应用数学和力学, 第 21 卷 第 3 期(2000 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 03_0260_05

混合型脉冲微分方程周期解的存在性

房 辉

(四川大学 数学科学院, 成都 610064)

(李继彬推荐)

摘要: 通过构造差分方程的周期序列解, 研究了一类混合型脉冲微分方程周期解的存在性

关 键 词: 混合型; 脉冲微分方程; 周期解

中图分类号: O175 文献标识码: A

1 问 题 提 出

脉冲微分方程是微分方程的一个新的重要分支 1989 年, 专著[1] 、[2] 曾系统地总结了脉冲常微分方程的研究成果 近年来, 又有许多文献对脉冲时滞微分方程解的振动性、渐近性、稳定性等问题进行了研究(如文[3~ 5]) 但关于脉冲微分方程周期解的存在性的研究则还很少

本文考虑脉冲微分方程

$$(\mathrm{E})\begin{cases} x\ (t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x([t]_0) + A_2(t)x([t-1]_0) + \\ \qquad A_3(t)x([t+1]_0) + f(t) \qquad (t \quad n,\ n \quad \mathbf{Z}), & (1) \\ x(n^+) - x(n^-) = bx(n) \qquad (n \quad \mathbf{Z}), & (2) \end{cases}$$

其中 $\mathbf{Z}$ 为整数集, $A_i(t) \quad C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $A_i(t+1) = A_i(t)(i = 0, 1, 2, 3)$, $f \quad C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $f(t+ \quad) = f(t)$, $\quad = n_0/m_0$, $n_0, m_0 \quad \mathbf{Z}^+$ $(\mathbf{Z}^+$ 正整数集), m_0 或为 1 或与 n_0 互素, 常数 $b \quad -1$, $[t]_0$ 表示不小于 t 的最小整数

当 $n < t < n+1$ 时, 变量的偏差 $_1(t) = t - [t]_0 = t - (n+1) < 0$, $_2(t) = t - [t-1]_0 = t - n > 0$, $_3(t) = t - [t+1]_0 = t - (n+2) < 0$ 因此方程(E) 是混合型方程

本文将研究方程(E) 周期解的存在性

称函数 $x: \mathbf{R} \quad \mathbf{R}$ 是方程(E) 的解, 若它满足条件;

1) 当 $t \quad n(n \quad \mathbf{Z})$ 时 $x(t)$ 连续可微且满足方程(1);

2) 对于 $n \quad \mathbf{Z}$, $x(n^+)$、$x(n^-)$ 存在, $x(n^-) = x(n)$(即 $x(t)$ 在 $t = n$ 处左连续) 且(2) 成立

2 主 要 结 果

定理 假定下列条件之一成立:

收稿日期: 1998_10_15; 修订日期: 1999_11_09
基金项目: 云南省科委应用基础研究基金资助项目(97A1016Q)
作者简介: 房辉(1966~) , 男, 博士, 副教授.

a) $B_0B_1(B_0^2-B_1^2)\neq 0,\quad B_2=0$;

b) $B_1B_2(B_1^2-B_2^2)\neq 0,\quad B_0=0$;

c) $B_0B_2\neq 0,\ (B_2-B_0)^2\neq B_1^2,\ B_1^2+4B_0B_2>0$;

d) $B_0B_2\neq 0,\ (B_2-B_0)^2\neq B_1^2,\ B_1^2+4B_0B_2=0$;

其中

$$B_0=(1+b)\exp\left[\int^1 A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]+\int_0^1\exp\left[\int_\tau^1 A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]A_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$B_1=1-\int_0^1\exp\left[\int_\tau^1 A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]A_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$B_2=-\int_0^1\exp\left[\int_\tau^1 A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]A_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

则方程(E)有唯一的 m_0 _周期解

证　若 $x(t)$ 是方程(E)在 R 上的一个解，则有

$$x(t)=x(t_0)\exp\left[\int^t A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]+\int_{t_0}^t\exp\left[\int_\tau^t A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]A_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,C_{n+1}+$$
$$\int_{t_0}^t\exp\left[\int_\tau^t A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]A_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,C_n+\int_{t_0}^t\exp\left[\int_\tau^t A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]A_3(\tau)\,d\tau\,C_{n+2}+$$
$$\int_{t_0}^t\exp\left[\int_\tau^t A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]f(\tau)\,d\tau\qquad(n<t_0\leq t\leq n+1,\ n\in Z),\tag{3}$$

其中 $C_n=x(n),\ n\in Z$

令 $t_0\to n^+$，注意到 $x(n^+)=(1+b)x(n)$，则得

$$x(t)=(1+b)\exp\left[\int_n^t A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]C_n+\int_n^t\exp\left[\int_\tau^t A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]A_1(\tau)\,d\tau\,C_{n+1}+$$
$$\int_n^t\exp\left[\int_\tau^t A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]A_2(\tau)\,d\tau\,C_n+\int_n^t\exp\left[\int_\tau^t A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]A_3(\tau)\,d\tau\,C_{n+2}+$$
$$\int_n^t\exp\left[\int_\tau^t A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\qquad(n<t\leq n+1)\tag{4}$$

