应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 01_0067_06

对广义达朗贝尔运动方程的一点补遗*

章定国

(南京理工大学 理学院, 南京 210094)

(邬瑞峰推荐)

摘要: 对传统的广义达朗贝尔运动方程作了两点推广:
1) 考虑含有移动关节的情形;
2) 把方程的适用范围由单链系统推广到树形系统·

关 键 词: 机器人; 动力学; 广义达朗贝尔方程
中图分类号: O313 文献标识码: A

引 言

机器人实施高级反馈闭环控制的最基本条件是动力学方程的良好结构和实时计算· 牛顿_欧拉递推法(N_E 法)[1] 计算效率虽高, 但由于其递推性, 破坏了方程的结构, 先天不足, 不能用于先进的控制系统· 拉格朗日_欧拉法(L_E)[2] 能建立结构优美的动力学方程, 从其结构来看可以推导出先进的控制规律, 但其原始方程的计算效率在所有机器人建模方法中为最低· 除非经过必要的处理(方程的简化, 并行计算, 符号推导[3]), 否则难以满足高级控制的计算实时性之要求· 广义达朗贝尔方程(G_D 法)[4] 是一种方程结构良好, 计算量中等的建模方法, 就其结构性和计算量要求来讲, 有运用于机器人高级控制系统的前途(适于方程的简化计算, 并行计算和符号推导), 但不足的是目前的 G_D 法只适用于仅含有转动关节的机器人, 且是单链拓扑结构· 因此, 若能把传统的 G_D 法推广到移动关节情形和树形拓扑结构, 则对于机器人动力学建模理论和机器人实施高级控制策略具有理论和实践意义·

1 考虑移动关节的 G_D 运动方程

设机器人可抽象为由转动关节和移动关节连接而成的 n 个自由度的单链多刚体系统· 定义关节指标阵 ξ, 其中

$$\xi_i = \begin{cases} 0 & (\text{第 } i \text{ 关节为移动关节}), \\ 1 & (\text{第 } i \text{ 关节为转动关节})\cdot \end{cases} \tag{1}$$

对系统中各刚体建立连体坐标架, 关节广义坐标统一表示为

$$q_i = \xi_i \theta_i + (1 - \xi_i) d_i, \tag{2}$$

* 收稿日期: 1998_07_15; 修订日期: 1999_07_07
基金项目: 国家自然科学基金项目资助(19702006)
作者简介: 章定国(1967~), 男, 博士, 副教授, 副院长, 研究方向: 多体系统动力学和机器人学, 已发表论文 30 多篇.

θ_i 和 d_i 分别为第 i 关节为转动和移动时的关节变量。

根据角速度的加法定理, 在机座系中刚体 s 的角速度 ω_s 可表示为较低关节的相对角速度之和

$$\omega_s = \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \xi_j z_{j-1}. \tag{3}$$

式中, z_{j-1} 是以机座坐标为参照的关节 j 的转轴(或移动轴)。 将上述角速度左乘以旋转矩阵 ${}^s\boldsymbol{R}_0$, 可将它的参考系变为刚体 s 的坐标系, 即

$${}^s\boldsymbol{R}_0 \omega_s = \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \xi_j {}^s\boldsymbol{R}_0 z_{j-1}. \tag{4}$$

在图 1 中, 令 $\boldsymbol{r}_s$ 为机座坐标系中刚体 s 质心的位置矢量, 则此位置矢量可表示为

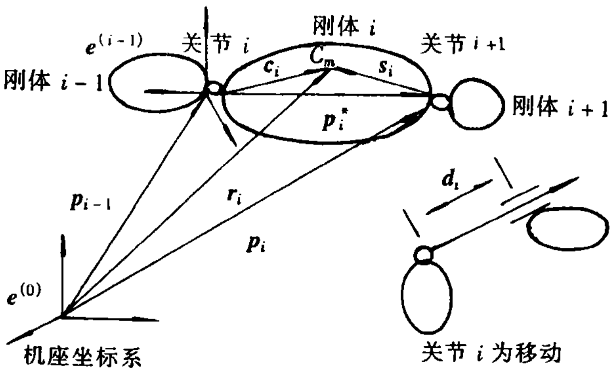

图 1　广义达朗贝尔方程用的一些矢量的定义

$$\boldsymbol{r}_s = \sum_{j=1}^{s-1} [\boldsymbol{p}_j^* + (1-\xi_j) q_j z_{j-1}] + \boldsymbol{c}_s + (1-\xi_s) q_s z_{s-1}, \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{c}_s$ 是刚体 s 质心相对于第 s 铰结点的位置矢量, 以机座坐标系为参照。

