应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 03_0285_05

细胞神经网络系统解轨线的长时间性态

蒋耀林

(西安交通大学 理学院, 西安 710049)

(戴世强推荐)

摘要: 研究细胞神经网络系统解轨线的长时间性态,提出了系统关于平衡态集合解轨线稳定的概念,得到了系统在这种意义下稳定的条件 这里的结果推广了目前一些已有的结论并对网络的具体实现具有重要的指导作用

关 键 词: 细胞神经网络系统; 解长时间性态; 稳定性
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

生物大脑是由大量的神经元组成的,单个神经元作用的简单性和通过突触联接起来的神经元整体优美的信息处理能力,一直是人类渴望探求和掌握的 模仿生物神经元系统的人工神经网络系统近十几年来已经取得了巨大成就,有关神经网络系统的研究成果在模式识别、人工智能、图象处理和非线性参数辩识等方面得到了充分应用,目前神经网络系统仍是国际上一个十分活跃的研究领域

细胞神经网络系统是众多神经网络模型中具有典型意义的一种,它是 1988 年由 L. O. Chua 和 L. Yang 提出的(参见文献[1]),该模型是一种 局域联接 的网络,其最大优点之一是极易电路实现,这类网络在信号过程有重要的应用(参见文献[2, 3]等) 通常,具有 n_1 n_1(记其为 n) 个细胞的细胞神经网络系统状态方程,经过某种方式(比如行或列等) 的排序,可以写成

$$\boldsymbol{x}(t) = - \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{Ay}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{I}, \qquad (\mathrm{CNN})$$

这里 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \quad, x_n(t))^{\mathrm{T}}$ $\mathbf{R}^n$ 是状态向量; $\boldsymbol{x}(t)$ $\mathbf{R}^n$ 是状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的导数; $\boldsymbol{n}(t)$ 是输入向量; $\boldsymbol{I}$ 是常数向量,表示偏置电流; $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ $\mathbf{R}^{n\ \ n}$ 是依赖于序排列的常数矩阵 $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), \quad, y_n(t))^{\mathrm{T}}$ $\mathbf{R}^n$ 是依赖于 $\boldsymbol{x}(t)$ 的输出向量,在原始的细胞神经网络系统中 $y_i(t) = \dfrac{1}{2}(|x_i(t) + 1| - |x_i(t) - 1|)$ 本文研究具非单调输出函数的细胞神经网络系统(参见文献[3, 4]),即在 $\mathbf{R}^n$ 空间中存在满足 Lipschitz 条件的有界函数 $f_i(i = 1, \quad, n)$ 使得 $y_i(t) = f_i(x_i(t))$ 在神经网络系统的研究中,解轨线长时间性态是其一个十分重要的内容,经过数年的努力,已经取得了一批这方面的优异成果 虽然细胞神经网络系统提出的时间不长,但

收稿日期: 1998_05_13; 修订日期: 1999_11_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19801027),国家教育部回国人员基金资助项目
作者简介: 蒋耀林(1966~),男,博士,教授,博士生导师.

关于其解轨线长时间性态的工作已有诸多研究, 例如, 文献[1, 3] 等研究了 A 对称条件下的解轨线的收敛性, 文献[2] 等对较特殊的非对称矩阵 A 得到了(CNN) 解轨线收敛的条件, 而文献[5, 6] 则研究了细胞神经网络系统的 Lyapunov 运动稳定性, 等等 本文主要目的就是研究细胞神经网络系统在较广泛意义下解轨线在无穷远处的性态, 提出了系统关于平衡态集合解轨线稳定的概念, 这里的结果不仅推广了文献[1, 3] 等中的工作, 而且也对网络的具体实现具有重要的指导作用 最后我们也指出, 按照通常的做法(例如参见文献[3]), 我们研究具常数输入 $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{u}$ 的细胞神经网络系统解轨线的性态, 如果记 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Bu} + \boldsymbol{I} \quad \mathbf{R}^n$, 则可改写(CNN) 为

$$\boldsymbol{x}(t) = - \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{Ay}(t) + \boldsymbol{v}, \tag{1}$$

