应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 01_0025_05

非局部非对称弹性理论混合边值问题的提法*

戴天民

(辽宁大学 数学应用中心和数学系, 沈阳 110036)

摘要: 从完全的虚功和虚功率原理以及广义 Piola 定理出发一并推导出非局部非对称弹性理论的运动方程、所有边界条件和全能量方程. 把这里给出的边界条件和高键, 戴天民的相应结果加在一起即可表述非局部非对称线性弹性理论的混合边值问题.

关 键 词: 非局部非对称弹性理论; 虚功和虚功率原理; 混合边值问题
中图分类号: O313.2 文献标识码: A

引 言

众所周知, Atkinson(参阅[1, 2, 3, 4]) 和 Eringen 及其同事(参阅[5, 6, 7]) 之间对裂纹的非局部混合边值问题有着学术上的争论. 因此, 正确地表述混合边值问题是非局部弹性理论中的一个尚未彻底解决的重要问题.

王锐[8, 9] 针对这一问题是提出裂纹边值问题解的不存在性是由于没有给出正确的非局部应力边界条件, 并证明了在裂纹前沿存在着非局部应力, 它与裂纹上、下表面间的长程内聚力相平衡, 在给定非局部应力边界条件时必须考虑内聚力. 最近, 黄再兴等[10] 指出, Atkinson 所证明的解不存在性的结论的根源在于非局部场论本身, 尤其是在进行线性化处理时忽略了非局部体力的影响.

非局部弹性理论中的另一个重要问题是要弄清楚引起应力非对称性的原因. 尽管 Eringen 在文献[11] 中指出非局部弹性理论中应力张量可能是非对称的, 但他却作了下列限制, 致使应力张量仍然是对称的:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{F}}, \tag{1}$$

这里, $\hat{\boldsymbol{F}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 分别为非局部体力和体力矩剩余量.

高键在他的博士论文[12] 中, 根据非局部连续统场论的公理体系建立起带有体力矩的非局部弹性理论. 后来, 他和戴天民[13] 及陈至达[14] 发表了线性及非线性非局部非对称弹性理论.

在本文中, 我们提出完全的虚功和虚功率原理, 并从它们和推广的 Piola 定理一并推导出运动方程和边界条件以及全能量方程. 把这里提出的应力边界条件和文献[13] 中的相应结果

* 收稿日期: 1998_09_28; 修订日期: 1999_10_12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672023) 和辽宁省科研基金(95211011) 资助项目
作者简介: 戴天民(1931~), 男, 满族. 博士, 博导, 教授. 已发表专著 12 部, 论文 50 余篇.

加在一起即可表述非局部非对称线性弹性理论的混合边值问题, 所得结果与文献[10] 进行了对比•

1 完全的虚功原理

1) 局部非对称弹性理论的完全的虚功原理

我们公设局部非对称弹性理论的完全的虚功原理, 即, 所有外部作用因素所做的虚功等于虚内能:

$$\begin{aligned}\int_v \rho\delta e\,\mathrm{d}v = &\int_v \rho(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})\cdot\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}v+\int_v \rho[\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})+\boldsymbol{c}]\cdot\delta\boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}v+\\&\int_{a_t}\boldsymbol{p}^{(n)}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}a+\int_{a_c}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}^{(n)})\cdot\delta\boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}a+\int_v \rho\delta(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}v+\\&\int_v \rho\delta[(\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})+\boldsymbol{c})]\cdot\boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}v+\int_{a_u}\delta\boldsymbol{p}^{(n)}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}a+\\&\int_{a_\theta}\delta(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}^{(n)})\cdot\boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}a,\end{aligned}\tag{2}$$

这里, $e, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}^{(n)}$ 和上冠"－" 的量分别为内能, 体力矢量, 速度, 体力矩矢量, 位移矢量, 转动角矢量, 面力矢量和在边界上给定的量•

考虑到

$$\int_{a_t}\boldsymbol{p}^{(n)}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}a=\int_v(\boldsymbol{p}_k\cdot\delta\boldsymbol{u})_{,k}\,\mathrm{d}v=\int_v t_{kl,k}\delta u_l\,\mathrm{d}v+\int_v t_{kl}\delta u_{l,k}\,\mathrm{d}v,\tag{a}$$

$$\int_{a_c}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}^{(n)})\cdot\delta\boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}a=\int_v(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}_k)_{,k}\delta\boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}v=\int_v\varepsilon_{mlp}(t_{ml}+x_m t_{kl,k})\delta\theta_p\,\mathrm{d}v\text{•}\tag{b}$$