刚体 s 相对于机座坐标系的线速度 $\boldsymbol{v}_s$ 可由较低刚体的线速度之和求出

$$\boldsymbol{v}_s = \sum_{k=1}^{s-1} \left[\left(\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \xi_j z_{j-1} \right) \times (\boldsymbol{p}_k^* + (1-\xi_k) q_k z_{k-1}) + (1-\xi_k) \dot{q}_k z_{k-1} \right] + \left(\sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \xi_j z_{j-1} \right) \times [\boldsymbol{c}_s + (1-\xi_s) q_s z_{s-1}] + (1-\xi_s) \dot{q}_s z_{s-1}. \tag{6}$$

刚体 $s(1 \leqslant s \leqslant n)$ 的质量为 m_s, 它的动能可表示为其质心处平移和转动效应的动能之和,

$$K_s = (K_s)_{\mathrm{tran}} + (K_s)_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} m_s (\boldsymbol{v}_s \cdot \boldsymbol{v}_s) + \frac{1}{2} ({}^s\boldsymbol{R}_0 \omega_s)^{\mathrm{T}} I_s ({}^s\boldsymbol{R}_0 \omega_s). \tag{7}$$

为了便于推导, 对运动方程中刚体的平移、转动和重力的影响将分别研究和处理。

1. 刚体平移产生的影响

相对于广义坐标 $q_i(s \geqslant i)$, 对杆件 s 的平移动能, 使用拉格朗日－欧拉法得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial (K_s)_{\mathrm{tran}}}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial (K_s)_{\mathrm{tran}}}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_s \boldsymbol{v}_s \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial \dot{q}_i} \right) - m_s \boldsymbol{v}_s \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial q_i} =$$
$$m_s \dot{\boldsymbol{v}}_s \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial \dot{q}_i} + m_s \boldsymbol{v}_s \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial \dot{q}_i} \right) - m_s \boldsymbol{v}_s \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial q_i}, \tag{8}$$

式中:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial \dot{q}_i} = \xi_i z_{i-1} \times \{ [\boldsymbol{p}_i^* + (1-\xi_i) q_i z_{i-1}] + [\boldsymbol{p}_{i+1}^* + (1-\xi_{i+1}) q_{i+1} z_i] +$$

$$\cdots+[\boldsymbol{p}^*_{s-1}+(1-\xi_{s-1})q_{s-1}\boldsymbol{z}_{s-1}]\Big\}+(1-\xi_i)\boldsymbol{z}_{i-1}+$$
$$\xi_i\boldsymbol{z}_{i-1}\times[\boldsymbol{c}_s+(1-\xi_s)q_s\boldsymbol{z}_{s-1}]\qquad(s\geqslant i).\tag{9}$$

利用恒等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}_s}{\partial\dot{q}_i}\right)=\frac{\partial\dot{\boldsymbol{v}}_s}{\partial\dot{q}_i},\ \frac{\partial\dot{\boldsymbol{v}}_s}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\partial\boldsymbol{v}_s}{\partial q_i}.\tag{10}$$

则方程(8)变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial(K_s)_{\mathrm{tran}}}{\partial\dot{q}_i}\right]-\frac{\partial(K_s)_{\mathrm{tran}}}{\partial q_i}=m_s\dot{\boldsymbol{v}}_s\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}_s}{\partial\dot{q}_i},\tag{11}$$

而式(9)又可以写成

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_s}{\partial\dot{q}_i}=\xi_i\boldsymbol{z}_{i-1}\times(\boldsymbol{r}_s-\boldsymbol{p}_{i-1})+(1-\xi_i)\boldsymbol{z}_{i-1}\qquad(s\geqslant i).\tag{12}$$

所以(11)式变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial(K_s)_{\mathrm{tran}}}{\partial\dot{q}_i}\right]-\frac{\partial(K_s)_{\mathrm{tran}}}{\partial q_i}=m_s\dot{\boldsymbol{v}}_s\cdot[\xi_i\boldsymbol{z}_{i-1}\times(\boldsymbol{r}_s-\boldsymbol{p}_{i-1})+(1-\xi_i)\boldsymbol{z}_{i-1}].\tag{13}$$

