应用数学和力学, 第 21 卷 第 2 期(2000 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 02_0111_08

Banach 空间非线性脉冲 Hammerstein 积分方程解的存在性*

陈芳启, 陈予恕

(天津大学 力学系, 天津 300072)

摘要: 研究了 Banach 空间中定义在无穷区间 $\mathbf{R}^+$ 上具有无穷多个脉冲点的 Hammerstein 积分方程解的存在性. 利用 Mönch 不动点定理, 建立了该类方程解的存在定理, 并给出实例说明了该定理在无穷维脉冲积分方程组中的应用.

关 键 词: Hammerstein 积分方程; Mönch 不动点定理; 非紧性测度

中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

我们知道, Volterra 积分方程与 Hammerstein 积分方程有本质的不同: Hammerstein 积分方程有固定的积分上限, 这就是说, 方程的解必须定义在整个区间 $a \leqslant t \leqslant b$(或 $a \leqslant t < +\infty$) 上; 进一步说, 方程的解 $x(t)$ 在任意点 t 处的值依赖于它的所有值 $x(s)$ ($a \leqslant s \leqslant b$, 或 $a \leqslant s < \infty$). 因此, 讨论 Hammerstein 积分方程解的存在性, 尤其它在无穷区间上整体解的存在性是一个困难的问题. 本文研究 Banach 空间中定义在无穷区间 $\mathbf{R}^+$ 上具有无穷多个脉冲点的 Hammerstein 积分方程解的存在性, 利用较为精细的 Mönch 不动点定理, 在较广泛的条件下, 建立了该类方程解的存在定理, 最后给出了文中定理的一个应用例子.

设 E 是实 Banach 空间, $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty)$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$, $t_n \to \infty$(当 $n \to \infty$), $PC[\mathbf{R}^+, E] = \left\{ x: x \text{ 是映 } \mathbf{R}^+ \text{ 到 } E \text{ 的映射且满足: 在 } t \neq t_k \text{ 处}, x(t) \text{ 是连续的, 在 } t = t_k \text{ 处 } x(t) \text{ 左连续且} \lim_{t \to t_k^+} x(t) \text{ 存在}, k = 1, 2, \cdots, n, \cdots \right\}$, $BPC[\mathbf{R}^+, E] = \left\{ x \in PC[\mathbf{R}^+, E]: \sup_{t \in \mathbf{R}^+} \| x(t) \| < +\infty \right\}$. 显然 $BPC[\mathbf{R}^+, E]$ 在范数 $\| x \|_{PC} = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} \| x(t) \|$ 下是一 Banach 空间, 且空间 $BPC[\mathbf{R}^+, E]$ 中的范数收敛即是 $\mathbf{R}^+$ 上的一致收敛. 我们下面的论证中采用的 $\mathbf{R}^+$ 的任何有限区间上的一致收敛拓扑(用 τ 表示, 见下面定义) 是更方便的. 如: 关于抽象函数的经典 Arzela_Ascoli 定理在局部凸拓扑 τ 下是成立的, 而在范数拓扑下却不成立.

本文始终取 $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \cdots$, 满足: $T_n \to +\infty$($n \to \infty$), 且 $T_i \neq t_j$($\forall i, j$). 对任意固定的 T_k, 令 $\| x \|_{T_k} = \sup_{t \in [0, T_k]} \| x(t) \|$ ($\forall x \in BPC[\mathbf{R}^+, E]$), 易见 $\| \cdot \|_{T_k}$ 是定义在

* 收稿日期: 1999_01_18; 修订日期: 1999_10_16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672043); 国家教委博士点专项基金资助项目
作者简介: 陈芳启(1963~), 男, 理学博士, 在国内外刊物发表论文近 30 篇.

