

文章编号: 1000-0887(2000) 02-0176-09

粘附弹性体切变的定解问题及其差分解法^{*}

张鲁明, 常谦顺

(中国科学院 应用数学研究所, 北京 100080)

(李继彬推荐)

摘要: 两刚性平行平面之间粘附长条弹性体(其横截面为矩形), 在上下两面相反方向切向力的作用下, 弹性体将发生变形. 在导出这种变形的数学模型的基础上, 给出了一种新的差分解法. 对于具有奇性的边界条件, 进行了详细的分析和推导, 给出了一种合理而有效的新的离散边界条件. 模拟计算表明, 其结果与定性分析相吻合. 因此对该类问题的研究提供了新的实用的数值解法和数值分析方法.

关键词: 弹性体; 切变; 数学模型; 差分格式

中图分类号: O241.82 **文献标识码:** A

引 言

在两刚性平行平面之间粘附弹性体(可压缩或不可压缩), 是工程技术上的经常行为, 对于它在力的作用下变形的研究也由来已久. 关于研究的对象——粘附弹性体, 从形状上可分为圆柱体和具有矩形横截面的长条体; 从材料性质上可分为可压缩和不可压缩; 从变形上可分为压缩(或拉伸)、弯曲、旋转和切变; 从研究的目标上可分为求压力分布和应力. 文献[1]从经典弹性理论出发, 假定微小变形, 去求橡胶块的压力分布. 文[2, 3]用有限元方法计算了各种变形下的平面切应力. 而文[4]则通过定义应变函数的总能量, 得出平板上单位面积的压力和视弹性模量.

本文我们考虑粘附在两平行刚体平板间的不可压缩弹性体, 其横截面如图 1 所示为宽 $2A$, 厚 $2H$ 的矩形. 我们设在上下两平板上施以如图 2 所示的两相反方向的切向力, 弹性体的变形如图 2 所示, 并假设变形时的宽、高不变. 我们的目的就是要提出这种切变所满足的微分方程和边界条件, 并通过计算机模拟, 数值地研究弹性体内点的位移与压力分布. 本文采用有限差分方法进行了求解, 重点放在奇异边界条件的处理上. 理论推导中可能的边界条件有多种取法, 我们通过分析和数值试算进行了比较, 得到了一种好的离散边界条件. 数值计算表明, 其结果与定性分析相吻合, 故这是一种可行的新的实用的数值方法. 在文中我们也作了理论上的分析, 证明了用非定态问题逼近定态问题的收敛性以及所用数值方法的稳定性.

1 方程的导出

我们所考虑的问题类似于—平面热弹性问题^[5]. 根据纳维(Naver)平衡方程、柯西(A.L

* 收稿日期: 1998_10_23; 修订日期: 1999_08_30

作者简介: 张鲁明(1957~), 男, 江苏沐阳人, 石油大学(华东)副教授, 博士, 研究方向为非线性发展方程的数值方法.

Cauchy) 几何方程和虎克 (Robert Hooke) 定律, 再利用材料的不可压缩性, 该问题可归结为如下数学模型:

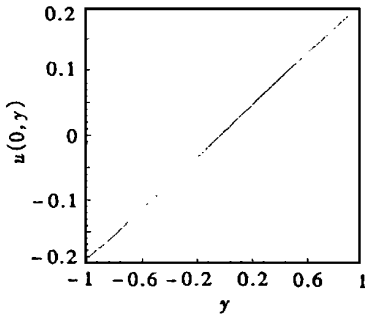


图 1 粘附在刚体间的弹性块

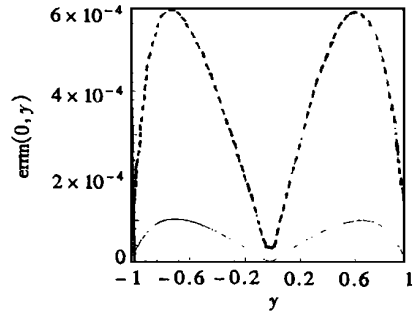


图 2 弹性块的切向变形

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0, \\ \sigma_{11} &= -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{22} = -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_{12} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