这里 $y_i = f_i(x_i(t))(i = 1, \quad , n)$ 特别地, 系统(1) 也是熟知的Hopfield 网络模型, 这样, 本文的结果对这类网络系统也是完全新的

1 主 要 结 果

设 $\mathbf{R}^n$ 空间中的范数为 , 对系统(1) 所描述的细胞神经网络模型, 记 $f(\boldsymbol{x}) = (f_1(x_1), \quad , f_n(x_n))^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{R}^n$ 在这种范数下的 Lipschitz 常数为 L 和 $M = \sup_{x \quad R^n} f(\boldsymbol{x}) \quad < +$ 明显地, 在这些条件下, 系统(1) 对任意初值均存在唯一的解, 也回忆, 系统(1) 的平衡态是满足方程 $- \boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v} = 0$ 的解, 记其全部为集合 $N(\quad)$, 现在给出

定义 如果对状态空间 $\mathbf{R}^n$ 中任一初值 x_0, 系统(1) 的解轨线 $x(t, x_0)$ 均收敛于集合 $N(\quad)$, 即

$$\operatorname{dist}(x(t, x_0), N(\quad)) \quad 0 \quad (t \quad + \quad),$$

则称系统(1) 是关于集合 $N(\quad)$ 解轨线稳定的

引理 1 系统(1) 在状态空间 $\mathbf{R}^n$ 中的平衡态集合 $N(\quad)$ 是非空的

证明 令 $(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}f(\boldsymbol{x}) + v$ 和 $K = \left\{x \quad \mathbf{R}^n: \quad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v} \quad < \quad \boldsymbol{A} \quad M\right\}$, 因为 $: \mathbf{R}^n \quad \mathbf{R}^n$ 满足 $(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{v} \quad < \quad \boldsymbol{A} \quad M$, 所以 $: K \quad K$ 是紧集合 K 中连续自映射, 由著名的 Brouwer 不动点定理知, 在 K 中存在不动点, 即系统(1) 在 $\mathbf{R}^n$ 中有平衡态 (证毕)

引理 2 系统(1) 自 $\mathbf{R}^n$ 中任一初值 x_0 出发的解轨线 $\boldsymbol{x}(t, x_0)$ 均是有界的

证明 由引理 1 知, 系统(1) 在 $\mathbf{R}^n$ 中至少存在一个平衡态 $\boldsymbol{x}^*$, 令 $\boldsymbol{z}(t, z_0) = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}^*$, 这里 $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*$, 则 $\boldsymbol{z}(t) = z(t, z_0)$ 满足初值问题

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{z} = - \boldsymbol{z} + \boldsymbol{A}[f(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}^*) \quad f(\boldsymbol{x}^*)], \\ &\boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{z}_0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

利用 Alekseev 表达式, 初值问题(2) 的解可写成

$$\boldsymbol{z}(t) = \mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{z}_0 + {}_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}\boldsymbol{A}[f(\boldsymbol{z}(s) + \boldsymbol{x}^*) - f(\boldsymbol{x}^*)]\mathrm{d}s, \tag{3}$$

于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}(t) \quad & \quad z_0 \quad + 2 \quad \boldsymbol{A} \quad M \ {}_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)} \\ & \quad z_0 \quad + 2 \quad \boldsymbol{A} \quad M。 \end{aligned}$$

也就是, $\sup_{t \quad \mathbf{R}^+} \quad \boldsymbol{z}(t) \quad < + \quad$, 这里 $\mathbf{R}^+ = [0, + \quad)$, 从而 $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上有界 (证毕)

有了上面两个引理, 我们就可以证明本文的主要结果

定理　如果系统(1)中矩阵是可逆的，并且存在正对角矩阵 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, \quad, d_n)$ 使得矩阵 DA^{-1} 为对称正定的或者为对称负定的，则细胞神经网络系统(1) 是关于集合 $N(\quad)$ 解轨线稳定的

证明　首先，记矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆为 $\boldsymbol{H} = (h_{ij}) \quad \mathbf{R}^{n \quad n}$，对任意 $\boldsymbol{x}_0 \quad \mathbf{R}^n$，也记系统(1) 由 x_0 出发的解轨线为 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t, x_0)$，并对此解轨线构造函数

$$\boldsymbol{V}(t) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DHx} + \sum_{i=1}^{n} d_i \int_0^{x_i} (f_i(\quad) + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}v_j)\,\mathrm{d} \quad, \tag{4}$$

