应用数学和力学, 第 21 卷 第 3 期(2000 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 03_0235_10

关于 $u''+\mu(u-u^k)=0(4\leqslant k\in\mathbf{Z}^+)$ 分叉的注记*

李常品

(上海大学 理学院数学系, 上海宝山 200436)

(刘曾荣推荐)

摘要: 讨论了一类反应扩散方程 $u''+\mu(u-u^k)=0$, $u(0)=u(\pi)=0(4\leqslant k\in\mathbf{Z}^+$, μ 为参数) 的分叉现象· 运用所谓基于李雅普诺夫_施密特约化的奇异理论方法, 得到满意的结果·

关 键 词: 李雅普诺夫_施密特约化; 奇异理论; 分叉

中图分类号: O175.1 文献标识码: A

引 言

本文考虑如下形式的反应_扩散方程[1,2]

$$F(u,\mu)=u''+\mu(u-u^k)=0, \tag{1}$$

其边值条件为

$$u(0)=u(\pi)=0, \tag{2}$$

其中 μ 为参数, $1<k\in\mathbf{Z}^+$·

令 $X=\left\{u\in C^2[0,\pi]\mid u(0)=u(\pi)=0\right\}$, $Y=C^0[0,\pi]$· 于是 $F(u,\mu)$ 是从 $X\times R$ 到 Y 上的映射· 上述空间的内积定义为 $\langle u,v\rangle=\int_0^\pi u(\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi$· 对任意的 μ, (1) 有一个平凡解 $u=0$·

考虑线性化方程

$$D_uF(0,\mu)\wedge v=v''+\mu v=0 \tag{3}$$

其边值条件如下

$$v(0)=v(\pi)=0· \tag{4}$$

显然, (3) 有非平凡解 $v=c\sin nx$ (c 为任意常数) 当且仅当 $\mu=\mu_n=n^2(n\in\mathbf{Z}^+)$· 对于 $\mu\neq\mu_n$, (3) 只有一个解 $u=0$·

随着 u 的指数 k 的增长, (1) 的分叉分析会变得越来越困难· 本文将考虑 $k\geqslant4$ 的情形· 在 1 节中, 对(1) 在分叉点 $(u,\mu)=(0,n^2)$ 处运用李雅普诺夫_施密特约化(见[3~6]) 得到了分叉方程· 第 2 节对第 1 节的分叉方程进行了讨论·

---

* 收稿日期: 1998_11_20; 修订日期: 1999_11_05
基金项目: 国家自然科学基金项目(19971057)和上海市高等学校科技发展基金资助(99QA66)
作者简介: 李常品(1968~), 男, 博士, 讲师.

1 李雅普诺夫_施密特约化

令 $L_n = D_uF(0, n^2)$, $\ker L_n = \mathrm{span}\{\sin n\xi\} = \mathrm{span}\{e\}$. 显见 $L_n: X \to Y$ 是一个指标为零的弗雷霍姆算子[5]. 对空间 X, Y 进行分解

$$X = \ker L_n \oplus M,\ Y = N \oplus \mathrm{range} L_n \tag{5}$$

其中 $M = (\ker L_n)^{\perp}$, $N = (\mathrm{range} L_n)^{\perp}$. 显见, L_n 是自共轭算子, 即 $L_n^* = L_n$. 根据弗雷德霍姆择一性, $(\mathrm{range} L_n)^{\perp} = \ker L_n^*$. 故有 $(\mathrm{range} L_n)^{\perp} = \ker L_n$.

令 P_e 是 Y 到 $\mathrm{range} L_n$ 的正交投影算子. 依李雅普诺夫_施密特约化, (1) 等价于

$$P_eF(v + w, \mu) = 0 \qquad (v \in \ker L_n, w \in M) \tag{6}$$

$$(I - P_e)F(v + w, \mu) = 0. \tag{7}$$

根据隐函数定理[4], (6) 确定唯一解 $w(v, \mu)(w(0, n^2) = 0$. 将 $w(v, \mu)$ 代入(7) 得到约化方程

$$(I - P_e)F(v + w(v, \mu), \mu) = 0, \tag{8}$$

(8) 常常被称为分叉方程. 让(8) 与 e 作内积并运用 $e \in (\mathrm{range} L_n)^{\perp}$ 这一事实, 则有

$$\langle e, F(v + w(v, \mu), \mu)\rangle = 0. \tag{9}$$

令 $v = xe$, (9) 又可写为

$$g(x, \mu) = \langle e, F(xe + w(x, \mu), \mu)\rangle = 0, \tag{10}$$

(10) 也常常被称为(1) 在 $(u, \mu) = (0, n^2)$ 处的分叉方程. 于是(1) 的分叉现象的研究减化为对(10) 的分叉现象的研究. 由于无法求出(10) 的精确解, 因此我们需要计算约化函数 $g(x, \mu)$ 的偏导数(这正是奇异理论所必需的). 先来介绍一个定义

$$(\mathrm{d}^kG)_{(y, \alpha)}(v_1, \cdots, v_k) = \frac{\partial}{\partial t_1}\cdots\frac{\partial}{\partial t_k}G\left(y + \sum_{i=1}^{k} t_iv_i, \alpha\right)\Big|_{t_1 = \cdots = t_k = 0},$$

$$v_i \in R^n (i = 1, 2, \cdots, k). \tag{11}$$

将 $P_eF(v + w, \mu) = 0$ 改写为 $P_eF(xe + w(x, \mu), \mu) = 0$. 下面的式子是容易得到的.