其中 σ_{11} 、 σ_{22} 为正应力, σ_{12} 为剪应力, u 、 v 为一点在 x 、 y 方向上的投影. P 为与温度分布有关的物理量, 在我们的问题中为压力分布. 这些量均为 x 、 y 的二元函数. 另外, $\mu = E/2(1 + \nu)$ 为切变模量, 而 E 为弹性模量, ν 为泊松 (Poisson) 比.

对于上述过程, 我们考虑一个具有实际应用价值的边界条件, 即加上剪切外力的边界条件:

$$x = \pm A \text{ 时, } \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0, \quad (1)$$

$$y = \pm H \text{ 时, } v = 0, \quad u = \pm \delta \quad (2)$$

上述问题为一定态边值问题. 由于边界条件不一致, 在四个角点具有奇异性. 为了便于计算, 我们对其作变换: $P = P/\mu$, $\sigma_{11} = \sigma_{11}/\mu$, $\sigma_{12} = \sigma_{12}/\mu$, $\sigma = \sigma_{22}/\mu$, 然后去掉符号“ μ ”得方程:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_{11} = -P + 2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\sigma_{22} = -P + 2 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (6)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

及与(1)、(2)相同的边界条件, 将(5)、(6)和(7)式代入(3)式及(4)式得

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \quad -\frac{\partial P}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

由(8)式有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

于是方程(3)~(8)在边界条件(1)、(2)下的求解问题归结为方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (11)$$

在边界条件(1)、(2)下的求解问题。

2 计算步骤的总体设计

为了获得定态问题(9)~(11)在边界条件(1)、(2)下的解,我们考虑如下非定态方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (14)$$

在边界条件(1)、(2)下的解。我们有

定理1 非定态方程(12)~(14)在边界条件(1)、(2)及任意初始条件下的解,当 $t \rightarrow \infty$ 时,收敛到它所对应的定态方程(9)~(11)在边界条件(1)、(2)下的解。

证明 令 u', v', P' 为方程(12)~(14)在边界条件(1)、(2)及某初始条件下的解; u'', v'', P'' 为方程(9)~(11)在边界条件(1)、(2)下的解。并令 $u = u' - u'', v = v' - v'', P = P' - P''$, 则 u 和 v 满足方程(12)~(14), 及边界条件 $x = \pm A$ 时, $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$, $y = \pm H$ 时, $v = 0$, $u = 0$ 。将方程(12)与 u 作内积, 方程(13)与 v 作内积得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u \right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial x}, u \right) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, v \right) - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, v \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y}, v \right) = 0. \quad (16)$$

而

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u \right) = \int_{-H}^H [u_x u]_{-A}^A dy - \|u_x\|^2, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u \right) = -\|u_y\|^2,$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, v \right) = \int_{-H}^H [v v_x]_{-A}^A dy - \|v_x\|^2, \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, v \right) = -\|v_y\|^2.$$

于是代入(15)、(16)再相加得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|u\|^2 + \|v\|^2] + \|u_x\|^2 + \|u_y\|^2 + \|v_x\|^2 + \|v\|^2 - \int_{-H}^H [u_x u]_{-A}^A dy - \int_{-H}^H [v v_x]_{-A}^A dy + \left(\frac{\partial P}{\partial x}, u \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y}, v \right) = 0. \quad (17)$$

再根据 $u_x = -v_y$ 及 $u_y = -v_x$ 便可得

$$\int_{-H}^H [u_x u]_{-A}^A dy + \int_{-H}^H [v v_x]_{-A}^A dy = 0.$$

而

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial x}, u \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y}, v \right) &= \int_{-H}^H dy \int_{-A}^A P_x u dx + \int_{-A}^A dx \int_{-H}^H P_y v dy = \\ &= \int_{-H}^H [Pu]_{-A}^A dy - \int_{-H}^H dy \int_{-A}^A P(u_x + v_y) dx dy = \int_{-H}^H [Pu]_{-A}^A dy. \end{aligned}$$