这里 $\boldsymbol{v} = (v_1, \quad, v_n)^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{R}^n$　利用 DH 的对称性，对 $V(t)$ 沿系统(1) 的解轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 求导，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(t) &= - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DHx} + \sum_{i=1}^{n} d_i(f_i(x_i) + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}v_j)x_i = \\ &- \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DHx} + (\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{DHv})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \\ &[\boldsymbol{DH}(-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DHx},\end{aligned}$$

即，$\int_0^t \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\quad)\boldsymbol{DHx}(\quad)\mathrm{d} \quad = \boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{V}(0)$　因此，当 $\boldsymbol{DH}$ 是对称正定的，则 ${}_{\max}(\boldsymbol{DH})\int_0^t \quad \boldsymbol{x}(\quad) \quad ^2\mathrm{d} \quad | \boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{V}(0)|$，这里 ${}_{\min}(DH) > 0$ 是矩阵 DH 的最小特征值；当 DH 是对称负定的，则 $-{}_{\max}(DH)\int_0^t \quad \boldsymbol{x}(\quad) \quad ^2\mathrm{d} \quad | \boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{V}(0)|$　这里 ${}_{\max}(\boldsymbol{D}) < 0$ 是矩阵 DH 的最大特征值　考虑到引理 2，解轨线 $\boldsymbol{x}(t, x_0)$ 是有界的，从而由(4) 式 $\sup_{t \quad +} | \boldsymbol{V}(t) | < +$　这样，无论何种情况，均有 $\int_0^{+} \quad \boldsymbol{x}(\quad) \quad ^2\mathrm{d} \quad < +$　据此，我们得 $\lim_{t \quad +} \inf x(t) = 0$　如果能够进一步证明极限 $\lim_{t \quad +} x(t)$ 存在，则知 $\lim_{t \quad +} x(t) = 0$，即 $\lim_{t \quad +} (-x + Af(x) + v) = 0$，再考虑到 $\boldsymbol{x}(t)$ 的有界性和 $f(x)$ 的连续性，便得解轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 收敛于系统(1) 的平衡态集合 $N(\quad)$，这样便可完成定理的证明　现在来证明极限 $\lim_{t \quad +} \boldsymbol{x}(t)$ 存在，为此首先由系统(1) 知 $\boldsymbol{x}(t)$ 是有界的，可令 $N = \sup_{t \quad R^+} \quad \boldsymbol{x}(t) \quad$，$\quad (0, N^2)$，设 $(\quad) = \left\{ t \quad R^+, \quad \boldsymbol{x}(t) \quad ^2 > \quad \right\}$　考虑到 $\boldsymbol{x}(t)$ 的连续性(利用系统(1) 式) 和关系 $m(\quad(\quad)) < \int_{(\quad)} \quad \boldsymbol{x}(\quad) \quad ^2\mathrm{d} \quad \int_0^{+} \quad \boldsymbol{x}(\quad) \quad ^2\mathrm{d} \quad < +$，便知 $(\quad)$ 是开集和 $m(\quad(\quad)) < +$，利用开集构造定理，可将 $(\quad)$ 写成

$$(\quad) \quad \bigcup_{n=0}^{+} (\quad_n, \quad_n), \tag{5}$$

这里开区间 $(\quad_n, \quad_n)$ 是互不相交的，并且满足 $\quad_{n-1} < \quad_n$ 和 $m(\bigcup_{n=0}^{+} (\quad_n, \quad_n)) < m(\quad(\quad)) + 1$　由 $(\quad)$ 的定义和 $\boldsymbol{x}(t)$ 的连续性，我们有

$$\boldsymbol{x}(\quad_n) \quad ^2 < \quad, \quad \boldsymbol{x}(\quad_n) \quad ^2 < \quad, \quad (n = 0, 1, 2, \quad), \tag{6}$$