对 i 到 n 的刚体求和, 得到由于各刚体的平移效应而产生的反作用力矩(或力)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial(K.E.)_{\mathrm{tran}}}{\partial\dot{q}_i}\right]-\frac{\partial(K.E.)_{\mathrm{tran}}}{\partial q_i}=\sum_{s=i}^{n}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial(K_s)_{\mathrm{tran}}}{\partial\dot{q}_i}\right]-\frac{\partial(K_s)_{\mathrm{tran}}}{\partial q_i}\right\}=$$
$$\sum_{s=i}^{n}m_s\dot{\boldsymbol{v}}_s\cdot[\xi_i\boldsymbol{z}_{i-1}\times(\boldsymbol{r}_s-\boldsymbol{p}_{i-1})+(1-\xi_i)\boldsymbol{z}_{i-1}],\tag{14}$$

其中刚体 s 质心的加速度可由下式求出

$$\dot{\boldsymbol{v}}_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\sum_{k=1}^{s-1}\left[\left(\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\times(\boldsymbol{p}^*_k+(1-\xi_k)q_k\boldsymbol{z}_{k-1})+(1-\xi_k)\dot{q}_k\boldsymbol{z}_{k-1}\right]+\right.$$
$$\left.\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\times[\boldsymbol{c}_s+(1-\xi_s)q_s\boldsymbol{z}_{s-1}]+(1-\xi_s)\dot{q}_s\boldsymbol{z}_{s-1}\right\}.\tag{15}$$

式(15)中的各项分别为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=1}^{s-1}\left\{\left(\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\times[\boldsymbol{p}^*_k+(1-\xi_k)q_k\boldsymbol{z}_{k-1}]\right\}=$$
$$\sum_{k=1}^{s-1}\left\{\left(\sum_{j=1}^{k}\ddot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\times[\boldsymbol{p}^*_k+(1-\xi_k)q_k\boldsymbol{z}_{k-1}]+\right.$$
$$\left.\left(\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\times\left[\left(\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\times\boldsymbol{p}^*_k+(1-\xi_k)\dot{q}_k\boldsymbol{z}_{k-1}\right]\right\}+$$
$$\sum_{k=2}^{s-1}\left\{\sum_{p=2}^{k}\left[\left(\sum_{q=1}^{p-1}\dot{q}_q\xi_q\boldsymbol{z}_{q-1}\right)\times\dot{q}_p\xi_p\boldsymbol{z}_{p-1}\right]\times[\boldsymbol{p}^*_k+(1-\xi_k)q_k\boldsymbol{z}_{k-1}]+\right.$$
$$\left.\left(\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\times\left[\sum_{j=1}^{k-1}(\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1})\times(1-\xi_k)q_k\boldsymbol{z}_{k-1}\right]\right\},\tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=1}^{s-1}[(1-\xi_k)\dot{q}_k\boldsymbol{z}_{k-1}]=\sum_{k=1}^{s-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((1-\xi_k)\dot{q}_k\boldsymbol{z}_{k-1})\right]=$$
$$\sum_{k=1}^{s-1}[(1-\xi_k)\ddot{q}_k\boldsymbol{z}_{k-1}]+\sum_{k=2}^{s-1}\left[\left(\sum_{p=1}^{k-1}\dot{q}_p\xi_p\boldsymbol{z}_{p-1}\right)\times(1-\xi_k)\dot{q}_k\boldsymbol{z}_{k-1}\right],\tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(1-\xi_s)\dot{q}_s\boldsymbol{z}_{s-1}]=(1-\xi_s)\ddot{q}_s\boldsymbol{z}_{s-1}+\left(\sum_{j=1}^{s-1}\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\times(1-\xi_s)\dot{q}_s\boldsymbol{z}_{s-1},\tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left[\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right]\times[\boldsymbol{c}_s+(1-\xi_s)q_s\boldsymbol{z}_{s-1}]\right\}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\times$$

$$
\begin{aligned}
&[\boldsymbol{c}_s+(1-\xi_s)q_s\boldsymbol{z}_{s-1}]+\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{c}_s+(1-\xi_s)q_s\boldsymbol{z}_{s-1}]=\\
&\left\{\left(\sum_{j=1}^{s}\ddot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right)+\sum_{j=2}^{s}\left[\left(\sum_{p=1}^{j}\dot{q}_p\xi_p\boldsymbol{z}_{p-1}\right)\times\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right]\right\}\times\\
&[\boldsymbol{c}_s+(1-\xi_s)q_s\boldsymbol{z}_{s-1}]+\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\times\left[\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\times\boldsymbol{c}_s+\right.\\
&\left.(1-\xi_s)\dot{q}_s\boldsymbol{z}_{s-1}+(1-\xi_s)q_s\left(\sum_{j=1}^{s-1}\dot{q}_j\xi_j\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\times\boldsymbol{z}_{s-1}\right]\cdot
\end{aligned}
\tag{19}
$$