并把(a) 和(b) 代入(2), 则得

$$\begin{aligned}\int_v\delta e\,\mathrm{d}v=&\int_v[\rho(f_l-\dot{v}_l)+t_{kl,k}]\delta u_l\,\mathrm{d}v+\int_v\Big\{\varepsilon_{mlp}x_m[\rho(f_l-\dot{v}_l)+t_{kl,k}]+\\&(c_p+\varepsilon_{mlp}t_{ml})\Big\}\delta\theta_p\,\mathrm{d}v+\int_v\delta[\rho(f_l-\dot{v}_l)+t_{kl,k}]u_l\,\mathrm{d}v+\\&\int_v\delta\Big\{\varepsilon_{mlp}x_m[\rho(f_l-\dot{v}_l)+t_{kl,k}]+(\rho c_p+\varepsilon_{mlp}t_{ml})\Big\}\theta_p\,\mathrm{d}v+\\&\int_v t_{kl}\delta u_{l,k}\,\mathrm{d}v+\int_v\delta t_{kl}u_{l,k}\,\mathrm{d}v,\end{aligned}\tag{3}$$

这里, t_{kl} 为 Cauchy 形式应力张量•

把经典连续统力学的 Piola 定理[15] 加以推广, 则可得下列 Cauchy 形式的运动方程和全能量方程•

1) 动量方程

$$\rho(f_l-\dot{v}_l)+t_{kl,k}=0,\tag{4a}$$

或

$$\rho(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})+\nabla\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}\text{•}\tag{4b}$$

2) 动量矩方程

$$\varepsilon_{mlp}t_{ml}+c_p=0,\tag{5a}$$

或

$$\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{t}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\text{•}\tag{5b}$$

3) 全能量方程

$$\delta e = t_{kl}\delta u_{l,k} + \delta t_{kl}u_{l,k} = \delta(t_{kl}u_{l,k}), \tag{6a}$$

即

$$e = t_{kl}u_{l,k} = \boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{u}. \tag{6b}$$

4) 边界条件

把下列关系式代入(2)的左侧

$$\int_v t_{kl}\delta u_{l,k}\mathrm{d}v = \int_a n_k t_{kl}\delta u_l \mathrm{d}a - \int_v t_{kl,k}\delta u_l \mathrm{d}v, \tag{a}$$

$$\int_v \delta t_{kl}u_{l,k}\mathrm{d}v = \int_a n_k\delta t_{kl}u_l \mathrm{d}a - \int_v \delta t_{kl,k}u_l \mathrm{d}v. \tag{b}$$

则得应力和位移边界条件如下:

$$p_l^{(n)} = n_k t_{kl} \quad (\text{在 } a_t \text{ 上}), \tag{7}$$

$$u_l = \bar{u}_l \quad (\text{在 } a_u \text{ 上}). \tag{8}$$

我们从(4)可以看到, 体力矩是引起弹性体变形时应力非对称的原因.

2) 非局部非对称弹性理论的完全的虚功原理

不失一般性, 我们假定非局部质量剩余量 $\hat{\rho} = 0$. 令 $\hat{\boldsymbol{F}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 分别为非局部体力和体力矩剩余量. 由于 $\delta\boldsymbol{u}$ 和 $\delta\theta$ 是任意的, 我们可以对(3)进行局部化并推广经典弹性理论的 Piola 定理. 于是, 我们可得下列运动方程、全能量方程和边界条件:

1) 动量方程

$$\rho(f_l - \dot{v}_l) + t_{kl,k} = -\rho\hat{F}_l, \tag{9a}$$

或

$$\rho(\boldsymbol{f} - \dot{\boldsymbol{v}}) - \nabla\cdot\boldsymbol{t} = -\rho\hat{\boldsymbol{F}}. \tag{9b}$$

2) 动量矩方程

$$\rho c_p + \varepsilon_{\mathrm{mlp}}t_{\mathrm{ml}} = -\rho(\hat{L}_p - \varepsilon_{\mathrm{mlp}}x_m\hat{F}_l), \tag{10a}$$

$$\rho\boldsymbol{c} + \varepsilon:\boldsymbol{t} = -\rho(\hat{\boldsymbol{L}} - \varepsilon:\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{F}}). \tag{10b}$$

由(10)我们看到, 应力张量的非对称性是由 $\boldsymbol{c}$ 和 $\hat{\boldsymbol{F}}$ 以及 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 引起的.