根据所考虑问题的实际意义(对称性)可得 $\int_{-H}^H [Pu]_{-A}^A dy = 0$, 因此, 代入(17) 式得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|u\|^2 + \|v\|^2] + \|u_x\|^2 + \|u_y\|^2 + \|v_x\|^2 + \|v_y\|^2 = 0,$$

从而有

$$\frac{d}{dt} [\|u\|^2 + \|v\|^2] \leq 0,$$

所以, $\|u\|^2 + \|v\|^2$ 对时间不增, 因此根据初始条件应有当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$u \rightarrow 0, v \rightarrow 0.$$

2.1 方程关于时间的离散

对时间 t 取均匀步长 τ , 对(12) ~ (14) 式作如下近似

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} - \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x}, \quad (18)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} - \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} = 0. \quad (20)$$

令

$$u = u^n + \tau \left[\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right], \quad v = v^n + \tau \left[\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} \right], \quad (21)$$

则

$$u^{n+1} = u + \tau \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x}, \quad v^{n+1} = v - \tau \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y}. \quad (22)$$

将上两式代入(20) 式得:

$$\frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial y^2} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (23)$$

2.2 边界条件关于时间的离散

当 $y = \pm H$ 时, 取 $v^n = 0$, $u^n = \pm \delta$, 由(22) 的第一式得

$$\frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \Big|_{y=\pm H} = \frac{1}{\tau} v \Big|_{y=\pm H}, \quad (24)$$

由 $x = \pm A$ 时, $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{12} = 0$ 及(22) 式得

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2\tau \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x \partial y} = 0,$$

因此有

$$\left[2\tau \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x^2} + P^{n+1} \right]_{x=\pm A} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pm A}, \quad (25)$$

$$2\tau \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x \partial y} \Big|_{x=\pm A} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=\pm A}. \quad (26)$$

2.3 计算步骤设计

第 | 步 对给定的初值, 从(21)、(22) 式计算 u 与 v .

第二步 从(25)~(26)式计算 P^{n+1} 。

第三步 从(23)和(24)式计算 u^{n+1} 和 v^{n+1} 。

这样使计算推进到下一计算时间层。

3 差分方法

3.1 差分格式

我们在空间取矩形网格,即在 x 方向取步长 h , 在 y 方向取步长 k , 并将原点作为节点。将方程(21)~(25)离散如下:

$$u_{i,j+\frac{1}{2}} = u_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \tau \left[\frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - 2u_{i,j+\frac{1}{2}}^n + u_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n}{h^2} + \frac{u_{i,j+\frac{3}{2}}^n - 2u_{i,j+\frac{1}{2}}^n + u_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{k^2} \right] =$$

$$u_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \tau \left[\alpha u_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n + \alpha u_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n + \beta u_{i,j+\frac{3}{2}}^n + \beta u_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \gamma u_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right],$$

$$(i = -I, \dots, I; j = -J, \dots, J-1), \quad (27)$$

$$v_{i+\frac{1}{2},j} = v_{i+\frac{1}{2},j}^n + \tau \left[\frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - 2v_{i+\frac{1}{2},j}^n + v_{i+\frac{1}{2},j-1}^n}{h^2} + \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - 2v_{i+\frac{1}{2},j}^n + v_{i+\frac{1}{2},j-1}^n}{k^2} \right] =$$

$$v_{i+\frac{1}{2},j}^n + \tau \left[\alpha v_{i+\frac{1}{2},j+1}^n + \alpha v_{i+\frac{1}{2},j-1}^n + \beta v_{i+\frac{1}{2},j}^n + \beta v_{i+\frac{1}{2},j-1}^n - \gamma v_{i+\frac{1}{2},j}^n \right],$$