再令 $t\to(n+1)^-$，由 $x(t)$ 的左连续性知下列式子成立：

$$-\int_n^{n+1}\exp\left[\int_\tau^{n+1}A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]A_3(\tau)\,d\tau\,C_{n+2}+\left(1-\int_n^{n+1}\exp\left[\int_\tau^{n+1}A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]A_1(\tau)\,d\tau\right)C_{n+1}-$$
$$\left((1+b)\exp\left[\int_n^{n+1}A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]+\int_n^{n+1}\exp\left[\int_\tau^{n+1}A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]A_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)C_n=$$
$$\int_n^{n+1}\exp\left[\int_\tau^{n+1}A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

从而有

$$B_2C_{n+2}+B_1C_{n+1}-B_0C_n=h_n,\tag{5}$$

其中

$$h_n=\int_n^{n+1}\exp\left[\int_\tau^{n+1}A_0(s)\,\mathrm{d}s\right]f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

差分方程(5)所对应的齐次差分方程为

$$B_2C_{n+2}+B_1C_{n+1}-B_0C_n=0\tag{6}$$

下分 4 种情形讨论：

情形 1　条件 a) 成立　此时(5) 变为

$$B_1C_{n+1} - B_0C_n = h_n, \tag{7}$$

(6) 变为

$$B_1C_{n+1} - B_0C_n = 0 \tag{8}$$

从而 $C_n = K\ ^n$ 是(8) 的通解, 其中 $= B_0/B_1$, K 为任意常数

定义一序列 $\{C_n\}$ 为

$$C_n = \begin{cases} K \ {}_{m \quad n-1} \ ^{n-(m+1)} h_m & (| \quad | < 1), \\ K \ {}_{m \quad n} \ ^{n-(m+1)} h_m & (| \quad | > 1), \end{cases} \tag{9}$$

其中常数 K 待定

下证存在 K 使得 $\{C_n\}$ 是(7) 的序列解　事实上, 将 C_n 代入(7), 对 $| \quad | < 1$, 得

$$B_1K \ {}_{m \quad n} \ ^{n-m}h_m - B_0K \ {}_{m \quad n-1} \ ^{n-(m+1)}h_m = h_n$$

因 h_n 的系数为 1, 故 $K = 1/B_1$

对 $| \quad | > 1$, 类似可得 $K = -1/B_1$

由此得到(7) 的一个序列解

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{1}{B_1} \ {}_{m \quad n-1} \ ^{n-(m+1)}h_m & (| \quad | < 1), \\ -\dfrac{1}{B_1} \ {}_{m \quad n} \ ^{n-(m+1)}h_m & (| \quad | > 1) \end{cases} \tag{10}$$

因 f 是 _周期的, $= n_0/m_0$　故易知 $\{h_n\}_{n \quad \mathbf{Z}}$ 是 m_0 _周期序列, 即 $h_{n+m_0} = h_n$ (对任意 $n \quad \mathbf{Z}$)　从而可知由(10) 确定的 $\{C_n\}_{n \quad \mathbf{Z}}$ 也是 m_0 _周期序列　于是可知由(4) 定义的 $x(t)$ 是(E) 的一个 m_0 _周期解

设 $x_0(t)$ 是方程(E) 的另一 m_0 _周期解, 则 $x_0(n) - x(n)$ 是齐次差分方程(8) 的解, 因此存在常数 K 使得 $x_0(n) - x(n) = K\ ^n$　因 $\{x_0(n)\}$、$\{x(n)\}$ 均为周期序列, 是有界的, 而 $| \quad | \quad 1$, 故必有 $K = 0$, 即 $x_0(n) = x(n)\ (n \quad \mathbf{Z})$, 从而由(4) 知 $x_0(t) \quad x(t)\ (\quad t \quad \mathbf{R})$

情形 2　条件 b) 成立　此时(5) 变为

$$B_2C_{n+2} + B_1C_{n+1} = h_n, \tag{11}$$

(6) 变为

$$B_2C_{n+2} + B_1C_{n+1} = 0, \tag{12}$$

从而 $C_n = K\ ^n$ 是(12) 的通解, 其中 $= -\dfrac{B_1}{B_2}$, K 为任意常数

定义一序列 $\{C_n\}$ 为

$$C_n = \begin{cases} K \ {}_{m \quad n-1} \ ^{n-(m+1)} h_{m-1} & (| \quad | < 1), \\ K \ {}_{m \quad n} \ ^{n-(m+1)} h_{m-1} & (| \quad | > 1) \end{cases}$$

