应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 03_0253_07

具有次线性和超线性项的非线性椭圆型方程组最小正解的存在性

尼考里 塔夫列

(美国宾夕法尼亚州立大学 数学系, PA 16802)

(钱伟长推荐)

摘要: 证明了对每一 $(0,\ )$, 当 >0 时半线性椭圆型方程组

$$\begin{cases} -\ u = \ u\,|\,u\,|^{q-1} + \ u\,|\,u\,|^{p-1} - v & (\text{在}\ \ \text{中}), \\ -\ v = \ u - \ v & (\text{在}\ \ \text{中}), \\ u = v = 0 & (\text{在}\ \ \text{上}) \end{cases}$$

有最小正解 $(u\ ,v\ )$ 其中 $\mathbf{R}^N(N\ \ 2)$ 为具有光滑边界的有界区域, $0<\ q<\ 1<\ p$ 并且 $u\ ,v\ $ 关于 是严格递增的

关 键 词: 反应扩散方程; 正解; 非线性方程
中图分类号: O175 25 文献标识码: A

引 言

考虑椭圆型方程组

$$(1\ )\quad \begin{cases} -\ u = f(\ ,x,u) - v & (\text{在}\ \ \text{内}), \\ -\ v = \ u - \ v & (\text{在}\ \ \text{内}), \\ u = v = 0 & (\text{在}\ \ \text{上}), \end{cases}$$

其中 为 $\mathbf{R}^N(N\ \ 2)$ 中具有光滑边界的有界区域, 为实的参数

上述方程组的解 (u,v) 也即是反应扩散方程组的稳态解, 反应扩散方程来自某些应用, 例如数学生态学、化学反应和燃烧理论

在这些应用中, 常数 和 取正值, 本文全文沿用这一假设

注意到 $(1\ )$ 中第 2 式可由 u 解得 v, 因此 $(1\ )$ 方程等价于积分微分方程

$$(1\ )\quad \begin{cases} -\ u + Bu = f(\ ,x,u) & (\text{在}\ \ \text{内}), \\ u = 0 & (\text{在}\ \ \text{上}) \end{cases}$$

其中 Bu 为如下问题的解:

$$\begin{cases} -\ v + \ v = \ u & (\ \ \text{内}), \\ v = 0 & (\ \ \text{上}) \end{cases}$$

另一方面, 在 上, 在零 Dirichlet 边界条件下, 有

本文原文为英文, 吴承平译, 陈明伦, 杨砚校
收稿日期: 1999_03_01

$B = \quad (- \quad + \quad)^{-1}$

利用线性椭圆型方程的 L^p 理论, 可以看出 B 为 $W^{2,p}(\quad) \quad H_0^1(\quad)$ 内 $L^p(\quad)$ 的有界线性算子; 根据 Schauder 理论, B 为H lder 空间 $C(\quad)$ 到 $C^{2+}(\quad)$ 的映射

定义 算子

$T \quad - \quad + B : L^2(\quad) \quad L^2(\quad), \quad D(T) = H^2(\quad) \quad H_0^1(\quad)$

显然, T 在区域 $D(T)$ 中是对称的, 即对所有 $u_1, u_2 \quad D(T), \quad Tu_1, u_2 = u_1, Tu_2$, 这里 , 表示 L^2 内积

若 $0 < \ ^1 < \ _2 \quad _3$, 及$\{ \ _k \}$为 中具零Dirichlet边界条件的$-$ 的特征值和特征函数, 则容易看出: $_k$ 也是 T 的特征函数, 对应的修正特征值为

$$\hat{}_k = \ _k + \frac{}{+ \ _k} \qquad (k = 1, 2, \quad)$$

详细分析表明, 算子 T 的谱 (T) 刚好由这些特征值组成, 其实这是对每一 $(T), T$ 的可解集的简单推论, 可解算子 $T = (T - \quad I)^{-1}$ 是紧的(见[1] 推论 1 2)