$$(i = -I, \dots, I-1; j = -J, \dots, J), \quad (28)$$

$$u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\tau}{h} \left(P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} - P_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right),$$

$$(i = -I, \dots, I; j = -J, \dots, J-1), \quad (29)$$

$$v_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = v_{i+\frac{1}{2},j}^n - \frac{\tau}{k} \left(P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} - P_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right),$$

$$(i = -I, \dots, I-1; j = -J, \dots, J), \quad (30)$$

$$\alpha P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} + \alpha P_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} + \beta P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{n+1} + \beta P_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1} - \gamma P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} =$$

$$\frac{1}{\tau} \left(\frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j+\frac{1}{2}}}{h} + \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1} - v_{i+\frac{1}{2},j}}{k} \right),$$

$$(i = -I+1, \dots, I-1; j = -J+1, \dots, J-1), \quad (31)$$

其中, $\alpha = \frac{1}{h^2}$, $\beta = \frac{1}{k^2}$, $\gamma = \frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2}$, $h = \frac{A}{I}$, $k = \frac{H}{J}$ 。

3.2 截断误差

定理2 差分方程(27)~(31)对微分方程(12)~(14)的近似的截断误差为 $O(\tau + h^2 + k^2)$ 。

此定理是十分明显的。因为在上述离散过程中,对时间我们采用了线性近似

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau},$$

故其截断误差为 $O(\tau)$, 而对空间变量离散时,我们全部采用了中心差分格式,因而其截断误差为 $O(h^2 + k^2)$ 。

3.3 边界条件的处理

1) 关于公式(27)中的 $u_{i,J+\frac{1}{2}}^n$, $u_{i,-J-\frac{1}{2}}^n$

根据边界条件 $u|_{y=H} = \delta$, $u|_{y=-H} = -\delta$, 我们作如下处理:

$$u_{i,J+\frac{1}{2}}^n = -u_{i,-J-\frac{1}{2}}^n + 2\delta, \quad (i = -I+1, \dots, I), \quad (32)$$

$$u_{i,-J-\frac{1}{2}}^n = -u_{i,J+\frac{1}{2}}^n - 2\delta, \quad (i = -I, \dots, I-1). \quad (33)$$

当 $i = \pm I$ 时,公式中出现 $u_{I+1,j+\frac{1}{2}}^n$ 与 $u_{I-1,j+\frac{1}{2}}^n$ 项,根据条件 $\sigma_{11}|_{x=\pm A} = 0$, 取

$$u_{l+1, j+\frac{1}{2}}^n = u_{l-1, j+\frac{1}{2}}^n + \frac{h}{2}(P_{l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n + P_{l-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n), \quad (j = -J, \dots, J-1), \quad (34)$$

$$u_{l-1, j+\frac{1}{2}}^n = u_{l+1, j+\frac{1}{2}}^n - \frac{h}{2}(P_{l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n + P_{l-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n), \quad (j = -J, \dots, J-1), \quad (35)$$

2) 关于公式(28)中的 $v_{i+\frac{1}{2}, J+1}^n, v_{i+\frac{1}{2}, -J-1}^n$

当 $j = \pm J$ 时, 公式中出现 $v_{i+\frac{1}{2}, J+1}^n$ 与 $v_{i+\frac{1}{2}, -J-1}^n$ 项. 根据 $v|_{y=\pm H} = 0$ 取

$$v_{i+\frac{1}{2}, J+1}^n = -v_{i+\frac{1}{2}, J-1}^n, \quad (i = -I, \dots, I-1), \quad (36)$$

$$v_{i+\frac{1}{2}, -J-1}^n = -v_{i+\frac{1}{2}, -J+1}^n, \quad (i = -I, \dots, I-1). \quad (37)$$