$BPC[\mathbf{R}^+, E]$ 上的半范数, 由半范数族$\left\{ \|\cdot\|_{T_k} : k = 1, 2, \cdots, n, \cdots \right\}$生成的局部凸拓扑即是在 $\mathbf{R}^+$ 的任何紧子集上的一致收敛拓扑·

定义 设 $x_n, x \in BPC[\mathbf{R}^+, E]$, 若$\left\{ \|x_n\|_{PC} \right\}$有界, 且对 $\forall T_k$, $\|x_n - x\|_{T_k} \to 0$, 则称 x_n 关于拓扑τ收敛于 x, 即 $x_n \xrightarrow{\tau} x(n \to \infty)$·

考虑 Banach 空间 E 中非线性脉冲 Hammerstein 积分方程:

$$x(t) = x_0(t) + \int_0^{\infty} k(t, s) f(s, x(s)) \mathrm{d}s + \sum_{0 < t_k < t} a_k(t) I_k(x(t_k)), \qquad t \in \mathbf{R}^+, \tag{1}$$

这里 $x_0 \in BPC[\mathbf{R}^+, E]$, $k: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^1$, $f \in C[\mathbf{R}^+ \times E, E]$, $I_k \in C[E, E]$, $a_k \in BC[J_k^*, \mathbf{R}^1]$ ($BC[J_k^*, \mathbf{R}^1]$ 是定义在 J_k^* 上的有界、连续实值函数组成的空间), $J_k^* = [t_k, +\infty)$· 我们称 $x \in BPC[\mathbf{R}^+, E]$ 是方程(1) 的解, 如果对所有 $t \in \mathbf{R}^+$, $x(t)$ 适合(1)·

1 预 备 知 识

在下文中, 记 $a_k^* = \sup_{t \in J_k^*} |a_k(t)|$ $(k = 1, 2, \cdots)$, $K_r = \left\{ x \in E: \|x\| \leqslant r \right\}$ $(r > 0)$, $B_r = \left\{ x \in BPC[\mathbf{R}^+, E]: \|x\|_{PC} \leqslant r \right\}$, $J_0 = [0, t_1]$, $J_1 = (t_1, t_2]$, $\cdots$, $J_k = (t_k, t_{k+1}]$, $\cdots$, α表示有界集的Kuratowski 非紧性测度· 对于 $D \subset PC[\mathbf{R}^+, E]$, 记 $D(t) = \left\{ x(t): x \in D \right\} \subset E$ $(t \in \mathbf{R}^+)$, $D(I) = \left\{ x(t): x \in D, t \in I \right\} \subset E$ $(I \subset \mathbf{R}^+)$·

本文约定, 对任意固定的 T_k, $BPC[[0, T_k], E]$ 始终表示 $BPC[\mathbf{R}^+, E]$ 中函数在 $[0, T_k]$ 上的限制组成的、取范数 $\|\cdot\|_{T_k}$ 的 Banach 空间, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m_k} < T_k$·

在 $BPC[\mathbf{R}^+, E]$ 中定义算子 K:

$$\mathrm{K}x(t) = \int_0^{+\infty} k(t, s) x(s) \mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbf{R}^+, x \in BPC[\mathbf{R}^+, E]·$$

记 $k_t(s) = k(t, s)$· 假设 $k_t \in L_1(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^1)$ $(\forall t \in \mathbf{R}^+)$, 且 $k(t, s)$ 满足下列条件

(Ⅰ) $\sup_{t \in \mathbf{R}^+} \|k_t\|_1 = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} \int_0^{\infty} |k(t, s)| \mathrm{d}s < +\infty$;

(Ⅱ) $\|k_{t'} - k_t\|_1 = \int_0^{\infty} |k(t', s) - k(t, s)| \mathrm{d}s \to 0$, 当 $t' \to t$·

容易验证 K 是定义在 Banach 空间 $BPC[\mathbf{R}^+, E]$ 上的有界线性算子, 且

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \ \|\mathrm{K}x(t)\| \leqslant \|k_t\|_1 \cdot \|x\|_{PC}, \qquad \|\mathrm{K}\| = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} \|k_t\|_1, \tag{2}$$

$$\|\mathrm{K}x(t') - \mathrm{K}x(t)\| \leqslant \|k_{t'} - k_t\|_1 \cdot \|x\|_{PC}· \tag{3}$$