我们知道, 如果 $+ \ _1 > \sqrt{\ }$ 且 $2\sqrt{\ } - \quad < \hat{}_1$, 则 T 为正算子(见[1] 推论 1 3) 这就是所谓方程

$$\begin{cases} - \quad u + Bu - \quad u = g(x) & (\text{在} \quad \text{内}), \\ u = 0 & (\text{在} \quad \text{上}) \end{cases}$$

的极大值原理

因此, 以下强极大值原理成立: 如果在 中 $g \quad C(\quad)$ 且 $g \quad 0$, 则在 中 $u > 0$ 且外法向导数 $u / \ v < 0$

注意到, 如果 $> 2\sqrt{\ }$, 则条件 $+ \ _1 > \sqrt{\ }$ 自动满足, 并且此时算子 T 对包括0在内的区间中的 是正的

本文的目的是研究当 $f(\ , \ , u(\ ))$ 为次线性项和超线性项的和时, 即

$f(\ , x, u) = \quad u \mid u \mid^{q-1} + \ u \mid u \mid^{p-1}$

时方程(1) 的正解的存在性, 其中 $\mathbf{R}_+^*$, $0 < q < 1 < p$

记 $(1) = \{ \quad \mathbf{R}_+^* : (1)$ 有正解$\}$ 且 $(1) = \{ \quad \mathbf{R}_+^* : (1)$ 有正解$\}$ 这是根据 $(1) = \quad (1)$ 得出的

在上述条件下, 本文的主要结果如下:

定理 1 如果 $> 2\sqrt{\ }$, 则存在 $(0, + \quad)$ 使 $(0, \quad) \quad (1), (\quad , + \quad) \quad (1) =$ 并且对每一 $(0, \quad)$ 有最小解 $(u \ , v \ ), (u \ , v \ )$ 关于 是严格增的, 即如果 $0 < \ _1 < \ _2 < \quad$, 则在 上 $u_{\ 1} < u_{\ 2}$ 且 $v_{\ 1} < v_{\ 2}$

在过去几年, 对这一问题已有不少研究成果(参见文献[1, 2, 3, 4, 5]) 对这些结果的评价甚至部分评价都不是本文工作的范围 然而我们打算指出如下事实:

1) 上述定理 1 的证明, 只需使用与文献[6] 基本相同的方法即可 证明的基础是构造(1) 的次线性和超线性显式解并应用定理 2

2) 对任意正幂次 $p > 1$, 这些论证都可能成立 特别是, 在区域 上没有任何对称性假设的条件下, 我们得到了 $p \quad 2N/(N - 2)$ 时正解的存在性 (大家知道, 当 $p \quad 2N/(N - 2)$ 时, 是不能应用变分方法的)

1 单调解的构造

下列定理 2 类似于 D. H. Sattinger 在文献[7] 中给出的定理, 其证明方法也相同 为方便读者阅读和保持叙述的完整性, 我们仍详细列出如下:

定理 2 设有两个光滑函数 $u_0(x)$ $v_0(x)$, 它们满足如下条件:

$$\begin{cases} Tu_0 + f(x, u_0) \quad 0 & (\text{在} \quad \text{内}), \\ u_0 \quad 0 & (\text{在} \quad \text{上}); \end{cases} \text{和} \begin{cases} Tv_0 + f(x, v_0) \quad 0 & (\text{在} \quad \text{内}), \\ v_0 \quad 0 & (\text{在} \quad \text{上}) \end{cases}$$

若 f 为域 $\min v_0 \quad u \quad \max u_0$ 上的光滑函数, 并且对所有 x 和 u $\left[\min v_0, \max u_0\right]$, 有 k $(- \hat{}_1, \; - 2\sqrt{\;}]$ 满足 $f/ \; u - k < 0$, 则

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} Tw + f(x, w) = 0 & (\text{在} \quad \text{内}), \\ w = 0 & (\text{在} \quad \text{上}) \end{cases}$$