3) 全能量方程

$$\rho\delta e = \delta(t_{kl}u_{l,k}) - \delta(\hat{F}_l u_l) - \delta[(\hat{L}_p - \varepsilon_{\mathrm{mlp}}x_m\hat{F}_l)\theta_p],$$

亦即

$$\rho e = t_{kl}u_{l,k} - \hat{F}_l u_l - (\hat{L}_p - \varepsilon_{\mathrm{mlp}}x_m\hat{F}_l)\theta_p, \tag{11a}$$

或

$$\rho e = \boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{u} - (\hat{\boldsymbol{L}} - \varepsilon:\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{F}})\cdot\theta. \tag{11b}$$

4) 边界条件

$$p_l^{(n)} = n_k t_{kl}, \tag{12}$$

$$u_l = \bar{u}_l. \tag{13}$$

在本理论中非局部体力和体力矩剩余量必须满足下列条件:

$$\int_v \rho\hat{F}_l\delta u_l \mathrm{d}v = 0, \tag{14}$$

和

$$\int_v \rho\hat{L}_p\delta\theta_p \mathrm{d}v = 0. \tag{15}$$

3) 完全的虚功率原理

在(2)中用虚速度 $\delta\dot{\boldsymbol{u}}$ 和虚转动角速度 $\delta\dot{\theta}$ 代替虚位移 $\delta\boldsymbol{u}$ 和虚转动角 $\delta\theta$ 后, 则得非局部非对称弹性理论的完全的虚功率原理•

重复上述用过的步骤, 即可推导出同样的运动方程以及应力和速度边界条件• 但在这种情况下, 全能量率方程具有下列形式:

$$\rho\dot{e} = t_{kl}\dot{u}_{l,k} - \rho\hat{F}_l\dot{u}_l - \rho(\hat{L}_l - \varepsilon_{mlp}x_m\hat{F}_l)\dot{\theta}_p \cdot \qquad (16)$$

对于非局部非对称热弹性理论, 全能量率方程可写成下列形式:

$$\rho\dot{e} = t_{kl}\dot{u}_{l,k} + \rho h + q_{k,k} - \rho\hat{F}_l\dot{u}_l - \rho(\hat{L}_p - \varepsilon_{mlp}x_m\hat{F}_l)\dot{\theta}_p + \rho\hat{H} \cdot \qquad (17)$$

这里, h, q_k 和 $\hat{H}$ 分别为热源密度, 热矢量和非局部能源密度剩余量•

4) 非局部非对称线性弹性理论的混合边值问题的提法

在[13]中没有讨论边界条件问题• 应力边界条件(12)可以写成下列形式:

$$P_l^{(n)} = n_k(t_{kl}^{(s)} + t_{kl}^{(a)}) \cdot \qquad (18)$$

这里, $t_{kl}^{(s)}$ 和 $t_{kl}^{(a)}$ 分别为应力张量 t_{kl} 的对称和反对称部分•

事实上, (10)可以写成

$$\varepsilon_{mlp}t_{ml} = -\rho[(c_p + \hat{L}_p) - \varepsilon_{mlp}x_m\hat{F}_l] \cdot \qquad (19)$$

文献[10]的作者们认为 $\hat{F}_l$ 只在边界 a_t 上存在, 而在体内消失•

如果我们假定 $c_p = 0$, $\hat{L}_p = 0$, 并且 $\hat{F}_l$ 只在边界 a_t 上存在, 则由(19)可得

$$t_{ml} = \rho x_m\hat{F}_l, \qquad (20)$$

亦即

$$t_{ml}^{(a)} = \frac{1}{2}(t_{ml} - t_{lm}) = \frac{\rho}{2}(x_m\hat{F}_l - x_l\hat{F}_m) \cdot \qquad (21)$$