为方便起见, 定义

$$v_r(t) = \int_r^{\infty} |k(t, s)| \mathrm{d}s, \qquad r \in \mathbf{R}^+, t \in \mathbf{R}^+·$$

v_r 的几个基本特性为

$$\left\{ v_r \right\} \text{有界; 等度连续; } v_r \xrightarrow{\tau} 0, \quad \text{当 } r \to \infty· \tag{4}$$

引理 1[1] 设 $D \subset BPC[[0, T_k], E]$ 是有界的, 且在每一个集 J_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, m_k - 1)$ 及 $(t_{m_k}, T_k]$ 上是等度连续的, 则

$$\alpha(D) = \sup_{t \in [0, T_k]} \alpha(D(t))· \tag{5}$$

引理 2[2] 设 $D=\{x_n\}\subset L^1([0,T_k],E)$，且存在 $g\in L^1([0,T_k],\mathbf{R}^+)$ 使得，对一切 $x_n\in D$，$\|x_n(t)\|\leqslant g(t)$ a.e. $t\in[0,T_k]$，则

$$\alpha\left(\left\{\int_0^t x_n(s)\mathrm{d}s\right\}\right)\leqslant 2\int_0^t\alpha(D(s))\mathrm{d}s,\qquad \forall t\in[0,T_k]\cdot \tag{6}$$

引理 3[3] (Mönch 不动点定理) 设 E 是 Banach 空间，$D\subset E$ 是闭凸集，$F:E\to D$ 是连续算子，且满足：$x\in D$，可数集 $C\subset D$，$C=\overline{\mathrm{co}}(\{x\}\cup F(C))$ 蕴含 C 是相对紧集，则 F 在 D 中至少有一不动点•

2 主要结果

考虑算子 A：

$$(\mathrm{A}x)(t)=x_0(t)+\int_0^{+\infty}k(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}a_k(t)I_k(x(t_k)),\qquad t\in\mathbf{R}^+, \tag{7}$$

本文使用下列条件：

(H_1) $f\in C[\mathbf{R}^+\times E,\ E]$，且在 $\mathbf{R}^+\times E$ 的任何有界子集上一致连续• 存在常数 $a>0$，$b>0$ 使得

$$\|f(t,x)\|\leqslant a+b\|x\|,\qquad t\in\mathbf{R}^+,\ x\in E; \tag{8}$$

(H_2) 存在非负常数 $c_k(k=1,2,\cdots)$，G 使得

$$\|I_k(x)\|\leqslant c_k\|x\|+G,\qquad x\in E,\ k=1,2,\cdots; \tag{9}$$

(H_3) 下列不等式成立

$$b\|\mathrm{K}\|+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^*c_k<1,\quad \sum_{k=1}^{\infty}a_k^*G<+\infty\cdot \tag{10}$$

引理 4 设条件 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$ 成立，则 A 关于拓扑 τ 是映 $\mathrm{BPC}[\mathbf{R}^+,E]$ 到 $\mathrm{BPC}[\mathbf{R}^+,E]$ 的连续算子，且存在充分大常数 $R>0$ 使得 $\mathrm{A}:B_R(x_0)\to B_R(x_0)$，其中 $B_R(x_0)=\{x\in\mathrm{BPC}[\mathbf{R}^+,E]:\|x-x_0\|_{\mathrm{PC}}\leqslant \mathbf{R}\}$•

证明 证明分为两部分•

(ⅰ) 由(7)式及引理假设容易验证：算子 A 映 $\mathrm{BPC}[\mathbf{R}^+,E]$ 到 $\mathrm{BPC}[\mathbf{R}^+,E]$• 令

$$\mathrm{A}^{(1)}x(t)=x_0(t)+\int_0^{\infty}k(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\qquad t\in\mathbf{R}^+ \tag{11}$$

及

$$\mathrm{A}^{(2)}x(t)=\sum_{0<t_k<t}a_k(t)I_k(x(t_k)),\qquad t\in\mathbf{R}^+, \tag{12}$$

则 $\mathrm{A}x=\mathrm{A}^{(1)}x+\mathrm{A}^{(2)}x$• 设 $\{x_n\}\subset\mathrm{BPC}[\mathbf{R}^+,E]$ 关于 τ 收敛于 x，即存在常数 $M>0$ 使得 $\|x_n\|_{\mathrm{PC}}\leqslant M\ (\forall n)$，且 $x_n(t)\to x(t)$ 在任何紧区间 $[0,T_k]\subset\mathbf{R}^+$ 上一致成立•