其中常数 K 待定

以下证明与情形 1 类似, 从略

情形 3　条件 c) 成立　此时(6) 对应的特征方程为

$$B_2 \quad ^2 + B_1 \quad - B_0 = 0 \tag{13}$$

显然在 c) 成立的条件下, (13) 有两个非零实根 $_1$, $_2$, 且 | $_1$| 1, | $_2$| 1, $_1$ $_2$

定义一序列 $\{C_n\}$ 为

$$C_n = \begin{cases} K_1 \sum_{m \quad n-1} \ _1^{n-(m+1)} h_m + K_2 \sum_{m \quad n-1} \ _2^{n-(m+1)} h_m, & | \ _1| < 1, | \ _2| < 1, \\ K_1 \sum_{m \quad n-1} \ _1^{n-(m+1)} h_m + K_2 \sum_{m \quad n} \ _2^{n-(m+1)} h_m, & | \ _1| < 1, | \ _2| > 1, \\ K_1 \sum_{m \quad n} \ _1^{n-(m+1)} h_m + K_2 \sum_{m \quad n-1} \ _2^{n-(m+1)} h_m, & | \ _1| > 1, | \ _2| < 1, \\ K_1 \sum_{m \quad n} \ _1^{n-(m+1)} h_m + K_2 \sum_{m \quad n} \ _2^{n-(m+1)} h_m, & | \ _1| > 1, | \ _2| > 1 \end{cases} \tag{14}$$

其中常数 K_1、K_2 待定

下证存在 K_1、K_2 使得 $\{C_n\}$ 是差分方程(5) 的解, 事实上, 将 C_n 代入(5), 对 | $_1$| < 1, | $_2$| < 1, 得到

$$\begin{cases} B_2(K_1 \ _1 + K_2 \ _2) = 1, \\ K_1 + K_2 = 0 \end{cases}$$

解此方程有

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{1}{B_2(\ _1 - \ _2)} \\ K_2 = \dfrac{1}{B_2(\ _2 - \ _1)} \end{cases}$$

因此, 当 | $_1$| < 1, | $_2$| < 1 时, 得到差分方程(5) 的一个序列解

$$C_n = \frac{1}{B_2(\ _1 - \ _2)} \sum_{m \quad n-1} \ _1^{n-(m+1)} h_m + \frac{1}{B_2(\ _2 - \ _1)} \sum_{m \quad n-1} \ _2^{n-(m+1)} h_m$$

对其它情形, 能类似写出(5) 的解的表达式, 以下证明与情形 1 类似, 从略

情形 4　条件 d) 成立　此时(13) 有一对非零实根 $_1$, $_2$, 且 $_1$ = $_2$, | $_1$| 1

定义一序列 $\{C_n\}$ 为

$$C_n = \begin{cases} K_1 \sum_{m \quad n-1} \ _1^{n-(m+1)} h_m + K_2 \sum_{m \quad n-1} [n - (m+1)] \ _1^{n-(m+1)} h_m, & (| \ _1| < 1), \\ K_1 \sum_{m \quad n} \ _1^{n-(m+1)} h_m + K_2 \sum_{m \quad n} [n - (m+1)] \ _1^{n-(m+1)} h_m, & (| \ _1| > 1), \end{cases}$$

其中 K_1, K_2 为待定常数

以上证明与前面类似, 从略

例　考虑脉冲微分方程

$$(\mathrm{E})_0 \quad \begin{cases} x \ (t) = x(t) + \cos(2 \ t) & (t \quad n, n \quad \mathbf{Z}), \\ x(n^+) - x(n^-) = x(n) & (n \quad \mathbf{Z}) \end{cases}$$

显然方程(E)$_0$ 满足本文定理的条件, 故(E)$_0$ 有唯一的周期为 1 的周期解, 容易验证由下式定义的函数 $x(t)$ 即为此解:

$$x(t) = 2p\,\mathrm{e}^{t-n} + \frac{\mathrm{e}^{t-n} - \cos(2 \ t) + 2 \ \sin(2 \ t)}{1 + 4 \ ^2}, \qquad (n < t \quad n + 1, n \quad \mathbf{Z})$$

其中 $p = \dfrac{1 - \mathrm{e}}{1 + 4 \ ^2} \quad \dfrac{1}{2\mathrm{e} - 1}$

[参 考 文 献]

[1] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations[M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[2] Bainov D D, Simeonov P S. Systems With Impulse Effect: Stability, Theory and Applications[M]. New York: John Wiley and Sons, 1989.

[3] Copalsamy K, Zhang B C. On delay differential equations with impulses[J]. J Math Anal Appl, 1989, **139**(1): 110~ 122.

[4] Chen Mingpo, Yu J S, Shen J H. The persistence of nonoscillatory solutions of delay differential equations under impulsive perturbations[J]. Computers Math Applic, 1994, **27**(8): 1~ 6.

[5] Shen Jianhua, Wang Zhicheng. Oscillation and asymptotic behavior of solutions of delay differential equations with impulses[J]. Ann of Diff Eqs, 1994, **10**(1): 61~ 68.

[6] Yuan Rong, Hong Jialin. Almost periodic solutions of linear differential equations with piecewise constant argument[J]. Chinese Ann of Math Ser B, 1998, **19**(1): 59~ 64.

The Existence of Periodic Solutions of Impulsive Differential Equations of Mixed Type

Fang Hui

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P R China)

Abstract: The existence of periodic solutions for a class of impulsive differential equations of mixed type is studied by constructing periodic sequence solutions of difference equations.

Key words: mixed type; impulsive differential equation; periodic solution