把(21)代入(18), 则得没有体力矩的非局部线性弹性理论的应力边界条件如下:

$$p_l^{(n)} = u_m\left[t_{ml}^{(s)} + \frac{\rho}{2}(x_m\hat{F}_l - x_l\hat{F}_m)\right] \qquad (\text{在 } a_t \text{ 上}) \cdot \qquad (22)$$

此即文献[10]给出的结果•

在非局部非对称线性弹性理论的一般情况下, 位移的边界条件为

$$u_l = \bar{u}_l \qquad (\text{在 } a_u \text{ 上}) \cdot \qquad (23)$$

而应力边界条件, 可推导如下•

事实上, 从(19)我们有

$$t_{ij}^{(a)} = \frac{\rho}{2}[(x_i\hat{F}_j - x_j\hat{F}_i) - \varepsilon_{ijp}(c_p + \hat{L}_p)] \cdot \qquad (24)$$

于是应力边界条件(18)具有下列形式:

$$p_l^{(n)} = n_k\left\{t_{kl}^{(s)} + \frac{\rho}{2}[(x_k\hat{F}_l - x_l\hat{F}_k) - \varepsilon_{klp}(c_p + \hat{L}_p)]\right\} \qquad (\text{在 } a_t \text{ 上}) \cdot \qquad (25)$$

因此, 非局部非对称线性弹性理论混合边值问题的提法可由文献[13]中的(36)以及本文的(23)和(25)加以表述•

[参 考 文 献]

[1] Atkinson C. On some recent crack tip stress calculations in non_local elasticity[J]. Arch Mech, 1980, **32**: 317~ 328.

[2] Atkinson C. Crack problem is non_local elasticity[J]. Arch Mech, 1980, **32**: 567~ 614.

[3] Atkinson C. Non_local clasticity[A]. In: Int Symposium on Defects &Fracture[C]. Poland, 1980, 13 ~ 17.

[4] Atkinson C. Some problems associated with some current non_local theories of elasticity[A]. In: 5th Int Symposium of CMDS[C]. Balkema: Nottingham, 1985, 85~ 88.

[5] Eringen A C, Speziale C G, Kim B S. Crack tip problem in nonlocal clasticity[J]. J Mech Phys Solids, 1977, **25**: 339~ 3564.

[6] Eringen A C. Line crack subject to shear[J]. Int J Fracture, 1978, **14**: 365~ 379.

[7] Ari N, Eringen A C. Non_local stress field at Griffith crack[J]. Cryst Latt Def and Amorph Mat, 1983, **10**: 33~ 38.

[8] 王锐. 非局部弹性体中的裂纹问题[J]. 中国科学(A辑), 1989, **19**(10): 1056~ 1064.

[9] 王锐. 非局部弹性理论中的混合边值问题[J]. 科学通报, 1989, **34**(6): 412~ 414.

[10] 黄再兴, 樊蔚勋, 黄维扬. 关于非局部场论的几个新观点及其在断裂力学中的应用(Ⅰ)[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(1): 45~ 54.

[11] Eringen A C. Nonlocal polar field theories[A]. in: A C Eringen ed. Continuum Physics[C]. Vol Ⅳ, Academic Press, 1976.

[12] 高键. 博士论文[D]. 徐州: 中国矿业大学, 1988.

[13] 高键, 戴天民. 具有非局部体力矩的非局部弹性理论[J]. 力学学报, 1990, **22**(4): 446~ 456.

[14] 高键, 陈至达. 非对称的非局部弹性固体理论[J]. 应用数学和力学, 1992, **13**(4): 793~ 804.

[15] Truesdell C, Toupin R. The Classical Field Theories[A]. In: S Fluegge Ed. Handbuch der Physik, Vol. Ⅲ/1, Springer, 1960.

The Mixed Boundary_Value Problem for Nonlocal Asymmetric Elasticity

Dai Tianmin

(Center for the Application of Mathematics &Department of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P R China)

Abstract: In this paper the equations of motion and all boundary conditions as well as the energy equation for nonlocal asymmetric elasticity are derived together from the complete principles of virtual work and virtual power as well as the generalized Piola theorem. Adding the boundary conditions prensented here to the results by Gao and Dai, the mixed boundary_value problem of the nonlocal asymmetric linear elasticity are formulated.

Key words: nonlocal asymmetric elasticity; principles of virtual work and power; mixed boundary_value problem