对任意固定的 T_k，$t\in[0,T_k]$ 时，算子 $\mathrm{A}^{(2)}$ 仅是有限项的和，其连续性不难由 a_k，$I_k(k=1,2,\cdots,m_k)$ 的连续性、有界性推出• 下面证明 $\mathrm{A}^{(1)}$ 的连续性•

定义 Nemyskii 算子 f：$(\mathrm{f}x)(s)=f(s,x(s))$• 由 $f(t,s)$ 在 $\mathbf{R}^+\times E$ 的任何有界子集上的一致连续性，可以验证：算子 f 关于拓扑 τ 是连续的•

对 $\forall T_k$、T_m，由(8)式得

$$\|\mathrm{A}^{(1)}x_n-\mathrm{A}^{(1)}x\|_{T_k}\leqslant\sup_{t\in[0,T_k]}\int_0^{T_m}|k(t,s)|\cdot\|f(s,x_n(s))-f(s,x(s))\|\mathrm{d}s+$$

$$\sup_{t\in[0,T_k]}\int_{T_m}^{\infty}|k(t,s)|\cdot\|f(s,x_n(s))-f(s,x(s))\|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\|K\|\cdot\|fx_n-fx\|_{T_m}+2(a+bM)\|v_{T_m}\|_{T_k}\cdot$$

固定 T_k, 根据(4) 式, 通过取 T_m 充分大, 我们能使最后一项任意小, 然后固定 T_m, 由 $fx_n\xrightarrow{\tau}fx$, 不难知道, 当 $n\to\infty$ 时, 第一项收敛于零· 这样算子 $A^{(1)}$ 的连续性获证, 从而 A 是 BPC[$\mathbf{R}^+$, E] 到 BPC[$\mathbf{R}^+$, E] 的连续算子(关于拓扑 τ)·

(ii) 在这部分证明: 存在充分大常数 $R>0$, 使得 $A: B_R(x_0)\to B_R(x_0)$·

事实上, 据式(10), 我们可取

$$\beta=1-b\|K\|-\sum_{k=1}^{\infty}a_k^* c_k>0, \tag{13}$$

及

$$R\geqslant\frac{1}{\beta}\left[a\|K\|+\left(b\|K\|+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^* c_k\right)\|x_0\|_{PC}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^* G\right]\cdot \tag{14}$$

据(7)~(9)式, 对 $\forall x\in B_R(x_0)$, $t\in\mathbf{R}^+$, 我们有

$$\|Ax(t)-x_0(t)\|\leqslant\int_0^{\infty}|k(t,s)|\cdot\|f(s,x(s))\|\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(t)|\cdot\|I_k(x(t_k))\|\leqslant$$
$$\int_0^{\infty}|k(t,s)|\cdot[a+b\|x(s)\|]\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^*[c_k\|x(t_k)\|+G]\leqslant$$
$$a\|K\|+b\|K\|\cdot\|x\|_{PC}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^* c_k\|x\|_{PC}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^* G\cdot$$

于是,

$$\|Ax-x_0\|_{PC}\leqslant a\|K\|+\left(b\|K\|+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^* c_k\right)\|x\|_{PC}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^* G\leqslant$$
$$a\|K\|+\left(b\|K\|+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^* c_k\right)\|x_0\|_{PC}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^* G+$$
$$\left(b\|K\|+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^* c_k\right)\|x-x_0\|_{PC}\leqslant$$
$$\beta R+(1-\beta)R=R\quad(\text{据(13)、(14) 式})\cdot$$

因此 $A: B_R(x_0)\to B_R(x_0)$, 引理得证·

定理　设条件(H_1)~(H_3)成立, 且存在非负常数 L、M_k($k=1,2,\cdots$) 满足

$$\gamma\equiv2\|K\|L+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^* M_k<1 \tag{15}$$

