_1^* - AA^- L_1^* B^- B = U_0 | L_1^* - AA^- L_1^* B^- B |$

是极分解.

证明 设 V 是 F_p 的一个临界点,可知对 S 使 $ASB \in c_p$ 有

$$0 = D_{AVB-C}(ASB) = p\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}[|AVB - C|^{p-1} U^*(ASB)], \tag{1}$$

其中 $AVB - C = U|AVB - C|$ 是 $AVB - C$ 的极分解 .

现取 $S = \lambda(f \otimes g)$, 其中 $f, g \in H$, $\lambda \in \mathbf{C}$, 及 $f \otimes g: H \to H (z \to (z, f)g)$ 是一维算子. 由

$$f \otimes g \in c_p,\ ASB \in c_p,$$

故(1)成立,由[4],$\mathrm{tr}[D(f\otimes g)]=(Dg,f)$, $\forall D\in\mathscr{B}(H)$ 及 $(f\otimes g)B=(B^*f)\otimes g$. 故

$$0=\mathrm{Re}\lambda(|AVB-C|^{p-1}U^*Ag,B^*f).$$

由 λ、f、g 的任意性,可知

$$B|AVB-C|^{p-1}U^*A=0,$$

由 A、B 有广义逆 A^-、B^-,故

$$|AVB-C|^{p-1}U^*=L_1-B^-BL_1AA^-,\qquad L_1\in\mathscr{B}(H).\tag{2}$$

由(2)易见

$$(|AVB-C|^{p-1}U^*U|AVB-C|^{p-1})^{1/2}=|(L_1-B^-BL_1AA^-)^*|=Q_1.$$

由 $\ker U=\ker|AVB-C|=\ker|AVB-C|^{p-1}(p>1)$ 故 U^*U 是 H 到 $(\ker U)^\perp=\mathrm{ran}(|AVB-C|^{p-1})$ 上的正交投影,故

$$|AVB-C|^{p-1}U^*U=|AVB-C|^{p-1}=U^*U|AVB-C|^{p-1},$$

从而

$$|AVB-C|=Q_1^{1/(p-1)}.\tag{3}$$

设多项式列

$$a_1^{(n)}x+\cdots+a_{k_n}^{(n)}x^n\rightrightarrows x^{1/(p-1)}$$

于 $[0,M]$ 上,其中 $M=\|Q_1\|$,则

$$a_1^{(n)}Q_1+\cdots+a_{k_n}^{(n)}Q_1^n\to Q_1^{1/(p-1)}.$$

故由(2)得到

$$\begin{aligned}AVB-C&=U|AVB-C|=UQ_1^{1/(p-1)}=\\&\lim_{n\to\infty}U(a_1^{(n)}Q_1+\cdots+a_{k_n}^{(n)}Q_1^n)=\\&\lim_{n\to\infty}(L_1^*-AA^-L_1^*B^-B)(a_1^{(n)}+\cdots+a_{k_n}^{(n)}Q_1^{n-1})=\\&\lim_{n\to\infty}U_0(a_1^{(n)}Q_1+\cdots+a_{k_n}^{(n)}Q_1^n)=\\&U_0Q_1^{1/(p-1)},\end{aligned}$$

因此

$$V=A^-(C+Q_0)B^-+L-A^-ALBB^-.$$

反之,易知有 $AVB-C=Q_0=U_0Q_1^{1/(p-1)}$ 且 $L_1^*-AA^-L_1^*BB^-=U_0|L_1^*-AA^-L_1^*BB^-|=U_0Q_1$ 是极分解.