$$g_x = \langle e, \mathrm{d}F(e + w_x)\rangle, \tag{12}$$

$$g_{x^2} = \langle e, \mathrm{d}F(w_{x^2}) + \mathrm{d}^2F(e + w_x, e + w_x)\rangle, \tag{13}$$

$$g_{x^3} = \langle e, \mathrm{d}F(w_{x^3}) + 3\mathrm{d}^2F(e + w_x, w_{x^2}) + \mathrm{d}^3F(e + w_x, e + w_x, e + w_x)\rangle, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} g_{x^4} = {}& \langle e, \mathrm{d}F(w_{x^4}) + 3\mathrm{d}^2F(w_{x^2}, w_{x^2}) + 4\mathrm{d}^2F(e + w_x, w_{x^3}) + \\ & 6\mathrm{d}^3F(e + w_x, e + w_x, w_{x^2}) + \mathrm{d}^4F(\underbrace{e + w_x, \cdots, e + w_x}_{4})\rangle, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} g_{x^5} = {}& \langle e, \mathrm{d}F(w_{x^5}) + 5\mathrm{d}^2F(w_{x^4}, e + w_x) + 10\mathrm{d}^2F(w_{x^2}, w_{x^3}) + \\ & 10\mathrm{d}^3F(e + w_x, e + w_x, w_{x^3}) + 10\mathrm{d}^4F(e + w_x, e + w_x, e + w_x, w_{x^2}) + \\ & 15\mathrm{d}^3F(e + w_x, w_{x^2}, w_{x^2}) + \mathrm{d}^5F(\underbrace{e + w_x, \cdots, e + w_x}_{5})\rangle, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} g_{x^6} = {}& \langle e, \mathrm{d}F(w_{x^6}) + 6\mathrm{d}^2F(e + w_x, w_{x^5}) + 15\mathrm{d}^2F(w_{x^2}, w_{x^4}) + \\ & 10\mathrm{d}^2F(w_{x^3}, w_{x^3}) + 15\mathrm{d}^3F(e + w_x, e + w_x, w_{x^4}) + \\ & 60\mathrm{d}^3F(e + w_x, w_{x^2}, w_{x^3}) + 15\mathrm{d}^3F(w_{x^2}, w_{x^2}, w_{x^2}) + \\ & 45\mathrm{d}^4F(e + w_x, e + w_x, w_{x^2}, w_{x^2}) + 20\mathrm{d}^4F(\underbrace{e + w_x, \cdots, e + w_x}_{3}, w_{x^3}) + \end{aligned}$$

$$15d^5F(\underbrace{e+w_x,\cdots,e+w_x}_{4},w_{x^2}) + d^6F(\underbrace{e+w_x,\cdots,e+w_x}_{6})\rangle, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} g^{x^7} = \langle e, &dF(w_{x^7}) + 7d^2F(e+w_x,w_{x^6}) + 21d^2F(w_{x^2},w_{x^5}) + \\ &35d^2F(w_{x^3},w_{x^4}) + 21d^3F(e+w_x,e+w_x,w_{x^5}) + \\ &90d^2F(e+w_x,w_{x^2},w_{x^4}) + 70d^3F(e+w_x,w_{x^3},w_{x^3}) + \\ &105d^3F(w_{x^2},w_{x^2},w_{x^3}) + 35d^4F(e+w_x,e+w_x,e+w_x,w_{x^4}) + \\ &210d^4F(e+w_x,e+w_x,w_{x^2},w_{x^3}) + 105d^4F(e+w_x,w_{x^2},w_{x^2},w_{x^2}) + \\ &69d^5F(\underbrace{e+w_x,\cdots,e+w_x}_{3},w_{x^2},w_{x^2}) + 26d^5F(\underbrace{e+w_x,\cdots,e+w_x}_{4},w_{x^3}) + \\ &12d^6F(\underbrace{e+w_x,\cdots,e+w_x}_{5},w_{x^2}) + d^7F(\underbrace{e+w_x,\cdots,e+w_x}_{7})\rangle, \end{aligned} \tag{18}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$