且

$$\alpha(f(s,D))\leqslant L\alpha(D),\qquad s\in\mathbf{R}^+,\ \text{有界集 } D\subset E, \tag{16}$$
$$\alpha(I_k(D))\leqslant M_k\alpha(D),\qquad \text{有界集 } D\subset E,\ k=1,2,\cdots, \tag{17}$$

则方程(1)在 BPC[$\mathbf{R}^+$, E] 中有解·

证明　由引理 4 知, A 映 BPC[$\mathbf{R}^+$, E] 入 BPC[$\mathbf{R}^+$, E], 关于拓扑 τ 连续, 且存在充分大常数 $R>0$, 使得 A 映 $B_R(x_0)$ 入 $B_R(x_0)$, 证明分两部分完成·

(i) 不失一般性, 我们假设所有 t_i 都不是整数· 对固定的正整数 n_0, 在 BPC[$\mathbf{R}^+$, E] 上定义算子 A_{n_0}·

$$A_{n_0}x(t)=x_0(t)+\int_0^{n_0}k(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}a_k(t)I_k(x(t_k))\cdot \tag{18}$$

在这部分,我们证明 A_{n_0} 在 $B_R(x_0)$ 中有不动点.

由引理4的证明过程,不难看出:算子 A_{n_0} 关于 τ 是连续的,且映 $B_R(x_0)$ 到 $B_R(x_0)$. 对 $T_k \geqslant n_0$,用 $B_R(x_0)_{[0,T_k]}$ 表示 $B_R(x_0)$ 中的函数在 $[0,T_k]$ 上的限制组成的集. 显然,$B_R(x_0)_{[0,T_k]}$ 是 $BPC[[0,T_k],E]$ 中的闭凸集,A_{n_0} 映 $B_R(x_0)_{[0,T_K]}$ 到 $B_R(x_0)_{[0,T_k]}$,且关于 $\|\cdot\|_{T_k}$ 是连续的.

设可数集 $D=\{x_n\}\subset B_R(x_0)_{[0,T_k]}$,$D=\overline{\mathrm{co}}(\{x\}\cup A_{n_0}(D))$,其中 $x\in B_R(x_0)_{[0,T_k]}$. 下面我们证明:D 是 $BPC[[0,T_k],E]$ 中的相对紧集. 容易验证:$A_{n_0}(D)$ 中的函数在 $J_k(k=0,1,2,\cdots,m_k-1)$ 及 $(t_{m_k},T_k]$ 上是等度连续的. 由引理1得

$$\alpha(A_{n_0}(D))=\sup_{t\in[0,T_k]}\alpha((A_{n_0}(D))(t))\cdot \tag{19}$$

利用(16)、(17)式及引理2,对 $\forall t\in[0,T_k]$,有

$$\begin{aligned}\alpha((A_{n_0}(D))(t)) &= \alpha\left(\left\{x_0(t)+\int_0^{n_0}k(t,s)f(s,x_n(s))\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}a_k(t)I_k(x_n(t_k))\right\}\right)\leqslant\\ &2\int_0^{n_0}|k(t,s)|\,\alpha(f(s,D(s)))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{m_k}a_k^*\,\alpha(I_k(D(t_k)))\leqslant\\ &2\int_0^{n_0}|k(t,s)|\,L\cdot\alpha(D)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^*M_k\alpha(D)\leqslant\\ &\left(2L\|K\|+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^*M_k\right)\alpha(D)=\gamma\alpha(D),\end{aligned}$$

再据(19)式可得

$$\alpha(A_{n_0}(D))\leqslant\gamma\alpha(D),$$

于是,

$$\alpha(D)=\alpha(\overline{\mathrm{co}}(\{x\}\cup A_{n_0}(D)))=\alpha(A_{n_0}(D))\leqslant\gamma\alpha(D)\cdot$$

由 $0\leqslant\gamma<1$ 得 $\alpha(D)=0$,即 D 是 $BPC[[0,T_k],E]$ 中的相对紧集. 由 Mönch 不动点定理知,A_{n_0} 在 $B_R(x_0)_{[0,T_k]}$ 中有不动点 x_{T_k},即 $\forall t\in[0,T_k]$,$A_{n_0}x_{T_k}(t)=x_{T_k}(t)$. 我们在保证 $x_{T_k}\in B_R(x_0)$ 的前提下,将 $x_{T_k}(t)$ 任意延拓到 $t\in[0,+\infty)$ 上,这样我们得到一序列 $\{x_{T_k}\}_{T_k\geqslant n_0}\subset B_R(x_0)$ 满足 $A_{n_0}x_{T_k}(t)=x_{T_k}(t)$,$t\in[0,T_k]$,此处 $T_k\geqslant n_0$.