利用 $\int_0^{+} \quad \boldsymbol{x}(\quad) \quad ^2\mathrm{d} \quad < +$，得到 $\sum_{n=0} \int_{n}^{n} \quad \boldsymbol{x}(\quad) \quad ^2\mathrm{d} \quad < +$，另一方面，对 s、$t \quad (\quad_n, \quad_n)$，$| \quad \boldsymbol{x}(t) \quad ^2 - \quad \boldsymbol{x}(s) \quad ^2| = (\quad \boldsymbol{x}(t) \quad + \quad \boldsymbol{x}(s) \quad)| \quad \boldsymbol{x}(t) \quad - \quad \boldsymbol{x}(s) \quad | \quad 2N \quad \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(s) \quad 2N \left\| \frac{\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(s)}{t - s} \right\| (\quad_n - \quad_n)$，而由系统(1) 有

$$\frac{\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(s)}{t-s}=\frac{\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(s)}{t-s}+A\frac{f(\boldsymbol{x}(t))-f(\boldsymbol{x}(s))}{t-s}\quad (t\quad s),\tag{7}$$

由于 $\boldsymbol{x}(t)$ 的有界性和 $f(x)$ 是 Lipschitz 连续的, 上式推得 $\left\|\frac{\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(s)}{t-s}\right\|\quad N+\quad A\quad LN$, 于是有

$$|\quad \boldsymbol{x}(t)\quad^2-\quad \boldsymbol{x}(s)\quad^2|<2N^2(1+\quad A\quad L)(\ _n-\ _n),\ s、t\quad(\ _n,\ _n),$$

据此和 $\sum_{n-0}^{+}(\ _n-\ _n)<+$, 对 >0, 存在正整数 $N_0=N_0(\ )$ 使得当 $n>N_n$ 时对 $s、t\quad(\ _n,\ _n)$, 有

$$|\quad \boldsymbol{x}(t)\quad^2-\quad \boldsymbol{x}(s)\quad^2|<\ /8\tag{8}$$

现在证明对任何 $s>t>\ _{N_0}$, 我们有

$$|\quad \boldsymbol{x}(t)\quad^2-\quad \boldsymbol{x}(s)\quad^2|<\ ,\tag{9}$$

这样 $\left\{\quad \boldsymbol{x}(t)\quad^2\right\}$ 便是 Cauchy 网, 从而极限 $\lim_{t\to+}\boldsymbol{x}(t)$ 存在 我们分四种情况证明(9)式

情况 1 $t\setminus(\ /8)$ 和 $s\setminus(\ /8)$ 此时, 立即有 $|\quad \boldsymbol{x}(t)\quad^2-\quad \boldsymbol{x}(s)\quad^2|<\quad \boldsymbol{x}(t)\quad^2+\quad \boldsymbol{x}(s)\quad^2<\frac{}{8}+\frac{}{8}=\frac{}{4}$, (9)式成立;

情况 2 $t\quad(\ /8)$ 但 $s\setminus(\ /8)$ 此时, 记$(\ _{n(t)},\ _{n(t)})$ 是含有 t 的开区间(因此 $n(t)\quad N_0$), 由(6)式和(8)式, 有 $|\quad \boldsymbol{x}(t)\quad^2-\quad \boldsymbol{x}(s)\quad^2|\quad|\quad \boldsymbol{x}(t)\quad^2-\quad \boldsymbol{x}(\ _{n(t)}\quad^2|+\quad \boldsymbol{x}(\ _{n(t)}\quad^2+\quad \boldsymbol{x}(s)\quad^2\quad\frac{}{8}+\frac{}{4}=\frac{3}{8}$, (9) 式成立;

情况 3 $t\setminus(\ /8)$ 但 $s\quad(\ /8)$ 此时, 让 $\ _{n(s)},\ _{n(s)})$ 是含有 s 的开区间(因此 $n(s)\quad N_0+1$), 由(6)式和(8)式, 有 $|\quad \boldsymbol{x}(t)\quad^2-\quad \boldsymbol{x}(s)\quad^2|\quad\quad \boldsymbol{x}(t)\quad^2+\quad \boldsymbol{x}(\ _{n(s)}\quad^2+|\quad \boldsymbol{x}(\ _{n(s)}\quad^2-+\boldsymbol{x}(s)+^2|\ [\ \frac{E}{4}+\frac{E}{8}=\frac{3E}{8}$, (9)式成立;