有正则解 w, 且 $v_0 \quad w \quad u_0$

证明 首先, 我们定义 $F(x, u) = f(x, u) - ku$ 显然 $F/ \; u < 0$, 这说明 F 对第二变量是严格递减的, 我们定义映射 A 如下:

$$Au = v, \text{当} \begin{cases} (T + k)v = - (f(x, u) - ku) & (\text{在} \quad \text{内}), \\ v = 0 & (\text{在} \quad \text{上}) \end{cases}$$

我们发现, 如果 $u \quad v$, 则

$$\begin{cases} (T + k)(Av - Au) = F(x, u) - F(x, v) \quad 0 & (\text{在} \quad \text{内}), \\ Av - Au = 0 & (\text{在} \quad \text{上}) \end{cases}$$

按照极大值原理(见[1] 推论 1 3), 我们得到在 中 $Av \quad Au$

现在定义 $u_1 = Au_0, v_1 = Av_0$, 我们来证明 $u_1 < u_0, v_1 > v_0$(中的严格不等式) 我们有

$$(T + k)(u_1 - u_0) = - (Tu_0 + f(x, u_0)) \quad 0$$

这说明 $u_0 > u_1$, 类似地可得 $v_1 > v_0$ 因此, 由 $u_1 = Au_0$, $u_n = Au_{n-1}$ 定义引入的序列是单调递减的 而类似的序列 $v_1 = Av_0$, $v_n = Av_{n-1}$ 是单调递增的, 由归纳法, 我们得出对一切 n, $v_n < u_n$ 从而有

$$v_0 < v_1 < \quad < v_n < \quad < u_n < \quad < u_1 < u_0$$

分别记 $\underline{u}(x)$, $v(x)$ 为序列 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 的点态极限

可以看出, 当 $u \quad L^p(\quad)$, $p > 1$ 时, 根据 Sobolev 嵌入定理, $(T + k)^{-1}$ 为 $W^{2,p}(\quad)$ 中后者空间到 $C^{1+}(\quad)$, $p > N$ 的映射, 其中 $= 1 - N/p$ 由以上及

$$\begin{cases} u_n = (T + k)^{-1}(- F(x, u_{n-1})), \\ v_n = (T + k)^{-1}(- F(x, v_{n-1})), \end{cases}$$

利用归纳法, 可得对每一 n $\mathbf{N}$, u_n, v_n $C^{1+}(\quad)$ 同时, 在 $C^{1+}(\quad)$ 中, 当 n 时, $u_n \quad u$, $v_n \quad v$ (因为根据受控收敛定理, 在 $L^p(\quad)$ 中当 n 时, $- F(x, u_n) \quad - F(x, u)$, $- F(x, v_n) \quad - F(x, v)$) 根据 Schauder 理论, $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 在 $C^{2+}(\quad)$ 中也是收敛的 因此, 由算子 A 的连续性, u 和 v 是 A 的不动点 所以 u 和 v 是问题(P) 的正则解 证毕

2 (1) 正解的存在性

在本节中, 将证明我们的主要结果, 我们要用到如下引理:

引理 1 假设函数 $f(x, t)$ 有如下性质: 当 $t > 0$ 时, $f(x, t)/t$ 在 t 中是减函数, 设 v 和 w 满足

$$(1_T)\quad \begin{cases} Tu = f(x, v) & (x \quad), \\ v > 0 & (x \quad), \\ v = 0 & (x \quad) \end{cases}$$

及

$$(2_T)\quad \begin{cases} Tw = f(x, w) & (x \quad), \\ w > 0 & (x \quad), \\ w = 0 & (x \quad), \end{cases}$$