由 $\ker U_0=\ker Q_1=\ker Q_1^{1/(p-1)}$ 有 $Q_0=U_0Q_1^{1/(p-1)}$ 是 Q_0 极分解,从而

$$\begin{aligned}B|AVB-C|^{(p-1)}U_0^*A&=B(U_0|AVB-C|^{(p-1)})^*A=\\&B(U_0|Q_0|^{(p-1)})^*A=B(U_0Q_1)^*A=\\&B(L_1^*-AA^-L_1^*B^-B)^*A=0.\end{aligned}$$

由 $|AVB-C|^{(p-1)}U_0^*\in c_q$, $ASB\in c_p$,知 $|AVB-C|^{(p-1)}U_0^*ASB\in c_1$,
故

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[|AVB-C|^{(p-1)}U_0^*ASB]&=\mathrm{tr}[|AVB-C|^{(p-1)}U_0^*ASBB^-B]=\\&\mathrm{tr}[B^-B|AVB-C|^{(p-1)}U_0^*ASB]=0.\end{aligned}$$

类似于定理 1,及利用 $\mathrm{ran}A_i\perp\mathrm{ran}A_j(i\neq j)$ 可知 $A_j^*A_i=0$,及 $A_iA_i^-A_j=(A_iA_i^-)^*A_j=0$,可证:

定理 2 设 A_i、B_i、$C \in \mathscr{B}(H)$，且 A_i 有 ⅰ)、ⅲ) 逆 A_i^-，B_i 有 ⅰ)、ⅳ) 逆 B_i^-，$(i = 1,2,\cdots,n)$. 若 $\mathrm{ran}A_i \perp \mathrm{ran}A_j$(或 $\mathrm{ran}B_i^* \perp \mathrm{ran}B_j^*$)$(i \neq j)$，

$$F_p:(X_1,X_2,\cdots,X_n) \to \left\| \sum_{i=1}^{n} A_iX_iB_i - C \right\|_p^p \qquad (1 < p < +\infty).$$

其中 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 使

$$\sum_{i=1}^{n} A_iX_iB_i - C \in c_p,$$

则 $V = (V_1,V_2,\cdots,V_n)$ 是 F_p 的一个临界点当且仅当

$$V_i = A_i^-(C + Q_0^{(i)})B_i^- + L_i - A_i^-A_iL_iB_iB_i^-, \qquad L_i \in \mathscr{B}(H),$$

其中 $Q_0^{(i)} = U_0^{(i)}(Q_1^{(i)})^{1/(p-1)}$，及 $Q_1^{(i)} = | L_1^{(i)*} - A_i(A_i)^- L_1^{(i)*}(B_i)^- B_i |$，而

$$L_1^{(i)*} - A_i(A_i)^- L_1^{(i)*}(B_i)^- B_i = U_0^{(i)} | L_1^{(i)*} - A_i(A_i)^- L_1^{(i)*}(B_i)^- B_i |$$

为极分解. 这里 $i = 1,2,\cdots,n$.

[参 考 文 献]

[1] Pensore R. A generalized inverse for matrices[J]. *Proc Cambridge Phil Soc*, 1955, **51**(4): 406~413.

[2] John G Aiken, John A Erdos, Jerrome A Goldsteir. Unity approximation of positive operators[J]. *Illinois Journal of Mathematics*, 1980, 24(1): 61~71.

[3] Maher P J. Some operator inequalities concerning generalized inverses[J]. *Illinois Journal of Mathematics*, 1990, 34(3): 503~514.

[4] Ringrose J R. *Compact Non-Self-Adjoint Operators*[M]. New York: Van Nonstrand-Reinhold, 1971.

On the Critical Points of the Map $F_p: X \to \| AXB - C \|_p^p$

Yang Changsen

(*Department of Mathematics, Henan Normal University, Xinxiang, Henan* 453002, *P R China*)

Abstract: Suppose A, B and C are the bounded linear operators on a Hilbert space H, when A has a generalized inverse A^- such that $(AA^-)^* = AA^-$ and B has a generalized inverse B^- such that $(B^-B)^* = B^-B$, the general characteristic forms for the critical points of the map $F_p: X \to \| AXB - C \|_p^p$ $(1 < p < \infty)$, have been obtained, it is a generalization for P. J. Maher result about $p = 2$. Similarly, the same question has been discussed for several operators.

Key words: generalized inverse; critical point; polar decomposition