情况 4 $t\ I\ 8(E/8)$ 和 $s\ I\ 8(E/8)$# 此时, 如果 t 和 s 含于同一开区间$(A_{n_0},\ B_{n_0})$, 则 $|+\boldsymbol{x}(t)+^2-+\boldsymbol{x}(s)+^2|\ [\ E/8$; 否则, 让 t 和 s 分别含于互不相交的两个开区间$(A_{n(t)},B_{n(t)})$ 和$(A_{n(s)},B_{n(s)})$, 这意味着 $n(t)$ 和 $n(s)$ 均是大于 N_0 的正整数并且 $n(t)+1<n(s)$# 于是重复情况 2 和情况 3, 我们有

$$|+\boldsymbol{x}(t)+^2-+\boldsymbol{x}(s)+^2|\ [\ |+\boldsymbol{x}(t)+^2-+\boldsymbol{x}(B_{n(t)})+^2|++\boldsymbol{x}(B_{n(t)})+^2+$$
$$+\boldsymbol{x}(A_{n(s)})+^2+|+\boldsymbol{x}(A_{n(s)})+^2-+\boldsymbol{x}(s)+^2|\ [$$
$$\frac{E}{8}+\frac{E}{4}+\frac{E}{8}=\frac{E}{2},\ (9)\text{ 式成立}\#$$

这样, 就完成了定理的全部证明# (证毕)

注记 1 一些文献讨论了神经网络系统对确定输入向量只有一个平衡点时的稳定性(参见文献[7]), 我们这里却不做这种限制, 从而扩大了所得结论的适用性; 本文的结论同样也刻画了 Hopfield 网络系统(参见文献[8])解轨线在无穷远处的演变方式#

注记 2 明显地, 如果平衡态集合 $N(U)$ 是单点集, 则系统(1)的所有解轨线均收敛于该系统唯一的平衡态; 如果平衡态集合 $N(U)$ 含有一闭曲线对应于系统(1)的稳态系统的周期解, 则系统(1)的解轨线也可能收敛于这一闭曲线, 此观察支持文献[6]的结论#

注记 3 文献[3]所研究的稳定性事实上就是本文这种意义下的, 我们这里的工作将该文关于此类问题的研究扩充到了非对称矩阵 A 的情况, 并且我们的证明方法也不相同于该文#

[参 考 文 献]

[1] Chua L O, Yang L. Cellular neural networks: Theory[J]. IEEE Trans Circuits and Systems, 1988, **35**(10): 1257~ 1272.

[2] Chua L O, Yang L. Cellular neural networks: applications[J]. IEEE Trans Circuits and Systems, 1988, **35**(10): 1273~ 1290.

[3] Gilli M. Stability of cellular neural networks and delayed cellurar neural networks with nonpositive templates and nonmonotonic output functions[J]. IEEE trans Circuits and Systems, 1994, **41**(8): 518~ 528.

[4] Guzelis C, Chua L O. Stability analysis of generalized cellurar neural networks[J]. Int J Cireuit Theory and Applications, 1993, **21**: 1~ 33.

[5] 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论(Ñ)[J]. 中国科学(A 辑), 1994, **24**(9): 902~ 914.

[6] 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论(Ò)[J]. 中国科学(A 辑), 1994, **24**(10): 1037~ 1046.

[7] Jin L, Nikiforuk F N, Gupta M. Absolute stability conditiong for discrete_time recurrent neural networks[J]. IEEE Trans Neural Networks, 1994, **5**(6): 954~ 963.

[8] Hopfield J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two state neurons[J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1984, **81**(5): 3088~ 3092.

Long_Time Behavior of Transient Solutions for Cellular Neural Network Systems

Jiang Yaolin

(Institute of Information and Systems Sciences, School of Sciences, Xi.an Jiaotong University, Xi.an 710049, P R China)

Abstract: By establishing concept on transient solutions of general nonlinear systems converging to its equilibrium set, long_time behavior of solutions for cellular neural network systems is studied. A stability condition in generalized sense is obtained. This result reported has an important guide to concrete neural network designs.

Key words: dynamic stability; cellural neural network systems; long_time behavior of transient solutions