对 $\forall T_n$,我们有

$$\begin{aligned}\alpha(\{x_{T_k}\}_{[0,T_n]}) &= \alpha(\{\{x_{T_k}\}_{T_k\geqslant T_n}\}_{[0,T_n]})=\alpha(\{\{A_{n_0}x_{T_k}\}_{T_k\geqslant T_n}\}_{[0,T_n]})\leqslant\\ &\gamma\alpha(\{\{x_{T_k}\}_{T_k\geqslant T_n}\}_{[0,T_n]})=\gamma\alpha(\{x_{T_k}\}_{[0,T_n]})\cdot\end{aligned}$$

同样由 $0\leqslant\gamma<1$ 得,$\alpha(\{x_{T_k}\}_{[0,T_n]})=0$,即 $\{x_{T_k}\}_{[0,T_n]}$ 是相对紧集. 因此存在收敛子列. 由 T_n 的任意性知,关于拓扑 τ 存在收敛子列 $\{x_{T_{k_i}}\}$,记 $x_{T_{k_i}}\xrightarrow{\tau}x_{n_0}^*$,显然 $x_{n_0}^*\in B_R(x_0)$. 由 $A_{n_0}x_{T_{k_i}}(t)=x_{T_{k_i}}(t)$,$t\in[0,T_{k_i}]$,及 A_{n_0} 关于 τ 的连续性可得

$$A_{n_0} x^*_{n_0} = x^*_{n_0}, \qquad x^*_{n_0} \in B_R(x_0)\cdot$$

(ii) 上面已经证明: 对任何正整数 n, 算子 A_n 有不动点 $x^*_n \in B_R(x_0)$• 在这部分, 我们首先证明: $\{x^*_n\}$ 关于拓扑 τ 是一相对紧集•

事实上, 上述结论成立当且仅当, 对 $\forall T_k$, $\{x^*_n\}_{[0,T_k]}$ 是 $BPC[[0, T_k], E]$ 中的相对紧集•我们仍分两部分来证明•

(a) 由 $\{x^*_n\} \subset B_R(x_0)$, $\{x^*_n\}$ 在 $[0, T_k]$ 上一致有界, 容易验证: $\{x^*_n\}$ 在 $J_k(k = 0, 1, 2, \cdots, m_k - 1)$ 及 $(t_{m_k}, T_k]$ 上是等度连续的, 我们分别用 U、$U_{[0,T_k]}$ 表示 $\{x^*_n\}$、$\{x^*_n\}_{[0,T_k]}$• 由引理 1 得

$$\alpha(U_{[0,T_k]}) = \sup_{t\in[0,T_k]} \alpha(U_{[0,T_k]}(t)); \tag{20}$$

(b) 对 $\forall \varepsilon > 0$, $t \in [0, T_k]$, 由 $\{x^*_n\} \subset B_R(x_0)$, $v_r(t) = \int_r^\infty |k(t,s)|\,ds \to 0$• (当 $r \to +\infty$) 在 $t \in [0, T_k]$ 上一致成立, 结合(8)式知: 存在充分大的整数 N 使得, 对 $t \in [0, T_k]$,

$$\int_N^\infty |k(t,s)| \cdot \|f(s, x^*_n(s))\|\,ds < \varepsilon, \qquad \forall n\cdot \tag{21}$$