当 $i = -I$ 时, 公式中出现 $v_{l-\frac{1}{2}}^n$, 当 $i = I-1$ 时, 公式中出现 $v_{l+\frac{1}{2}, j}^n$, 根据边界条件 $\sigma_{12}|_{x=\pm A} = 0$, 我们取

$$v_{l-\frac{1}{2}, j}^n = v_{l+\frac{1}{2}, j}^n + \frac{h}{k}(u_{l-1, j+\frac{1}{2}}^n - u_{l, j-\frac{1}{2}}^n), \quad (j = -J, \dots, J), \quad (38)$$

$$v_{l+\frac{1}{2}, j}^n = v_{l-\frac{1}{2}, j}^n + \frac{h}{k}(u_{l, j+\frac{1}{2}}^n - u_{l-1, j-\frac{1}{2}}^n), \quad (j = -J, \dots, J). \quad (39)$$

现考虑公式(27)中的 $u_{\pm l, J+\frac{1}{2}}^n, u_{\pm l, -J-\frac{1}{2}}^n$ 项. 我们用外推法来计算这些值得

$$u_{\pm l, -J-\frac{1}{2}}^n = 3u_{\pm l, -J+\frac{1}{2}}^n - 3u_{\pm l, -J-\frac{3}{2}}^n + u_{\pm l, -J-\frac{5}{2}}^n, \quad (40)$$

$$u_{\pm l, J+\frac{1}{2}}^n = 3u_{\pm l, J-\frac{1}{2}}^n - 3u_{\pm l, J-\frac{3}{2}}^n + u_{\pm l, J-\frac{5}{2}}^n. \quad (41)$$

3) 关于公式(29)~(31)中的 $P_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1}$

当 $j = \pm J$ 时, 公式中出现 $P_{i+\frac{1}{2}, J+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 与 $P_{i+\frac{1}{2}, -J-\frac{1}{2}}^{n+1}$ 项, 根据(24)式及边界条件 $v|_{y=\pm H} = 0$ 得

$$\left. \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right|_{y=\pm H} = \frac{1}{\tau} v|_{y=\pm H},$$

将其离散化并整理得

$$P_{i+\frac{1}{2}, J+\frac{1}{2}}^{n+1} = P_{i+\frac{1}{2}, J-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{k}{\tau} v_{i+\frac{1}{2}, J}, \quad (42)$$

$$P_{i+\frac{1}{2}, -J-\frac{1}{2}}^{n+1} = P_{i+\frac{1}{2}, -J+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{k}{\tau} v_{i+\frac{1}{2}, -J}. \quad (43)$$

当 $i = \pm I$ 时, 公式(29)~(31)中出现 $P_{l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 与 $P_{l-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 项. 利用 $\sigma_{11}|_{x=\pm A} = 0$ 得

$$\left[\frac{4\tau}{h^2} + 1 \right] P_{l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1} = 2 \frac{u_{l+1, j+\frac{1}{2}} - u_{l-1, j+\frac{1}{2}}}{h} + \left[\frac{8\tau}{h^2} - 1 \right] P_{l-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{4\tau}{h^2} P_{l-\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad (j = -J, \dots, J), \quad (44)$$

$$\left[\frac{4\tau}{h^2} + 1 \right] P_{l-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1} = 2 \frac{u_{l-1, j+\frac{1}{2}} - u_{l+1, j+\frac{1}{2}}}{h} + \left[\frac{8\tau}{h^2} - 1 \right] P_{l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{4\tau}{h^2} P_{l+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad (j = -J, \dots, J), \quad (45)$$

其中 $u_{l+1, j+\frac{1}{2}}, u_{l-1, j+\frac{1}{2}}$ 可由外推法求得.