$$g^{\mu} = \langle e, dF(w^{\mu}) + F^{\mu}\rangle, \tag{19}$$

$$g_{x^\mu} = \langle e, dF^{\mu}(e+w_x) + dF(w_{x^\mu}) + d^2F(e+w_x,w^{\mu})\rangle, \tag{20}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$P_e dF(e+w_x) = 0, \tag{21}$$

$$P_e d^2F(e+w_x,e+w_x) + P_e dF(w_{x^2}) = 0, \tag{22}$$

$$P_e d^3F(e+w_x,e+w_x,e+w_x) + 3P_e d^2F(e+w_x,w_{x^2}) + P_e dF(w_{x^3}) = 0, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &P_e d^4F(e+w_x,e+w_x,e+w_x,e+w_x) + 6P_e d^3F(e+w_x,e+w_x,w_{x^2}) + \\ &\quad 3P_e d^2F(w_{x^2},w_{x^2}) + 4P_e d^2F(e+w_x,w_{x^3}) + P_e dD(w_{x^4}) = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &P_e d^5F(\underbrace{e+w_x,\cdots,e+w_x}_{5}) + 10P_e d^4F(e+w_x,e+w_x,e+w_x,w_{x^2}) + \\ &\quad 15P_e d^3F(e+w_x,w_{x^2},w_{x^2}) + 10P_e d^3F(e+w_x,e+w_x,w_{x^3}) + \\ &\quad 10P_e d^2(w_{x^2},w_{x^3}) + 5P_e d^2F(e+w_x,w_{x^4}) + P_e dF(w_{x^5}) = 0, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &P_e d^6F(\underbrace{e+w_x,\cdots,e+w_x}_{6}) + 15P_e d^5F(\underbrace{e+w_x,\cdots,e+w_x}_{4},w_{x^2}) + = \\ &\quad 20P_e d^4F(e+w_x,e+w_x,e+w_x,w_{x^3}) + 45P_e d^4F(e+w_x,e+w_x,w_{x^2},w_{x^2}) + \\ &\quad 60P_e d^3F(e+w_x,w_{x^2},w_{x^3}) + 15P_e d^3F(w_{x^2},w_{x^2},w_{x^2}) + \\ &\quad 10P_e d^2F(w_{x^3},w_{x^3}) + 15P_e d^3F(e+w_x,e+w_x,w_{x^4}) + \\ &\quad P_e dF(w_{x^6}) + 6P_e d^2F(e+w_x,w_{x^5}) + 15P_e d^2F(w_{x^2},w_{x^4}) = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &P_e d^7F(\underbrace{e+w_x,\cdots,e+w_x}_{7}) + 12P_e d^6F(\underbrace{e+w_x,\cdots,e+w_x}_{5},w_{x^2}) + \\ &\quad 26P_e d^4F(\underbrace{e+w_x,\cdots,e+w_x}_{4},w_{x^3}) + 69P_e d^5F(\underbrace{e+w_x,\cdots,e+w_x}_{3},w_{x^2},w_{x^2}) + \\ &\quad 210P_e d^4F(e+w_x,e+w_x,w_{x^2},w_{x^3}) + 105P_e d^4F(e+w_x,w_{x^2},w_{x^2},w_{x^2}) + \\ &\quad 105P_e d^3F(w_{x^2},w_{x^2},w_{x_3}) + 35P_e d^4F(e+w_x,e+w_x,e+w_x,w_{x^4}) + \\ &\quad 90P_e d^3F(e+w_x,w_{x^2},w_{x^4}) + 70P_e d^3F(e+w_x,w_{x^3},w_{x^3}) + \\ &\quad 35P_e d^2F(w_{x^3},w_{x^4}) + 21P_e d^3F(e+w_x,e+w_x,w_{x^5}) + \\ &\quad P_e dF(w_{x^7}) + 7P_e d^2F(e+w_x,w_{x^6}) + 21P_e d^2F(w_{x^2},w_{x^5}) = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$

$$P_e \mathrm{d}F(w_\mu) + P_e F_\mu = 0, \tag{28}$$

$$P_e \mathrm{d}F_\mu(e + w_x) + P_e \mathrm{d}F(w_{x\mu}) + P_e \mathrm{d}^2F(e + w_x, w_\mu) = 0, \tag{29}$$

(12) ~ (23) 等中的 $w_x, w_{x^2}, \cdots, w_\mu, w_{x\mu}, \cdots$ 由(21) ~ (29) 等所确定·

2 分叉分析

基于李雅普诺夫_施密特方法的奇异理论[4, 5, 6]在非线性问题的静态分叉分析起着重要作用· 下面的定义或结论属于识别问题(奇异理论的一个部分)·

$E_{x,\mu}$是在(0, 0) 的某个领域从 $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的所有 C^∞ 映射组成的线性空间, 其中的元系称为芽·

考虑

$$f(x, \mu) = 0, (x, \mu) \in U \times V \subset \mathbf{R}^2, \tag{30}$$

其中 $f \in E_{x,\mu}$, $(0, 0) \in U \times V$, 且 $f(0, 0) = f_x(0, 0) = 0$, 也就是说(0, 0) 是 f 的奇导点·