2. 刚体转动产生的影响

刚体 s 转动效应的动能是

$$
\begin{aligned}
(K_s)_{\mathrm{rot}}=&\frac{1}{2}({}^s\boldsymbol{R}_0\,\boldsymbol{\omega}_s)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_s({}^s\boldsymbol{R}_0\,\boldsymbol{\omega}_s)=\\
&\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_s\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\cdot
\end{aligned}
\tag{20}
$$

由于

$$
\frac{\partial(K_s)_{\mathrm{rot}}}{\partial\dot{q}_i}=(\xi_i{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_s\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\qquad(s\geqslant i),
\tag{21}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial q_i}({}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1})=({}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1})\times({}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1})\xi_i\qquad(i\geqslant j),
\tag{22}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1})=&\sum_{j=i}^{s}\left[\frac{\partial}{\partial q_j}({}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1})\right]\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t}=\\
&({}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1})\times\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right),
\end{aligned}
\tag{23}
$$

式(21)的时间导数为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial(K_s)_{\mathrm{rot}}}{\partial\dot{q}_i}\right]=&\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_i{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_s\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right)+\\
&(\xi_i{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_s\left(\sum_{j=1}^{s}\ddot{q}_j\xi_j{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right)+\\
&(\xi_i{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_s\left[\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\right]=\\
&\left(\xi_i{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1}\times\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_s\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right)+\\
&(\xi_i{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_s\left(\sum_{j=1}^{s}\ddot{q}_j\xi_j{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right)+\\
&(\xi_i{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_s\left[\sum_{j=1}^{s}\left(\dot{q}_j\xi_j{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\times\sum_{k=j+1}^{s}\dot{q}_k\xi_k{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{k-1}\right)\right]\cdot
\end{aligned}
\tag{24}
$$

同样可求出$(K_s)_{\mathrm{rot}}$对广义坐标$q_i(s\geqslant i)$的偏导数, 即

$$
\frac{\partial(K_s)_{\mathrm{rot}}}{\partial q_i}=\left[\left(\sum_{j=1}^{i}\dot{q}_j\xi_j{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\times{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1}\xi_i\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_s\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\xi_j{}^s\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right)
\tag{25}
$$

由式(24)减去式(25), 对 i 到 n 的刚体求和, 求得由于各刚体的转动效应而产生的反作用力矩(或力)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial (K.E.)_{\mathrm{rot}}}{\partial \dot q_i}\right]-\frac{\partial (K.E.)_{\mathrm{rot}}}{\partial q_i}=\sum_{s=i}^{n}\left\{(\xi_i\,{}^{s}\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_s\left(\sum_{j=1}^{s}\ddot q_j\xi_j\,{}^{s}\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right)+\right.$$
$$(\xi_i\,{}^{s}\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_s\left[\sum_{j=1}^{s}\left(\dot q_j\xi_j\,{}^{s}\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\times\sum_{k=j+1}^{s}\dot q_k\xi_k\,{}^{s}\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{k-1}\right)\right]+$$
$$\left.\left(\xi_i\,{}^{s}\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{i-1}\times\sum_{j=i}^{s}\dot q_j\xi_j\,{}^{s}\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_s\left(\sum_{j=1}^{s}\dot q_j\xi_j\,{}^{s}\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{z}_{j-1}\right)\right\}. \tag{26}$$

3 刚体重力产生的影响

机器人的势能等于各刚体势能之和

$$P.E. = \sum_{s=1}^{n} P_s, \tag{27}$$

式中 P_s 是刚体 s 的势能

$$P_s = -\boldsymbol{g}\cdot m_s\boldsymbol{r}_s = -\boldsymbol{g}\cdot m_s\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{p}_{i-1}+[\boldsymbol{p}_i^{*}+(1-\xi_i)q_i\boldsymbol{z}_{i-1}]+\\ \cdots+[\boldsymbol{c}_s+(1-\xi_s)q_s\boldsymbol{z}_{s-1}]\end{array}\right\}, \tag{28}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial (P_s)}{\partial \dot q_i}\right]-\frac{\partial (P_s)}{\partial q_i}=-\frac{\partial (P_s)}{\partial q_i}=\boldsymbol{g}\cdot m_s\frac{\partial(\boldsymbol{r}_s-\boldsymbol{p}_{i-1})}{\partial q_i}$$
$$=\boldsymbol{g}\cdot m_s[\boldsymbol{z}_{i-1}\xi_i\times(\boldsymbol{r}_s-\boldsymbol{p}_{i-1})+(1-\xi_i)\boldsymbol{z}_{i-1}]. \tag{29}$$

