应用数学和力学, 第 21 卷 第 3 期(2000 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 03_0221_05

极性连续统的增率型运动方程和边界条件

戴天民

(辽宁大学 数学应用中心和数学系, 沈阳 110036)

摘要: 推导出了各种偶应力张量间和它们的变率间的关系, 并建立起增率型角动量方程及其相应的边界条件 于是, 把这些结果和匡震邦在 非线性连续介质力学基础 中给出的经典连续统力学的相应结果组合起来即得 Cauchy 形式和 Piola 形式以及 Kirchhoff 形式的极性连续统的增率型运动方程和边界条件

关 键 词: 运动方程; 边界条件; 增率; 极性连续统

中图分类号: O313 2 文献标识码: A

引 言

文献[1] 已对经典连续统力学的各种应力张量间的关系以及各种形式的动量方程和相应的边界条件进行了系统的推导 在文献[2] 中已对广义连续统场论作了相当全面的阐述 文献[3] 把 Euler 角作为有向空间的角坐标, 并研究了极性弹性介质的有限变形问题

本文的目的是要建立各种偶应力张量间的关系及增率型的角动量方程和相应的边界条件 于是, 极性连续统的 Cauchy 形式、Piola 形式和 Kirchhoff 形式的增率型运动方程和边界条件可由本文的结果和文献[1] 中推导出的经典连续统的结果组合起来得到 我们认为, 这些结果对于极性连续统力学的数值分析是重要的和有用的 这里我们按所用的 Cauchy 的和 Piola 的以及 Kirchhoff 的应力和偶应力张量而把它们分别称为 Cauchy 形式和 Piola 形式以及 Kirchhoff 形式运动方程和边界条件

在文献中存在两种 Piola 应力张量的记法, 即 $= {}_{Kk}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_K$ 和 $= {}_{Kk}\boldsymbol{g}_K\boldsymbol{g}_k$ 在本文中我们采用后者, 这将便于和[1] 与[2] 进行比较 为了能使 Cauchy 形式、Piola 形式和 Kirchhoff 形式的应力和偶应力张量[(t_{kl} 和 m_k)、(${}_{kl}$ 和 ${}_k$) 和 (T_{kL} 和 M_K] 相互协调, 这里采用我们在文献[4] 中提出的角变形梯度 $_{,} = /$, 而没有采用文献[3] 的定义, 即 $_{,K} = / X_K$

本文在推导公式时应用卡氏线和角坐标, 而在最后结果中写成对所有坐标系均适用的符号记法形式

收稿日期: 1998_09_28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672032); 辽宁教委科研基金(A 类) 资助项目
作者简介: 戴天民(1931~) , 男, 满族, 辽宁开原, 博士, 教授, 博士生导师, 已发表专著 12 部, 论文 50 余篇.

1 各种应力张量间和偶应力张量间的关系

1 1 各种应力张量间的关系

我们引用[1]中给出的各种应力张量间的关系如下:

A 变形梯度

$$\boldsymbol{F} = F_{kK}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_K = x_{K,k}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_K, \qquad (1a_1)$$

$$\boldsymbol{F}^{-1} = F^{-1}_{kK}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_K = x_{k,K}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_K \qquad (1a_2)$$

B $_1$, $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 间的关系

1) $_{Kl} = jX_{K,k}t_{kl} = T_{KL}x_{l,L},$ $(2a_1)$

$$= j\boldsymbol{F}^{-1} \quad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}; \qquad (2a_2)$$

2) $T_{KL} = {}_{kl}X_{L,l} = jX_{K,k}t_{kl}X_{L,l},$ $(3a_1)$

$$\boldsymbol{T} = \quad \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} = j\boldsymbol{F}^{-1} \quad \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{F}^{-1}; \qquad (3a_2)$$

3) $t_{kl} = JX_{k,K}\ {}_{Kl} = Jx_{k,K}T_{KL}x_{l,L},$ $(4a_1)$

$$\boldsymbol{t} = J\boldsymbol{F} \quad = J\boldsymbol{F} \quad \boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}; \qquad (4a_2)$$

这里 $j = \mathrm{d}v/\mathrm{d}V = J^{-1}$

1 2 各种偶应力张量间的关系

我们推导各种偶应力张量间的关系如下:

A 角变形梯度

$$= \quad \boldsymbol{g}\ \boldsymbol{g} \quad = \quad , \ \boldsymbol{g}\ \boldsymbol{g}, \qquad (1b_1)$$

$$^{-1} = \quad ^{-1}\boldsymbol{g}\ \boldsymbol{g} \quad = \quad , \ \boldsymbol{g}\ \boldsymbol{g} \qquad (1b_2)$$