假设 $f, h \in E_{x,\mu}$ 称 f 和 h 是等价的, 如果

$$f(x, \mu) = S(x, \mu)h(\Omega(x, \mu)), \tag{31}$$

其中 $\Omega(x, \mu) = (X(x, \mu), \Lambda(\mu))$ 是在圆点的某个领域的 C^∞ 微分同胚, $S(x, \mu)) \in E_{x,\mu}$, $X(0, 0) = \Lambda(0) = 0$, $\Lambda'(0) > 0$, $X_x(0, 0) > 0$, $S(0,)) > 0$· 如果 $\Lambda(\mu) \equiv \mu$, 那么我们称 f 与 h 强等价·

下面的基本事实容易验证[5]· 如果 f 和 h 等价, 那么 1) f 和 h 有相同的奇异点, 2) $n_f(\mu) = n_h(\Lambda(\mu))$ ($n_f(\mu)$ 表示 $f(x, \mu) = 0$ 解的数目, $n_h(\Lambda(\mu))$ 表示的意义相同), 3) x>= $g(x, \mu)$ 的平衡解的稳定性与 x>= $h(x, \mu)$ 的相同·

定理 1 芽 $f \in E_{x,\mu}$ 强等价于 $\varepsilon x^k + \delta\mu x$ 当且仅当在 $x = \mu = 0$ 处,

$$f = f_x = \cdots = f_{x^{k-1}} = f_\mu = 0 \tag{32}$$

和

$$\varepsilon = \mathrm{sgn} f_{x^k}, \ \delta = \mathrm{sgn} f_{x\mu}· \tag{33}$$

下面的分叉图是熟知的·

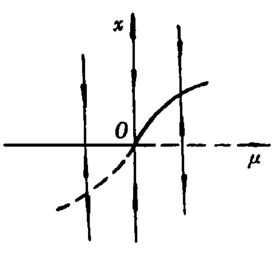

图 1 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x^k + \mu x$ ($4 \leqslant k \in \mathbf{Z}^+$, k 为偶数) 的分叉图

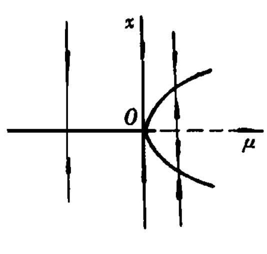

图 2 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -x^k + \mu x$ ($4 \leqslant k \in \mathbf{Z}^+$, k 为奇数) 的分叉图

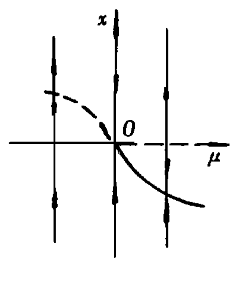

图 3 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x^k + \mu x$ ($4 \leqslant k \in \mathbf{Z}^+$, k 为偶数) 的分叉图

现在来讨论分叉方程(10)·

根据(11), 我们有

$$(\mathrm{d}F)_{(0, n^2)}\xi = \xi'' + n^2\xi, \tag{34}$$

$$(\mathrm{d}^l F)_{(0,n^2)}(\xi_1, \cdots, \xi_l) = \frac{\partial^l}{\partial t_1 \cdots \partial t_l}\left[\sum_{i=1}^{l}(t_i\xi_i'' + n^2 t_i \xi_i) - n^2\left(\sum_{i=1}^{l} t_i \xi_i\right)^k\right]\Big|_{t_1 = \cdots = t_l = 0} = \begin{cases} 0 & (l \neq k \text{ 和 } l > 1) \\ -n^2 k! \prod_{i=1}^{k} \xi_i & (l = k) \end{cases} \tag{35}$$

由(21)得知, $P_e L_n(e + w_x(0, n^2)) = 0$• 由于 $L_n: M \to \mathrm{range} L_n$ 是可逆的以及 $e \in \ker L_n$, $w_x \in M$, 从而

$$w_x(0, n^2) = 0 \tag{36}$$

进一部, 依(22)~(27), 等及(35)并利用 L_n 可逆和 $w_{x^j} \in M(j \in Z^+)$, 得

$$w_{x^l}(0, n^2) = 0 \quad (l = 2, \cdots, k-1); \tag{37}$$

$$P_e(-n^2 k! e^k) + P_e L_n w_{x^k}(0, n^2) = 0, \tag{38}$$

也就是,

$$w_{x^k}(0, n^2) = n^2 k! L_n^{-1}(P_e e^k) \tag{39}$$

让(12)~(16), 等在 $(0, n^2)$ 取值并且运用(35)~(37)和(39), 得

$$g_{x^l}(0, n^2) = 0, (l = 1, \cdots, k-1) \tag{40}$$

$$\begin{aligned} g_{x^k}(0, n^2) &= \langle \mathrm{e}, L_n w_{x^k}(0, n^2) + (-n^2 k! \mathrm{e}^k)\rangle = \\ &\langle \mathrm{e}, L_n(n^2 k! L_n^{-1} P_e \mathrm{e}^k) - n^2 k! \mathrm{e}^k\rangle = \\ &= \langle \mathrm{e}, n^2 k! P_e \mathrm{e}^k - n^2 k! e^k\rangle = \\ &- n^2 k! \langle e, e^k\rangle \quad (P_e e^k \in \mathrm{range} L_n, \mathrm{e} \in (\mathrm{range} L_n)^\perp) \end{aligned}$$