对 i 到 n 的刚体求和, 可得由于各刚体重力效应而产生的反作用力矩(或力)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial (P.E.)}{\partial \dot q_i}\right]-\frac{\partial (P.E.)}{\partial q_i}=-\sum_{s=i}^{s}\frac{\partial (P_s)}{\partial q_i}=$$
$$\boldsymbol{g}\cdot m_s[\boldsymbol{z}_{i-1}\xi_i\times(\boldsymbol{r}_s-\boldsymbol{p}_{i-1})+(1-\xi_i)\boldsymbol{z}_{i-1}]. \tag{30}$$

最后, 应加在关节 i 上驱动刚件 i 的力矩(或力)为

$$\tau_i=\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial (K.E.)_{\mathrm{tran}}}{\partial \dot q_i}\right]-\frac{\partial (K.E.)_{\mathrm{tran}}}{\partial q_i}\right\}+$$
$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial (K.E.)_{\mathrm{rot}}}{\partial \dot q_i}\right]-\frac{\partial (K.E.)_{\mathrm{rot}}}{\partial q_i}\right\}+\frac{\partial (P.E.)}{\partial q_i}=$$
$$(14)+(26)-(30). \tag{31}$$

这就是所求的考虑移动关节时的G_D 法运动方程, 若令全部的 $\xi_i=1$, 即机器人各关节均为转动时, 则方程退化到文献[4] 中所给的结论.

2 G_D 法在树形结构机器人中的算法

考虑如图 2 所示的拓扑结构. 由于上述所给的结论, 是在单链情况下推导的, 不能直接运用于树形结构机器人. 根据文献[5] 的"分路"思想, 我们可以采用以链解树的方法进行. 具体做法是按路进行计算, 如图 2 结构可分为 4 路, 求解第一路 ①+ ②, 可以求出 $\tau_1^{(1)}$ 和 τ_2; 求解第二路 ①+ ③+ ⑤这时可以引进"虚体" 概念, 将刚体 ①的质量密度视为0, 可以求出 $\tau_1^{(2)}$, $\tau_3^{(2)}$, τ_5; 求解第三路 ①+ ③+ ④+ ⑦, 视 ①和 ③为"虚体" 得 $\tau_1^{(3)}$, $\tau_3^{(3)}$, τ_4, τ_7; 求解第四路 ①+ ③+ ⑥+ ⑧, 视 ①和 ③为"虚体" 得, $\tau_1^{(4)}$, $\tau_3^{(4)}$, τ_6, τ_8. 最后把所有的 τ 按各路和整体之间的关系相互组集, 求得各关节的 τ:

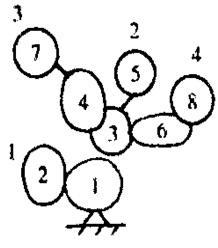

图 2 树形拓扑系统

$$\tau_1=\tau_1^{(1)}+\tau_1^{(2)}+\tau_1^{(3)}+\tau_1^{(4)};\quad \tau_3=\tau_3^{(2)}+\tau_3^{(3)}+\tau_3^{(4)}$$

$$\tau_i=\tau_i \qquad (i=2,4,5,6,7,8).$$

[参 考 文 献]

[1] Walker M W, Orin D E. Efficient dynamic computer simulation of robot mechanisms[J]. Trans ASME J Systems, Measurement and Control, 1982, **104**: 205~ 211.

[2] Lee C S G. Robot arm kinematics, dynamics, and control[J]. Computer, 1982, **15**(12): 62~ 80.

[3] Zhang Dingguo, Li Dechang, Xie Daxiong. Computer symbolic modelling of dynamic equations for tree structure robots[A]. In: Preceedings of the 2nd Asian Conference on Robotics and its Application [C]. Beijing: International Academic Publisher, 1994.

[4] Fu K S, Gonzalez R C, Lee C S G. Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence[M]. Compang: McGraw_Hill Book, 1987.

[5] 章定国. "分路" 方法在树系统动力学分析中的应用[J]. 力学学报, 1994, **21**(3): 341~ 347.

The Addendum for the Generalized d' Alembert Equations of Motion

Zhang Dingguo
(School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, P R China)

Abstract: In this paper the traditional generalized d' Alembert equations of motion (G_D) in the field of robot dynamics are extended to the circumstances as follows:

1. Condering the robots not only with rotary joints but also with translational joints.

2. Extending the application range of the G_D dynamic equations from the simple chained robots to the tree_structured robots.

Key words: robot; dynamics; generalized d' Alembert equations