B , $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 间的关系

1) $_K = jX_{K,k}m_k, \quad = M_K \quad , ,$ $(2b_1)$

$$= j\boldsymbol{F}^{-1} \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{M} \quad ^{\mathrm{T}}; \qquad (2b_2)$$

2) $M_K = \quad _k \quad , = jX_{K,k}m_k, \quad , ,$ $(3b_1)$

$$\boldsymbol{M} = \quad ^{-\mathrm{T}} = j\boldsymbol{F}^{-1} \quad \boldsymbol{m} \quad ^{-\mathrm{T}}; \qquad (3b_2)$$

3) $m_k = Jx_{k,K}\ {}_K = Jx_{k,K}M_K \quad , ,$ $(4b_1)$

$$\boldsymbol{m} = J\boldsymbol{F} \quad = J\boldsymbol{F} \quad \boldsymbol{M} \quad ^{\mathrm{T}}; \qquad (4b_2)$$

这里 和 分别为空间和物质描述中的角坐标

2 各种应力率张量间和偶应力率张量间的关系

2 1 各种应力率张量间的关系

现引用文献[1]中给出的各种应力率张量间的关系如下:

A 变形梯度率

$$(x_{k,K}) = v_{k,l}x_{l,K}, \qquad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} \quad \boldsymbol{F}, \qquad (5a_1)$$

$$(X_{K,k}) = - X_{K,l}v_{l,k}, \qquad \boldsymbol{F}^{-1} = - \boldsymbol{F}^{-1} \quad \boldsymbol{G}, \qquad (5a_2)$$

这里 $\boldsymbol{G} = v_{k,l}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_l$ 为速度梯度张量

B , $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 间的关系

1) $_{Kl} = T_{KL}x_{l,L} + T_{KL}x_{m,L}v_{l,m} = jX_{K,k}(t_{kl} - v_{k,p}t_{pl} + v_{p,p}t_{kl}),$ $(6a_1)$

$$= \boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{F} + \boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} = j\boldsymbol{F}^{-1} \quad [\boldsymbol{t} - \boldsymbol{G} \quad \boldsymbol{t} + (\quad \boldsymbol{v})\boldsymbol{t}]; \qquad (6a_2)$$

2) $T_{KL} = X_{L,l}(\ \ _{Kl} - \ \ _{Kp} v_{l,p}) = jX_{K,k}(t_{kl} - v_{k,p} t_{pl} - v_{l,p} t_{kp} + v_{p,p} t_{kl}) X_{L,l},$ (7a1)

$\boldsymbol{T} = (\ \ - \ \ \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})\ \ \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} = j\boldsymbol{F}^{-1}\ \ [\boldsymbol{t} - \boldsymbol{G}\ \ \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}\ \ \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} + (\ \ \boldsymbol{v})\boldsymbol{t}]\ \ \boldsymbol{F}^{-T};$ (7a2)

3) $t_{kl} = J(x_{k,K}\ \ _{Kl} + v_{k,K}\ \ _{Kl} - v_{p,p} x_{k,K}\ \ _{Kl}) =$

$J(x_{k,K} x_{l,L} T_{KL} + v_{k,K} x_{l,L} T_{KL} + v_{l,L} x_{k,K} T_{KL} - x_{k,K} x_{l,L} v_{p,p} T_{KL}),$ (8a1)

$\boldsymbol{t} = J\left\{\boldsymbol{F}\ \ [\boldsymbol{F} - (\ \ \boldsymbol{v})\boldsymbol{F}]\ \ \right\} =$

$J\boldsymbol{F}\ \ [\boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}^{-1}\ \ \boldsymbol{F}\ \ \boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}\ \ \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} - (\ \ \boldsymbol{v})\boldsymbol{T}]\ \ \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ (8a2)

2 2 　$,\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 间的关系

现推导各种偶应力率张量间的关系如下:

A 角变形梯度率

$(\ \ ,\ \ ) = \ \ ,\ \ ,\ ,\ \ \ \ = \ \ \ \ ,$ (5b1)

$(\ \ ,\ \ ) = -\ \ ,\ \ ,\ ,\ \ (\ \ ^{-1}) = -\ \ ^{-1}\ \ ,$ (5b2)

这里 $=\ \ ,\ \boldsymbol{g}\ \boldsymbol{g}$ 为角速度梯度张量

B 　$,\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 间的关系

1) $\ \ _K = (M_K\ \ ,\ \ ) = M_K\ \ , + M_K\ \ ,\ \ , =$

$(jX_{K,k} m_k) = jX_{K,k}(m_k - v_{k,p} m_p + v_{p,p} m_k),$ (6b1)

$= \boldsymbol{M}\ \ ^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{M}\ \ ^{\mathrm{T}}\ \ ^{\mathrm{T}} = j\boldsymbol{F}^{-1}\ \ [\boldsymbol{m} - \boldsymbol{G}\ \ \boldsymbol{m} + (\ \ \boldsymbol{v})\boldsymbol{m}];$ (6b2)