则在 中, w v

证明 本引理的证明, 受到[6]中引理 3 3 类似结果证明方法的启发

由 (1_T) 和 (2_T) 我们有

$$vTw - wTv \quad vw\left(\frac{f(x, w)}{w} - f\,\frac{(x, v)}{v}\right)$$

令 (t) 为光滑的非减函数, 且当 t 0 时, $(t) = 0$; 当 t 1 时, $(t) = 1$; 当 t $(0, 1)$ 时, (t) $(0, 1)$ 如同[6], 可得

$$(- v \quad w + w \quad v) \quad (v - w)\,\mathrm{d}x \quad , \tag{1}$$

其中 $(t) \stackrel{\text{def}}{=} (t/\ )$, 现在证明当 0 时,

$$(vBw - wBv) \quad (v - w)\,\mathrm{d}x \quad 0$$

注意到

$$(vBw - wBv) \quad (v - w)\,dx =$$

$$w[B(v \quad (v - w)) - \quad (v - w)B(v)]\,\mathrm{d}x =$$

$$_{[v > w]} w[B(v \quad (v - w)) - \quad (v - w)B(v)]\,\mathrm{d}x$$

记 $QE(x)$ 为

$$QE(x) = w[B(vHE(v - w)) - HE(v - w)B(v)]\#$$

可以证明

$$QE(x) \ y\ 0,\ \text{当 } E g 0, \text{对每一} x \ I \ [v > w]\#$$

为此, 设 x_0 I $[v > w]$, 则我们有 $r > 0$, 满足 $B(x_0, r)$ A $[v > w]$, 设 $M_{(x_0, r)} = \min_{B(x_0, r)}(v(x) - w(x)) > 0$# 显然, 当 $0 < E[\ M_{(x_0, r)}$ 时, 有 $(v(x) - w(x))/E \setminus 1$, 从而对所有 E I $(0, M_{(x_0, r)}]$ 和 x I $B(x_0, r)$ 有 $HE(v(x) - w(x)) = 1$# 因此, 对每一 $0 < E[\ M_{(x_0, r)}$, 在 $B(x_0, r)$ 上, $QE(x) = 0$# 由受控收敛定理, 可得

$$Q_{[v > w]} QE(x)\,\mathrm{d}x \ y\ 0, \quad (\text{当 } E g 0)\#$$

由以上证明及(1)式, 有

$$Q_{[v > w]} vw\left[\frac{f(x, w)}{w} - \frac{f(x, v)}{v}\right] HE(v - w)\,\mathrm{d}x \ [\ \underset{Eg0}{}$$

$$E + Q_{[v > w]} QE(x)\,\mathrm{d}x \ y\ 0\#$$

那么可导出

$$Q_{[v>w]} vw\left[\frac{f(x,w)}{w}-\frac{f(x,v)}{v}\right]\mathrm{d}x \;[\; 0\#$$

但是在 $[v > w]$ 上 $f(x,v)/v < f(x,w)/w$, 并且因此这些集的测度必须为 0# 所以 v [w# 我们完全证明了引理 1# t

引理 2 如果 C > 2$\sqrt{\mathrm{D}}$, 则问题

$$(\mathrm{PK})\quad\begin{cases} Tu = Ku \mid u\mid^{q-1} & (\text{在 } 8 \text{ 中}),\\ u = 0 & (\text{在 } 58 \text{ 上})\end{cases}$$

对每一 K I $\mathbf{R}_+^*$ 有唯一正解#

证明 设 5: $H_0^1(8)$ y $\mathbf{R}$ 为与方程(PK) 相关联的泛函, 它定义如下:

$$5(u) = \frac{1}{2}Q_8(\mid u\mid^2 + uBu)\,\mathrm{d}x - \frac{K}{q+1}Q_8 \mid u\mid^{q+1}\mathrm{d}x\#$$