引理 1 定义 $I_m = \int_0^\pi (\sin n\xi)^m \mathrm{d}\xi (m, n \in \mathbf{Z}^+)$, 那么

$$I_m = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \dfrac{1-(-1)^n}{n} & (m/2 \notin \mathbf{Z}^+), \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\pi & (m/2 \in \mathbf{Z}^+) \end{cases} \tag{42}$$

证明 $I_m = \int_0^\pi (\sin n\xi)^m \mathrm{d}\xi = (m-1)(I_{m-2} - I_m)$• 于是, $I_m = \dfrac{m-1}{m} I_{m-2}$• 进一步,

$$I_m = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!} I_1 & (m/2 \notin \mathbf{Z}^+) \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!} I_0 & (m/2 \in \mathbf{Z}^+) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \dfrac{1-(-1)^n}{n} & (m/2 \notin \mathbf{Z}^+) \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\pi & (m/2 \in \mathbf{Z}^+) \end{cases} \quad \square$$

依引理 1, 由(41)得

$$g_{x^k}(0, n^2) = \begin{cases} -\dfrac{n(k!!)^2}{k+1} \cdot [1-(-1)^n] & (k/2 \in \mathbf{Z}^+) \\ -\dfrac{n^2(k!!)^2}{k+1}\pi & (k/2 \notin \mathbf{Z}^+) \end{cases} \tag{43}$$

令 $(u, \mu) = (0, n^2)$, (28)和(29)变为

$$P_e L_n w_\mu(0, n^2) = 0, \tag{44}$$

$$P_e \mathrm{e} + P_e L_n w_{x\mu}(0, n^2) = 0, \tag{45}$$

也就是,

$$w_\mu(0, n^2) = 0, \tag{46}$$

$$w_{x\mu}(0, n^2) = 0 \tag{47}$$

将(46)和(47)分别代入(19)和(20),则得,

$$g_{\mu}(0, n^2) = 0, \tag{48}$$

$$g_{x\mu}(0, n^2) = \langle e, e\rangle = \frac{\pi}{2}. \tag{49}$$

下面列出除(43)中 n 为偶数外的一些结果(n 为偶数的情形稍后考虑).

情形 1 k 为奇数($4 \leqslant k \in \mathbf{Z}^+$).

$(u, \mu) = (0, n^2)$ 时, $g = g_x = \cdots = g_{x^{k-1}} = g_{\mu} = 0$, $g_{x^k} = -\dfrac{n^2(k!!)^2}{k+1}\pi$, $g_{x\mu} = \dfrac{\pi}{2}$.

情形 2 k 为偶数, n 为奇数($4 \leqslant k \in \mathbf{Z}^+$, $n \in \mathbf{Z}^+$).

$(u, \mu) = (0, n^2)$ 时, $g = g_x = \cdots = g_{x^{k-1}} = g_{\mu} = 0$, $g_{x^k} = -\dfrac{2n(k!!)^2}{k+1}$, $g_{x\mu} = \dfrac{\pi}{2}$.

根据定理 1, 有

定理 2 假设 k 为奇数($4 \leqslant k \in \mathbf{Z}^+$). 那么 $g(x, \mu)$ 强等价于 $-x^k + (\mu - n^2)x$. 进一步, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = F(u, \mu)$ 在 $(0, n^2)$ 处的分叉图类似于图 2.

定理 3 假设 k 为偶数 n 为奇数($4 \leqslant k \in \mathbf{Z}^+$, $n \in \mathbf{Z}^+$). 那么, $g(x, \mu)$ 强等价于 $-x^k + (\mu - n^2)x$. 进一步, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = F(u, \mu)$ 在 $(0, n^2)$ 处的分叉图类似于图 1.