4 差分格式的稳定性

上述差分方程(27)~(31)实际上等价于将方程(17)~(19)直接作如下差分:

$$u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{\tau}{h^2}(u_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - 2u_{i,j+\frac{1}{2}}^n + u_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n) + \frac{\tau}{k^2}(u_{i,j+\frac{3}{2}}^n - 2u_{i,j+\frac{1}{2}}^n + u_{i,j-\frac{1}{2}}^n) - \frac{\tau}{h}(P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} - P_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n), \quad (46)$$

$$v_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = v_{i+\frac{1}{2},j}^n + \frac{\tau}{h^2}(v_{i+\frac{3}{2},j}^n - 2v_{i+\frac{1}{2},j}^n + v_{i-\frac{1}{2},j}^n) + \frac{\tau}{k^2}(v_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - 2v_{i+\frac{1}{2},j}^n + v_{i+\frac{1}{2},j-1}^n) - \frac{\tau}{k}(P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} - P_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n), \quad (47)$$

$$\frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}}{h} + \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+1} - v_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}}{k} = 0 \quad (48)$$

设

$$u_{i,j}^n = U^n e^{l\omega(ih+jk)}, \quad v_{i,j}^n = V^n e^{l\omega(ih+jk)}, \quad P_{i,j}^n = Q^n e^{l\omega(ih+jk)},$$

其中, $l^2 = -1$; U^n, V^n, Q^n 分别为 $u_{i,j}^n, v_{i,j}^n, P_{i,j}^n$ 的增长因子. 于是方程(46) ~ (48) 可写作

$$U^{n+1} e^{l\omega[(i+\frac{1}{2})h+(j+\frac{1}{2})k]} = U^n e^{l\omega[ih+(j+\frac{1}{2})k]} + \frac{\tau}{h^2} \left\{ U^n e^{l\omega[(i+1)h+(j+\frac{1}{2})k]} - 2U^n e^{l\omega[ih+(j+\frac{1}{2})k]} + U^n e^{l\omega[(i-1)h+(j+\frac{1}{2})k]} \right\} + \frac{\tau}{k^2} \left\{ U^n e^{l\omega[ih+(j+\frac{3}{2})k]} - 2U^n e^{l\omega[ih+(j+\frac{1}{2})k]} + U^n e^{l\omega[ih+(j-\frac{1}{2})k]} \right\} - \frac{\tau}{h} \left\{ Q^{n+1} e^{l\omega[(i+\frac{1}{2})h+(j+\frac{1}{2})k]} - Q^n e^{l\omega[(i-\frac{1}{2})h+(j+\frac{1}{2})k]} \right\}, \quad (49)$$

$$V^{n+1} e^{l\omega[(i+\frac{1}{2})h+jk]} = V^n e^{l\omega[(i+\frac{1}{2})h+jk]} + \frac{\tau}{h^2} \left\{ V^n e^{l\omega[(i+\frac{1}{2})h+jk]} - 2V^n e^{l\omega[(i+\frac{1}{2})h+jk]} + V^n e^{l\omega[(i-\frac{1}{2})h+jk]} \right\} + \frac{\tau}{k^2} \left\{ V^n e^{l\omega[(i+\frac{1}{2})h+(j+1)k]} - 2V^n e^{l\omega[(i+\frac{1}{2})h+jk]} + V^n e^{l\omega[(i+\frac{1}{2})h+(j-1)k]} \right\} + \frac{\tau}{k} \left\{ Q^{n+1} e^{l\omega[(i+\frac{1}{2})h+(j+\frac{1}{2})k]} - Q^{n+1} e^{l\omega[(i+\frac{1}{2})h+(j-\frac{1}{2})k]} \right\}, \quad (50)$$

$$k \left\{ U^{n+1} e^{l\omega[(i+1)h+(j+\frac{1}{2})k]} - U^{n+1} e^{l\omega[ih+(j+\frac{1}{2})k]} \right\} + h \left\{ V^{n+1} e^{l\omega[(i+\frac{1}{2})h+(j+1)k]} - V^{n+1} e^{l\omega[(i+\frac{1}{2})h+jk]} \right\} = 0 \quad (51)$$