考虑到 5 I $C^1(H_0^1(8),\mathbf{R})$, 而 5 的临界点是方程(PK) 的弱解# 如同文献[4] 中引理 314, 我们可以证明泛函 5(u) 满足Palais_Smale条件# 下面将证明 5 也是有界的, 由此可知 5 具有下确界# 令 u_0 I $H_0^1(8)$, 满足如下条件:

$$5(u_0) = \min_{H_0^1(8)} 5\,(u)\# \tag{2}$$

因为 5(u) = 5$(\mid u\mid)$, $P\,u\,I\,H_0^1(8)$, 我们可设 u_0 \ 0, 容易看出, u_0 时(PK) 的弱解, 并且在 $H_0^1(8)$ 中 u_0 是唯一解, 它满足 u_0 \ 0 和(2) 式, 同时因为

$$5(u_0) - 5(u) \;[\; Q_8\, u_0\,(u_0 - u)\,\mathrm{d}x + Q_8 Bu_0(u_0 - u)\,\mathrm{d}x -$$

$$KQ_8 u_0 \mid u_0\mid^{q-1}(u_0 - u)\,dx = 0 \quad (P\,u\,I\,H_0^1(8)),$$

可知 u_0 是方程(PK) 的唯一正的弱解, 为完成定理的证明, 利用正则理论, 可知 u_0 是(PK) 在经典意义上的解# 最后, 根据强极大值原理, 可得在 8 中, $u_0 > 0$# t

定理 1 的证明 首先因为

$$T(EU_1) = EK_1 U_1 \;[\; KE^q U_1^q + E^p U_1^p,$$

最低限度对所有 $0 < E <$ EK, EU_1 是$(1K)$ 的次线性解#

其次, 若用 W 表示方程

$$\begin{cases} TW = 1 & x\; I\; 8,\\ W = 0 & x\; I\; 8\end{cases}$$

的唯一正解, 则可求得 $K_0 > 0$, 使对一切 $0 < K$ [K_0 有 D = $D(K) > 0$, 且

$$\mathrm{D} = T(DW) \;\backslash\; KD^q +W+_{]}^{q} + D^p + W+_{]}^{p}\#$$

取充分小的 E > 0, 在 8 上我们得到 $EU_1 < DW$# 则由定理 2, 我们有解 EU_1 [u [DW# 设

$$+ = \sup\{K > 0: (1K)\text{ 有正解}\}\#$$

因此有

$$+ \;\backslash\; K_0 > 0\# \tag{3}$$

可以看到, 存在一个正常数 $a > 0$, 使

$$at^q + t^p > K_1 t,\quad P\,t\,I\,\mathbf{R}_+^*\#$$

如果 K I R$(1K)$, 用 U_1 乘$(1K)$ 并在 8 上积分, 得

$(K_1 u - Ku^q - u^p) U_1 dx = 0$#

这就说明了 K < a 并且

+ [a#　(4)

设0 < K< + 并设L I (K, +), 则 u_1 是(1L) 的解# 容易说明 u_1 是(1K) 的超线性解# 选定 E > 0 充分小, 则有 $EU_1 <$ u_1, 再由定理 2, (1K) 有解, 即

(0, +) A R(1K)#　(5)

由(3) ~ (5) , 我们得出

0 < + <] , (0, +) A R(1K), R(1K) H (+,]) = <#

现在证明对每一 K I R(1K), (1K) 最小正解的存在性# 为此, 记 wK为方程

$$\begin{cases} Tw = Kw \mid w \mid^{q-1}, (x \ I \ 8), \\ w = 0, \qquad (x \ I \ 5 \ 8) \end{cases}$$

的唯一正解(由引理 2 我们已知其存在)# 容易看出, 对每一 K I R(1K), 有解 uK> 0, 并且此解满足不等式 $TuK \backslash Ku_K^q$# 应用引理 1 并取 w = uK, 可导出满足 uK\ wK的(1K) 的任意解 uK# 由于 wK是(1K) 的次线性解, 利用单调迭代可得

$$v_0 = wK, \quad v_n = (- \$ + B)^{-1}(Kv_n^q + v_n^p),$$

v_n h uK, uK为(1K) 的解#

现在证明 uK为(1K) 的最小正解, 实际上, 如果 u 为(1K) 的其他正解, 则由归纳法可以证明 $u > v_n$, P n I N# 因此 uK [u #