从(43)可以看出, 如果 k 和 n 均为偶数, 那么 $g_{x^k}(0, n^2) = 0$. 为了讨论这种情形, 令

$$K(k) = \min_{l}\left\{ l \mid g_{x^l}(0, n^2) \neq 0,\ k \leqslant l \in \mathbf{Z}^+,\ k/2,\ n/2 \in \mathbf{Z}^+ \right\}. \tag{50}$$

由(50)可以得知

$$g_{x^l}(0, n^2) = 0,\ l = k+1, k+2, \cdots, K(k) - 1. \tag{51}$$

下面我们给出几个定义. 我们称 $d^l F(\xi_1, \cdots, \xi_l)$ 是 g_{x^m} 的拟项, 如果它出现在(52)的右端

$$g_{x^m} = \langle e, \sum_{i=1}^{m} \sum_{\xi_1 \cdots \xi_i} C_{\xi_1 \cdots \xi_i} d^i F(\xi_1 \cdots \xi_i) \rangle, \tag{52}$$

其中 $C_{\xi_1 \cdots \xi_i} \in \mathbf{Z}^+$, $\xi_1, \cdots, \xi_i$ 表示 $xe + w(x, \mu)$ 关于 x 某价导数, $\sum\limits_{\xi_1 \cdots \xi_i}$ 表示所有可能项的和. 例如, 当 $m = 5$, $i = 2$, $\sum\limits_{\xi_1 \xi_2} C_{\xi_1 \xi_2} d^2 F(\xi_1, \xi_2) = 5d^2 F(e + w_x, w_{x^4}) + 10 d^2 F(w_{x^2}, w_{x^2})$, $d^2 F(e + w_x, w_{x^4})$ 和 $d^2 F(w_{x^2}, w_{x^3})$ 是 g_{x^5} 的拟项(参见(16)). 我们称 g_{x^m} 的拟项 $d^l F(\xi_1, \cdots, \xi_l)$ 是字典排列的, 如果 $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_l$, 其中 $\xi_i = \dfrac{\partial^{k_i}}{\partial x^{k_i}}(xe + w(x, \mu))$. 下面的引理容易验证但很重要.

引理 2 假设 $d^l F(\eta_1, \cdots, \eta_l)$ 是 g_{x^m} 的任意按字典排列的拟项, 那么

$$\sum_{i=1}^{l} k_i = m, \tag{53}$$

其中 $\eta_i = \dfrac{\partial^{k_i}}{\partial x^{k_i}}(xe + w(x, \mu))$.

证明 1) $m = 1$

对 $F(xe + w(x, \mu), \mu)$ 关于 x 微分一次得 $dF(e + w_x)$, 从而(53)对 $m = 1$ 是成立的.

2) 假设任意拟项 $d^l F(\eta_1, \cdots, \eta_l)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{l} k_i = m.$$

将 g_{x^m} 关于x 再微分一次, 得

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{d}^l F(\eta_1, \ldots, \eta_l)) = \mathrm{d}^{l+1} F(e + w_x, \eta_1, \ldots, \eta_l) + \sum_{i=1}^{l} d^l F\left(\eta_1, \ldots, \frac{\partial \eta_i}{\partial x}, \ldots, \eta_l\right)\cdot$$

显然,

$$1 + k_1 + \cdots + k_l = 1 + m,$$

这就是说, (53) 对 $m + 1$ 也是成立的•

依照数学归纳法, (53) 确实成立• □

注记 1 字典排列这一条件对我们的证明来说并不是必需的•

现在来计算 $K(k)$ •

从(35) 可以看出, 只有当 $(\mathrm{d}^k F)_{(0, n^2)}(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ 是 $g_{x^{K'}}(0, n^2)$ 的拟项时$(K' > k)$, $g_{x^{K'}}(0, n^2)$ 才可能不为零• 假定$(\mathrm{d}^K F)_{(0, n^2)}(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ 是字典排列的, 根据(37) 和(39), 只有当

$$(\mathrm{d}^k F)_{(0, n^2)}(\underbrace{\mathrm{e} + w_x, \ldots, \mathrm{e} + w_x, w_{x^k}}_{k-1}, w_{x^k})$$

出现在 $g_{x^{K'}}(0, n^2)$ 之中, $g_{x^{K'}}(0, n^2) \neq 0$• 根据引理 2, $K' = 2k - 1$, 亦即, $K(k) = 2k - 1$• 于是

$$\begin{aligned} g_{x^{2k-1}}(0, n^2) = {} & \langle \mathrm{e}, L_n w_{x^{2k-1}}(0, n^2) + n^2 N_k(-k!)\mathrm{e}^{k-1} w_{x^k}(0, n^2)\rangle = \\ & -n^4(k!)^2 N_k \langle e, e^{k-1} L_n^{-1} P_e \mathrm{e}^k\rangle \qquad (N_k \in \mathbf{Z}^+)\cdot \end{aligned} \tag{54}$$

(例如, 当 $k = 2$ 和 n 为偶数, 那么在$(u, \mu) = (0, n^2)$ 处, $g = g_x = g_{x^2} = 0$, $g_{x^3} = \dfrac{-5\pi n^2}{2}$, 在这种情况下, $K(2) = 3$• 当 $k = 4$ 和 n 为偶数, 那么在$(u, \mu) = (0, n^2)$ 处, $g = g_x = \cdots = g_{x^6} = 0$, $g_{x^7} = \langle e, n^2 35(-4!)\, e^3 w_{x^4}(0, n^2)\rangle \neq 0$, 此时, $K(4) = 7$•)