显然, $U = \{x^*_n\}_{n=1}^\infty = \{x^*_n\}_{n=1}^N \cup \{x^*_n\}_{n=N+1}^\infty \equiv U^{(1)} \cup U^{(2)}$• 对 $\forall n > N$, $t \in [0, T_k]$, 有

$$\left\|\int_0^n k(t,s) f(s, x^*_n(s))\,ds - \int_0^N k(t,s) f(s, x^*_n(s))\,ds\right\| \leqslant$$
$$\int_N^n |k(t,s)| \cdot \|f(s, x^*_n(s))\|\,ds < \varepsilon\cdot \tag{22}$$

利用(6)、(16)、(17)及(22)式, 对 $\forall t \in [0, T_k]$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\alpha(U_{[0,T_k]}(t)) = \alpha(U^{(1)}_{[0,T_k]}(t) \cup U^{(2)}_{[0,T_k]}(t)) = \alpha(U^{(2)}_{[0,T_k]}(t)) \leqslant \\
&\alpha\left(\left\{\int_0^n k(t,s) f(s, x^*_n(s))\,ds : n > N\right\}\right) + \sum_{i=1}^\infty a^*_i\, \alpha(I_i(U^{(2)}_{[0,T_k]}(t))) \leqslant \\
&\alpha\left(\left\{\int_0^N k(t,s) f(s, x^*_n(s))\,ds : n > N\right\}\right) + 2\varepsilon + \sum_{i=1}^\infty a^*_i M_i\, \alpha(U^{(2)}_{[0,T_k]}) \leqslant \\
&2\int_0^N |k(t,s)|\, \alpha(f(s, U_{[0,T_k]}(s)))\,ds + 2\varepsilon + \sum_{i=1}^\infty a^*_i M_i\, \alpha(U_{[0,T_k]}) \leqslant \\
&2L\alpha(U_{[0,T_k]})\int_0^N |k(t,s)|\,ds + 2\varepsilon + \sum_{i=1}^\infty a^*_i M_i\, \alpha(U_{[0,T_k]}) \leqslant \\
&\left(2L\|K\| + \sum_{i=1}^\infty a^*_i M_i\right)\alpha(U_{[0,T_k]}) + 2\varepsilon\cdot
\end{aligned}$$

再据(20)式得

$$\alpha(U_{[0,T_k]}) \leqslant \left(2L\|K\| + \sum_{i=1}^\infty a^*_i M_i\right)\alpha(U_{[0,T_k]}) + 2\varepsilon\cdot$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知

$$\alpha(U_{[0,T_k]}) \leqslant \left(2L\|K\| + \sum_{i=1}^\infty a^*_i M_i\right)\alpha(U_{[0,T_k]}) = \gamma\alpha(U_{[0,T_k]}),$$

再由 $0 \leqslant \gamma < 1$ 得, $\alpha(U_{[0,T_k]}) = 0$, 即 $\{x^*_n\}_{[0,T_k]}$ 是 $BPC[[0, T_k], E]$ 中的相对紧集, 再由 T_k 的任意性知, $\{x^*_n\}$ 关于拓扑 τ 是 $BPC[\mathbf{R}^+, E]$ 中的相对紧集, 因此存在收敛子列 $\{x^*_{n_k}\}$• 设 $x^*_{n_k}$

$\xrightarrow{\tau} x^*$, 不难证明: $A_{n_k} x^*_{n_k} \xrightarrow{\tau} Ax^*$• 于是在 $x^*_{n_k} = A_{n_k} x^*_{n_k}$ 中取极限得 $x^* = Ax^*$, 即 x^* 是方程(1)的解, 显然 $x^* \in B_R(x_0)$• 定理得证•

3 应　　用

该部分给出文中定理的一个应用•

例　考虑无穷维非线性脉冲 Hammerstein 积分方程组:

$$x_n(t) = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1}{64 + t^2 + s^2}\left[\sin s + x_{2n+1}^{2/3}(s)\right] ds + \sum_{0<t_k<t} \frac{1}{(k+1)^2} x_n(t_k), \quad t \in \mathbf{R}^+, \tag{23}$$

这里 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$, 满足 $t_n \to \infty$(当 $n \to \infty$)•