消去公因子化简并写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\tau}{h} 2l \sin \frac{\omega h}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\tau}{k} 2l \sin \frac{\omega k}{2} \\ k \sin \frac{\omega h}{2} & h \sin \frac{\omega k}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{n+1} \\ V^{n+1} \\ Q^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^n \\ V^n \\ Q^n \end{pmatrix}, \quad (52)$$

由此求得过渡矩阵为

$$G = \begin{pmatrix} \beta_1 \left(1 - \frac{k\tau}{\alpha_1 h} 2l \sin^2 \frac{\omega h}{2} \right) & -\frac{\beta_1 \tau}{\alpha_1} 2l \sin \frac{\omega h}{2} \sin \frac{\omega k}{2} & 0 \\ -\frac{\beta_1 \tau}{\alpha_1} 2l \sin \frac{\omega h}{2} \sin \frac{\omega k}{2} & \beta_1 \left(1 - \frac{h\tau}{\alpha_1 k} 2l \sin^2 \frac{\omega k}{2} \right) & 0 \\ \frac{\beta_1 k}{\alpha_1} \sin \frac{\omega h}{2} & \frac{\beta_1 h}{\alpha_1} \sin \frac{\omega k}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

其中,

$$\alpha_1 = \frac{\tau_k}{h} 2l \sin^2 \frac{\omega h}{2} + \frac{\tau_h}{k} 2l \sin^2 \frac{\omega k}{2},$$

$$\beta_1 = 1 - \frac{4\tau}{h^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2}} \frac{\omega h}{2} - \frac{4\tau}{k^2 \sin^2 \frac{\omega k}{2}} \frac{\omega k}{2}.$$

容易求得 G 的特征值为

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = \beta_1.$$

根据 von Neumann 条件知, 当 $|\beta_1| \leq 1$ 时, 差分格式是稳定的, 此即

$$\frac{\tau}{h^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2}} + \frac{\tau}{k^2 \sin^2 \frac{\omega k}{2}} \leq \frac{1}{2}. \quad (53)$$

令

$$\rho = \max \left[\frac{\tau}{h^2}, \frac{\tau}{k^2} \right],$$

则若要(53)式满足, 只要 $\rho \leq 1/4$ 即可, 此即

定理3 差分方程(27)~(31)在 $\rho \leq 1/4$ 的条件下是稳定的.

5 数值实验

对我们所考虑的问题, 因为向两相反方向所施加的切向力是对称的, 而粘附体又是各向同性的, 并在坐标系中关于轴对称, 故 $u(x, y)$ 在 $x = 0$ 应当满足 $u(0, y) = ky$, 其中 k 为上述直线的斜率.

首先, 我们取 $A = 2, H = 1, \delta = 0.1$, 分别在 $t = 60, t = 80$ 时, 就文中所提边界条件进行了试算, 将结果 $u(0, y)$ 绘成图3. 图中两条曲线是重合的, 并与前面的定性分析相吻合, 这说明定理1的结论是正确的, 我们所提边界条件是合适的, 且计算时间不必取得太大. 然后我们又在 $t = 60$ 时分别计算了 $A = 4, H = 1, \delta = 0.2$ 和 $A = 5, H = 2, \delta = 0.5$ 条件下的 $u(-1, y)$ 和 $u(0, y)$, 也获得上述结论.