令$L_n^{-1} P_\mathrm{e} \mathrm{e}^k = u \in M$, 那么$L_n u = P_\mathrm{e} \mathrm{e}^k$• 由于$\langle \mathrm{e}^k, \mathrm{e}\rangle = 0$($k$ 与n 为偶数并运用引理 1), 因而 $\mathrm{e}^k \in \mathrm{range} L_n$, 意即 $P_\mathrm{e} \mathrm{e}^k = \mathrm{e}^k$• 故, $L_n u = e^k = (\sin nx)^k$, 亦即,

$$u'' + n^2 u = (\sin nx)^k, \tag{55}$$

其边值条件如下

$$u(0) = u(\pi) = 0\cdot \tag{56}$$

我们先来介绍一个引理•

引理 3 下列方程

$$u'' + \alpha u = (\sin \omega x)^l \qquad (l \in \mathbf{Z}^+), \tag{57}$$

的特解是

1) 如果 l 是偶数且 $\alpha - i^2\omega^2 \neq 0$ $(i = 0, 2, \ldots, l - 2, l)$, 则

$$u = \sum_{i=0}^{l/2} a_{2i}(\sin \omega x)^{2i}, \tag{58}$$

其中

$$a_l = \frac{1}{\alpha - l^2\omega^2},\ a_j = -\frac{(j+2)(j+1)\omega^2}{\alpha - j^2\omega^2} a_{j+2} \qquad (j = l-2, l-4, \ldots, 2, 0), \tag{59}$$

2) 如果 l 是奇数且 $\alpha - i^2\omega^2 \neq 0$ $(i = 1, 3, \ldots, l - 2, l)$, 则

$$u=\sum_{i=1}^{(l+1)/2}a_{2i-1}(\sin\omega x)^{2i-1} \tag{60}$$

其中

$$a_l=\frac{1}{\alpha-l^2\omega^2},\ a_j=-\frac{(j+2)(j+1)\omega^2}{\alpha-j^2\omega^2}a_{j+2}(j=l-2,l-4,\cdots,3,0)\cdot \tag{61}$$

证明 假设

$$u=\sum_{i=0}^{l}a_i(\sin\omega x)^i \tag{62}$$

满足(47)，则有

$$\sum_{l=2}^{l}i(i-1)\omega^2a_i(\sin\omega x)^{i-2}+\sum_{i=0}^{l}(\alpha-i^2\omega^2)a_i(\sin\omega x)^i=(\sin\omega x)^l\cdot \tag{63}$$

进一步得

$$\begin{cases}(\alpha-l^2\omega^2)a_l=1,\\ (i+2)(i+1)\omega^2a_{i+2}+(\alpha-i^2\omega^2)a_i=0(i=l-2,l-4,\cdots)\cdot\end{cases} \tag{64}$$

若 l 为偶数且 $\alpha-i^2\omega^2\neq0(i=0,2,\cdots,l-2,l)$，则很容易得到(59)• 而 $a_1,a_3,\cdots,a_{l-1}$ 是任意常数，我们当然可以令它们为零• 这样我们就证明了 1)•

同样地，2) 也是成立的• □

推论 1 (55) 的一个特解是

$$u^*=\sum_{i=0}^{k/2}a_i(\sin\omega x)^{2i}, \tag{65}$$

$a_i(i=0,1,\cdots,k/2)$ 由下式给出

$$a_0=-C,\ a_1=\frac{1}{2}C,\ a_i=\frac{(2i-3)!!}{(2i)!!}C$$
$$\left(i=2,\cdots,k/2,C=\frac{k!!}{(k-3)!!n^2(1-k^2)}\right)\cdot$$

证明 根据引理 3，(55) 的一个特解是

$$u^*=\sum_{i=0}^{k/2}a_i(\sin\omega x)^{2i}, \tag{67}$$

其中 $a_{k/2}=\dfrac{1}{(1-k^2)n^2},\ a_i=\dfrac{2i+2}{2i-1}a_{i+1}\quad(i=0,1,\cdots,k/2-1)\cdot$

$$a_i=\frac{2i+2}{2i-1}a_{i+1}=\frac{(2i+2)((2i+4)}{(2i-1)(2i+1)}a_{i+2}=\cdots=\frac{k!!}{(2i)!!}\frac{a_{k/2}}{\prod_{j=i}^{k/2-1}(2j-1)}, \tag{68}$$

$$\prod_{j=i}^{k/2-1}(2j-1)=\begin{cases}\dfrac{(k-3)!!}{(2i-3)!!} & (i=2,3,\cdots,k/2-1),\\ (k-3)!! & (i=1),\\ -(k-3)!! & (i=0),\end{cases} \tag{69}$$