结论　无穷维积分方程组(23)有有界解•

证明　令 $E = (m) = \left\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) : \sup_n |x_n| < +\infty\right\}$, 取范数 $\|\boldsymbol{x}\| = \sup_n \|x_n\|$, 众所周知 E 是一 Banach 空间• 显然, 无穷维方程组(23)可以视为(1)形式的积分方程, 其中 $x_0 = 0$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$, $k(t, s) = 1/(64 + t^2 + s^2)$, $\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}) = (f_1(s, \boldsymbol{x}), f_2(s, \boldsymbol{x}), \cdots, f_n(s, \boldsymbol{x}), \cdots)$, 且

$$f_n(s, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}(\sin s + x_{2n+1}^{2/3}), \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{24}$$

$a_k(t) = 1$, $I_k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}/(k+1)^2$• 不难验证: $k(t, s)$ 满足(Ⅰ)、(Ⅱ), 且 $\|K\| = \pi/16$• 显然 $f \in C[\mathbf{R}^+ \times E, E]$ 且 f 在 $R^+ \times E$ 的任何有界子集上一致连续, 取 $a = 2$、$b = 1$ 可知(8)式成立, 即(H_1)成立• 对于 I_k, 我们取 $c_k = 1/(k+1)^2$, $G = 0$, 结合恒等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2 - 6}{6}$$

可知, (H_2)、(H_3)成立, 显然有

$$\alpha(I_k(D)) = \frac{1}{(k+1)^2}\alpha(D), \qquad \text{对有界集 } D \subset E• \tag{25}$$

进一步, 由(24)式推知

$$|f_n(s, \boldsymbol{x})| \leqslant \frac{1}{n}(|x_{2n+1}^{2/3}| + 1) \leqslant \frac{1}{n}(\|\boldsymbol{x}\|^{2/3} + 1), \qquad n = 1, 2, \cdots• \tag{26}$$

采用[4]中证明方法可证

$$\alpha(f(s, D)) = 0, \qquad \forall s \in \mathbf{R}^+, \text{有界集 } D \subset E, \tag{27}$$

因此 $L \equiv 0$, 于是(15)、(16)、(17)式也成立, 这样由文中定理即知本例结论成立•

致谢　作者感谢郭大钧教授的指导、帮助•

[参 考 文 献]

[1] Guo Dajun. Impulsive integral equations in Banach spaces and applications[J]. J Appl Math Stochastic Anal, 1992, **5**(2): 111~ 122.

[2] Heinz H P. On the behaviour of measure of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector_valued functions[J]. Nonlinear Anal TMA, 1983, **7**(2): 1351~ 1371.

[3] Mönch H. Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal TMA, 1980, **4**(5): 985~ 999.

[4] Guo Dajun, Extremal solutions of nonlinear Fredholm integral equations in ordered Banach spaces [J]. Northeastern Math J, 1991, **7**(4): 416~ 423.
[5] Anselone P M. Integral equations on the half line[J]. J Integral Equation, 1985, **9**(suppl): 3~ 23.
[6] Guo Dajun. Nonlinear impulsive Volterra integral equations in Banach spaces and applications[J]. J Appl Math Stochactic Anal, 1993, **6**(1): 35~ 48.
[7] Vaughn R. Existence and comparison results for nonlinear Volterra integral equations in Banach spaces[J]. Appl Anal, 1978, **7**(2): 337~ 348.
[8] 陈芳启. Banach 空间非线性方程的解[D]. 博士论文. 济南: 山东大学, 1998.
[9] Chen Fangqi. Existence theorems of solutions for nonlinear impulsive Volterra integral equations in Banach spaces[J]. Appl Math J Chinese University, 1997, **12**B(3): 299~ 306.
[10] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1985.

Existence of Solutions for Nonlinear Impulsive Hammerstein Integral Equations in Banach Spaces

Chen Fangqi, Chen Yushu
(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

Abstract: The existence of solutions for nonlinear impulsive Hammerstein integral equations with infinite numbers of moments of impulse effect on the infinite interval $\mathbf{R}^+$ in Banach spaces is studied. By means of Mönch fixed point theorem, an existence theorem of solutions is obtained. The result is demonstrated by means of an infinite system for impulsive integral equations.

Key words: Hammerstein integral equation; Mönch fixed point theorem; measure of noncompactness