2) $M_K = (\ \ _K\ \ ,\ \ ) = \ \ _K\ \ , - \ \ _K\ \ ,\ \ , = (jX_{K,k} m_k\ \ ,\ \ ) =$

$jX_{K,k}[(m_k - v_{k,p} m_p, + v_{p,p} m_k)\ \ - m_k\ \ ,\ \ ,],$ (7b1)

$\boldsymbol{M} = (\ \ - \ \ ^{\mathrm{T}})\ \ ^{\mathrm{T}} =$

$j\boldsymbol{F}^{-1}\ \ [\boldsymbol{m} - \boldsymbol{G}\ \ \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}\ \ ^{\mathrm{T}} + (\ \ \boldsymbol{v})\boldsymbol{m}]\ \ ^{-\mathrm{T}};$ (7b2)

3) $m_k = (jx_{k,K}\ \ _K) = J(x_{k,K}\ \ _K + v_{k,K}\ \ _K - v_{p,p} x_{k,K}\ \ _k) =$

$(Jx_{k,K} M_K\ \ ,\ \ ) = J(x_{k,K}\ \ , M_K + v_{k,K} M_K\ \ , +$

$x_{k,K} M_K\ \ , - v_{p,p} x_{k,K} M_K\ \ ,\ \ ),$ (8b1)

$\boldsymbol{m} = J\left\{\boldsymbol{F}\ \ + [\boldsymbol{F} - (\ \ \boldsymbol{v})]\ \ \right\} =$

$J\boldsymbol{F}\ \left\{\boldsymbol{M} + \boldsymbol{F}^{-1}\ \ \boldsymbol{F}\ \ \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}\ \ ^{\mathrm{T}}\ \ ^{-\mathrm{T}} - (\ \ \boldsymbol{v})\boldsymbol{M}\right\}\ \ ^{\mathrm{T}}$ (8b2)

3 增率型的运动方程和边界条件

3 1 增率型动量方程

现引用文献[1]中各种增率型动量方程如下:

1) $\ \ _{Kl,K} + \ \ _0(f_l - v_l) = 0,$ (9a1)

$+ \ \ _0(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0};$ (9a2)

2) $(T_{KL} x_{l,L} + T_{KL} v_{l,L})_{,K} + \ \ _0(f_l - v_l) = 0,$ (10a1)

$t\ \ \#(\boldsymbol{T}\#\ \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{T}\#\ \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}) + Q_0(\boldsymbol{f} - \&) = \boldsymbol{0};$

3) $(t_{kl} - v_{k,p} t_{pl} + v_{p,p} t_{kl})_{,k} + Q(f_l - \&) = 0,$ (11a1)

$\#[\boldsymbol{t} - \boldsymbol{G}\#\ \boldsymbol{t} + (\ \ \#\ \boldsymbol{v})\boldsymbol{t}] + Q(\boldsymbol{f} - \&) = \boldsymbol{0};$ (11a2)

这里 ¨ 和 t 分别为协变和全协变导数算子#

312 增率型角动量方程

现推导各种增率型角动量方程如下:

1) $\mathrm{L}_{KH,K} + E_{Hl}(v_{k,K} s_{Kl} + x_{k,K} s_{Kl}) + Q_0(lH - \&H) = 0,$ (9b1)

$$+ \ \boldsymbol{E:(G\# S+ \ F\# S)} + \ Q_0(\boldsymbol{l} - \ \boldsymbol{R\!\!\!R}) = \ \boldsymbol{0}; \qquad (9b_2)$$

2) $(M_{K(UH,(} + \ M_{K(UH,()})_{,K} + \ E_{Hl}[(v_{k,K}x_{l,L} + \ x_{k,K}v_{l,L})T_{KL} +$

$$x_{k,K}x_{l,L}T_{KL}] + \ Q_0(lH - \ R\!\!\!RH) = \ 0, \qquad (10b_1)$$

$$t \ \ \#(\boldsymbol{M\# 7}^{\mathrm{T}} + \ \boldsymbol{M\# 7}^{\mathrm{T}}) + \ E:[(\boldsymbol{GF} + \ \boldsymbol{FG}):\boldsymbol{T} +$$

$$(\boldsymbol{FF}):\boldsymbol{T}] + \ Q_0(\boldsymbol{l} - \ \boldsymbol{R\!\!\!R}) = \ \boldsymbol{0}; \qquad (10b_2)$$