因而，

$$a_i=\begin{cases}-C & (i=0),\\ \dfrac{1}{2}C & (i=1),\\ \dfrac{(2i-3)!!}{(2i)!!}C & (i=2,3,\cdots,k/2),\end{cases} \tag{70}$$

其中 $C = \dfrac{k!!}{(k-3)!!}a_{k/2} < 0$. □

据上所述, (55) 和(56) 的解为

$$u = c_1\sin nx + c_2\cos nx + \sum_{i=0}^{k/2}a_i(\sin nx)^{2i}, \tag{71}$$

$a_i(i = 0, 1, \cdots, k/2)$ 由(70) 给出, $u \in M$, $u(0) = u(\pi) = 0$. 由于 $u \in M$, 故 $\langle e, u\rangle = 0$, 即 $c_1 = 0$(n 为偶数并运用引理 1). 由(56) 得知, $c_2 = -a_0$.

现在来确定 $\langle e, e^{k-1}, L_n^{-1}P_e e^k\rangle$(参见(54)).

$$\begin{aligned}\langle e, e^{k-1}L_n^{-1}P_e e^k\rangle = {} & \langle e^k, u\rangle = \\ & \sum_{i=0}^{k/2}a_i\langle(\sin nx)^k, (\sin nx)^{2i}\rangle = \\ & -c\pi\left[\frac{(k-1)!!}{k!!} - \frac{(k+1)!!}{2(k+2)!!} - \sum_{i=2}^{k/2}\frac{(2i-3)!!(k+2i-1)!!}{(2i)!!(k+2i)!!}\right] = \\ & -\frac{(k-1)!!}{k!!}C\pi\cdot G_k,\end{aligned} \tag{72}$$

其中 $G_k = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2(k+2)} - \displaystyle\sum_{i=2}^{k/2}\frac{(2i-3)!!(k+1)(k+3)\cdots(k+2i-1)}{(2i)!!(k+2)(k+4)\cdots(k+2i)}$. 故,

$$g_{x^{2k-1}}(0, n^2) = \frac{n^4(k!)^2(k-1)!!N_kC\pi}{k!!}G_k. \tag{73}$$

对不同的 k, G_k 会有不同的符号. 例如, 当 $k = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$, $G_k > 0$; 而当 $k = 20$, $G_k < 0$. 因为 $C < 0$, 所以, $g_{x^{2k-1}}$ 和 $-G_k$ 的符号相同.

情形 3　k 和 n 为偶数$(4 \leqslant k \in \mathbf{Z}^+)$. 在$(u, \mu) = (0, n^2)$ 处,

$$g = g_x = \cdots = g_{x^{2k-2}} = g_\mu = 0,\ g_{x^{2k-1}} = \frac{n^4(k!)^2(k-1)!!N_kC\pi}{k!!}G_k,\ g_{x\mu} = \frac{\pi}{2}.$$

定理 4　假如 k 和 n 为偶数$(4 \leqslant k \in \mathbf{Z}^+, n \in \mathbf{Z}^+)$. 又假定 $G_k \neq 0$, 那么 $g(x, \mu)$ 强等价于 $-\operatorname{sgn}G_k x^{2k-1} + (\mu - n^2)x$. 进一步, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = F(u, \mu)$ 在$(0, n^2)$ 处的分叉图类似于图 1 如果 $G_k > 0$, 或类似于图 3 如果 $G_k < 0$.

注记 2　定理 4 不包含情形 $G_k = 0$. 若 $G_k = 0$, 则我们需要求 g 关于 x 的更高阶导数 $g_{x^{K(k)}}$ 以使得 $g_{x^{K(k)}}(0, n^2) \neq 0$.

[参 考 文 献]

[1] Fife P C. Mathematical Aspects of Reaction and Diffusing Systems [M]. Lecture Notes in Biomathematics, Berlin/Heidelberg/New York: Springer_Verlag, 1979.

[2] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 1994.

[3] Chow S N, Hale J K. Methods of Bifurcation Theory [M]. New York: Springer_Verlag, 1982.

[4] Golubitsky M, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory [M]. New York: Springer_Verlag, 1985.

[5] 陆启韶. 分岔与奇异性[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1995.

[6] 唐云. 对称性分岔理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

A Note on Bifurcations of $u'' + \mu(u - u^k) = 0 (4 \leqslant k \in \mathbf{Z}^+)$

Li Changpin
(Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P R China)

Abstract: Bifurcations of one kind of reaction_diffusion equations, $u'' + \mu(u - u^k) = 0$ (μ is a parameter, $4 \leqslant k \in Z^+$), with boundary value condition $u(0) = u(\pi) = 0$ are discussed. By means of singularity theory based on the method of Liapunov_Schmidt reduction, satisfactory results can be acquired.

Key words: Liapunov_Schmidt reduction; singularity theory; bifurcation