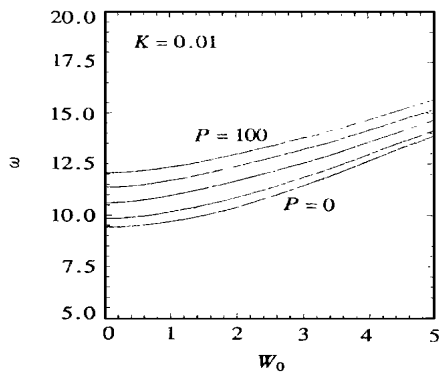


图3 $u(0, y)$ 的数值解

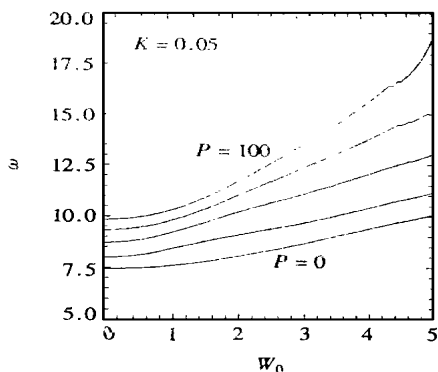


图4 不同边界条件下的解与理想解的误差

此外, 我们还在计算中取了其它的边界条件. 我们发现, 在 v 的计算中, 利用(28)式是会遇到 $v_{i \pm \frac{1}{2}, j}$ 的计算, 这时若利用 $\sigma_{11}|_{x=A} = 0$ 和 $\sigma_{12}|_{x=A} = 0$ 均可取得一致的计算效果, 而若用外推法求之, 则可使精度有较大提高. 我们把两种计算结果与理想结果在 $(0, y)$ 处的绝对误差(用 $\text{errm}(0, y)$ 表示) 绘成图4. 图中实线表示用外推法给出 v 的边界条件时的计算结果, 虚线表示用 $\sigma_{11}|_{x=A} = 0$ 给出 v 的边界条件时的计算结果. 从图中可见, 两种方法的计算结果无质的差别, 但在 P 的计算中边界条件的选取对计算结果的影响是致命的. 我们分别对边

界条件的如下组合进行了计算(在用边界外部点时,我们用外推法求得),

- (1) 在 $x = \pm A$ 时均利用 $\sigma_{11} = 0$, 为本文所作结果;
- (2) 在 $x = -A$ 时利用 $\sigma_{11} = 0$, 而在 $x = A$ 时利用 $\sigma_{12} = 0$, 计算溢出;
- (3) 在 $x = -A$ 时利用 $\sigma_{12} = 0$, 而在 $x = A$ 时利用 $\sigma_{11} = 0$, 则计算不收敛;
- (4) 在 $x = \pm A$ 时, 均利用 $\sigma_{12} = 0$, 结果同(3)。

[参 考 文 献]

- [1] Gent A N, Meinecke E A. Compression bending and shearing of bonded rubber blocks[J]. Polymer Engineering and Science, 1970, 10(1): 48~ 53.
- [2] Lindley P B. A finite_element programme for the plane_strain analysis of rubber[J]. J Strain Analysis, 1975, 10(1): 25~ 31.
- [3] Lindley P B, Teo S C. Some numerical stiffnesses of soft elastic blocks bonded to rigid end plates [J]. Plastics and Rubber Mat Appl, 1978, 8: 113~ 116.
- [4] Haddow J B, Ogden R W. Compression of bonded elastic bodies[J]. J Mech Phys Solids, 1988, 36(5): 551~ 579.
- [5] 徐秉业, 刘信声. 应用弹塑性力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995, 382~ 384.

The Solving Problem and the Difference Solving Process for the Shear of a Bonded Elastic Bodies

Zhang Luming, Chang Qianshun

(Institute of Applied Mathematics, the Academia Sinica, Beijing 100080, P R China)

Abstract: A long elastomer with rectangular section bonded between two parallel rigid surfaces will come about deformation because of the role of two opposite shear forces in both the top and bottom plate. The mathematic model of the deformation is deduced and a new difference solving process is proposed. For boundary condition with singularity, a detailed analysis and deduction is given and a new rational and effective discrete boundary condition is proposed. Simulate computation demonstrates that the result is identical with qualitative analysis. Therefore, a new and functional numerical method and quantitative analysis method are provided.

Key words: elastic body; shear; mathematic model; difference scheme