3) $(m_{kH} - \ v_{k,l}m_{lH} + \ v_{p,p}m_{kH})_{,k} + \ E_{kH}(t_{kl} - \ v_{p,p}t_{kl}) + \ Q(lH - \ R\!\!\!RH) = \ 0, \qquad (11b_1)$

$$\#[\boldsymbol{m} - \ \boldsymbol{G\# m} + (\quad \#\boldsymbol{v})\boldsymbol{m}] + \boldsymbol{E}:[\boldsymbol{t} - (\quad \#\boldsymbol{v})\boldsymbol{t}] + \ Q(\boldsymbol{l} - \ \boldsymbol{R\!\!\!R}) = \ \boldsymbol{0}\# \qquad (11b_2)$$

313 应力率边界条件

现引用文献[1]中给出应力率边界条件如下:

1) $\overset{H}{\boldsymbol{P}}{}_l^{(N)} = \ N_K S_{Kl}, \qquad (12a_1)$

$$\overset{H}{\boldsymbol{P}}{}^{(N)} = \ \boldsymbol{N\# S}; \qquad (12a_2)$$

2) $\overset{H}{\boldsymbol{P}}{}_l^{(N)} = \ N_K(T_{KL}x_{l,L} + \ T_{KL}v_{l,L}), \qquad (13a_1)$

$$\overset{H}{\boldsymbol{P}}{}^{(N)} = \ \boldsymbol{N\#(T\# F}^{\mathrm{T}} + \ \boldsymbol{T\# G}^{\mathrm{T}}); \qquad (13a_2)$$

3) $\overset{H}{\boldsymbol{P}}{}_l^{(n)} = \ n_k t_{kl} + \ n_r(v_{r,m}n_m n_k - \ v_{r,k})t_{kl}, \qquad (14a_1)$

$$\overset{H}{\boldsymbol{P}}{}^{(n)} = \ \boldsymbol{n\# t} + \ \boldsymbol{n\#[(G\# n)n} - \ \boldsymbol{G]\# t}\# \qquad (14a2)$$

314 偶应力率边界条件

现推导各种偶应力率边界条件如下:

1) $\overset{H}{c}{}_H^{(N)} = \ N_K L_{KH}, \qquad (12b_1)$

$$\overset{H}{\boldsymbol{c}}{}^{(N)} = \ \boldsymbol{N\# L}; \qquad (12b_2)$$

2) $\overset{H}{c}{}_H^{(N)} = \ N_K(M_{K(UH,(} + \ M_{K(UH,()}), \qquad (13b_1)$

$$\overset{H}{\boldsymbol{c}}{}^{(N)} = \ \boldsymbol{N\#(M\# 7}^{\mathrm{T}} + \ \boldsymbol{M\# 7}^{\mathrm{T}}); \qquad (13b_2)$$

3) $\overset{H}{c}{}_H^{(n)} = \ n_k(m_{kH} + \ n_r(v_{r,m}n_m n_k - \ v_{r,k})m_{kH}, \qquad (14b_1)$

$$\overset{H}{\boldsymbol{c}}{}^{(n)} = \ \boldsymbol{n\# m} + \ \boldsymbol{n\#[(G\# n)n} - \ \boldsymbol{G]\# m}\# \qquad (14b_2)$$

315 速度和角速度边界条件

从略#

4 结 语

1) 极性连续统的Cauchy、Piola和Kirchhoff形式的增率型运动方程及边界条件分别由(9)~(11)及(12)~(14)和速度和角速度边界条件组成#

2) 类似地,微态连续统[5]的增率型运动方程和边界条件也可推导出来#

3) 用曲线坐标系代替角坐标系后,本文给出的结果就可归结为Eringen理论框架下的表述形式#

4) 本文的结果也可以从另文提出的极性连续统的虚增率功率原理推导出来#

[参 考 文 献]

[1] 匡震邦. 非线性连续介质力学基础[M]. 西安:西安交通大学出版社,1989.

[2] Eringen A C. Continuum Physics[M]. Vol. ,New York: Academic Press,1976.

[3] Dluzewski P H. Finite deformations of polar elastic media[J]. Int J Solids Structures, 1993, **30**(16):

2277~ 2285.

[4] 戴天民. 三组非局部极性热力连续统的均衡方程和跳变条件[J]. 中国科学(A 辑), 1997, **27**(12): 1106~ 1110.

[5] Eringen A C. Balance laws of micromorphic continua revisited[J]. Int J Engng Sci, 1992, **30**(6): 805 ~ 810.

Equations of Motion and Boundary Conditions of Incremental Rate Type for Polar Continua

Dai Tianmin

(Center for the Application of Mathematics & Department of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P R China)

Abstract: The relations between various couple stress tensors and their change rates are derived. The equations of angular momentum and the corresponding boundary conditions of incremental rate type are presented. Thus the equations of motion and the boundary conditions of incremental rate type of Cauchy form, Piola form and Kirchhoff form for polar continua are obtained in combination of these results with those for classical continuum mechanics derived by Kuang Zhenbang.

Key words: equations of motion; boundary conditions; incremental rates; polar continua