现在容易看出, (uK, vK= BuK) 表示系统(1K) 的最小正解#

为完成证明, 还需证明 K y (uK, vK) 在上述意义上是严格增的# 为此, 设 A, B I R(1K), A < B, 则 uB为(1A) 的超线性解, 取充分小的 E > 0, 得 $EU_1 <$ uB# 由定理 2 可求得(1A) 的解 u^*_A, EU_1 [u^*_A [uB# 因为(uA, vA = BuA) 是(1A) 的最小正解, 因此

$$uA \ [\ u^*_A \ [\ uB \quad vA \ [\ Bu^*_A \ [\ vB\#　(6)$$

应用强极大值原理, 由于 uA X uB, vA X vB, 即可得到(6) 中的严格不等式# 定理 1 证毕#

t

注 1　显然, 证明中用到了如下关系, 即

+ uK+] g 0, + vK+] g 0,　当 K g 0#

注 2　由定理 1 的证明可看出, u^q 可用 u = 0 附近具有 u^q 性能的任意凹函数来代替, 而 u^p 可用 u = 0 和 u = +] 附近具有 u^p 性能的任意超线性函数来代替#

[参　考　文　献]

[1] de Figueiredo D G, Mitidieri E. A maximun principle for an elliptic system and applications to semilinear problems[J]. SIAM J Math Anal, 1986, **17:** 836~ 849.

[2] Chiappinelli R, de Figueiredo D G. Bifurcation from infinite and multiple solutions for an elliptic system[Z]. Relatorio de Pesquisa (junho_1992), Univ Estadual de campinas, Brasil.

[3] Lazer A C, McKenna P J. On steady state solutions of a system of reaction_diffusion equations from biology[J]. Nonlinear Anal T M A, 1982, **6:** 523~ 530.

[4] de B e Silva E A. Existence and multiplicity of solutions for semilinear elliptic systems[J]. NoDEA

Nonlinear Differential Equations Appl, 1994, **1:** 339~ 363.

[5] Tarfulea N. On a reaction_diffusion system involving the critical exponent[J]. Rer Mat Univ Complut Madrid, 1998, **11:** 461~ 472.

[6] Ambrosetti A, Brezis H, Cerami G. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems[J]. J Funct Anal, 1994, **122:** 519~ 543.

[7] Sattinger D H. Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems[J]. Indiana Univ Math J, 1972, **21:** 979~ 1000.

[8] Boccardo L, Excobedo M, Peral I. A dirichlet problem involving critical exponent[Z]. Quaderno n11/1993, CNR_Roma, Italia.

[9] Rothe F. Global existence of branches of stationary solutions for a system of reaction diffusion equations from biology[J]. Nonlinear Anal T M A, 1981, **5:** 487~ 498.

Existence of the Minimal Positive Solution of Some Nonlinear Elliptic Systems When the Nonlinearity is the Sum of a Sublinear and a Superlinear Term

Nicolae Tarfulea

(Department of Mathematics, the Pennsylvania State University, University Park, PA 16902, U S A)

Abstract: It is shown that there exists + > 0 such that, for every K I (0, +), *the semilinear elliptic system:* $-\$u = Ku | u |^{q-1} + u | u |^{p-1} - v$ *in* 8, $-\$v = Du - Gv$ *in* 8, $u = v = 0$ on 5 8, where 8 I $\mathbf{R}^N$ *(N \ 2) is a bounded domain with smooth boundary and* $0 < q < 1 < p$, *has a minimal positive solution* (u_K, v_K). *Moreover:* u_K *and* v_K *are strictly increasing with respect to K.*

Key words: reaction diffusion system; positive solution; nonlinear equation