应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 01_0073_07

Galerkin 方法的一种简单后处理过程

侯延仁, 李开泰

(西安交通大学, 西安 710049)

(张鸿庆推荐)

摘要: 基于近似惯性流形思想, 以流函数形式定常 Navier_Stokes 方程为例, 给出了一种简单的后处理 Galerkin 方法 其主要思想是利用近似惯性流形概念和对真解的一种新的分解, 构造高低频分量间的近似作用规律 文中证明了这种简单的后处理 Galerkin 方法可以较小的代价获得较经典 Galerkin 方法高得多的精度

关 键 词: Navier_Stokes 方程; 近似惯性流形; 非奇异解
中图分类号: O241 82 文献标识码: A

引 言

耗散型偏微分发展方程惯性流形(IM)[1]、近似惯性流形(AIM)[2]理论自 1988 年提出以来, 吸引了众多数学和流体力学工作者们的注意 这些新的理论认为解的高低频分量间存在某种相互作用规律或至少存在一些近似相互作用规律, 也就是说, 我们可以利用 Sobolev 空间中的有限维的低频分量来计算或近似计算高频分量 基于这种认识, 产生了一种新的被称作非线性 Galerkin 方法的耗散系统的长时间数值方法, 并得到了进一步的发展和研究(参见[3], [4], [5] 和[6] 等), 它的主要优点之一是可以获得精度优于经典 Galerkin 方法的逼近解 本文将基于 AIM 的思想, 针对流函数形式的定常 Navier_Stokes 方程, 给出经典 Galerkin 方法的一种简单后处理, 使得可以较小的代价获得高精度的逼近解 我们的主要思想是按照经典 Galerkin 逼近解将真解分解为高低频两部分 若记 为真解, $_m$ 为其经典 Galerkin 逼近, 我们可将真解分解为

$$ = \hat{} + {}_m$$

我们的主要任务就是要获得 $\hat{}$ 的一个合理的近似, 记作 , 使得可以用 $+ {}_m$ 来更好地逼近

事实上, 若经典 Galerkin 逼近解 $_m$ 有下列收敛率

$$ - {}_m \quad 1 \quad 1, \qquad - {}_m \quad 2 \quad 2,$$

则我们将要给出的后处理逼近解 $+ {}_m$ 将有如下收敛精度

$$ + {}_m - \quad 2 \quad c \ {}_1^{1-} \ {}_2^{1+} \qquad (\quad > 0)$$

本文将仅对非奇异解的后处理情形展开讨论, 至于奇异解的后处理, 我们将在以后讨论

收稿日期: 1998_05_25; 修订日期: 1999_10_28
基金项目: 国家自然科学基金资助(10671067)和攀登项目资助
作者简介: 侯延仁(1970~) 男, 讲师.

1 预备知识

我们考虑限制在区域 $= [-a, a] \quad [-b, b]$ 上, 具有周期边界条件的二维定常 Navier_Stokes 方程

$$\left.\begin{aligned} & - \quad u + (u \quad) u + \quad p = f \quad (\text{在} \quad \text{内}), \\ & \mathrm{div}\, u = 0 (\text{在} \quad \text{内}), \\ & \text{周期边界条件}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

此处 $u: \quad R^2$ 是速度场, $p: \quad R$ 是压力, f 代表驱动流体运动的外力, > 0 是动力粘性系数, 和 分别表示二维 Laplace 算子和梯度算子

为了研究方便, 我们引入下面流函数和量纲为一的流函数方程 首先定义流函数 为

$$u_1 = \quad {}_y, \ u_2 = - \quad {}_x,$$

这里 u_1 和 u_2 分别代表 u 的 x 分量和 y 分量 于是, 具有上面流函数形式的 Navier_Stokes 方程可表述为

$$^2 + J(\quad , \quad) = - \mathrm{rot} f,$$

这里 J 是如下定义的双线性形式

$$J(g, h) = \frac{g}{x}\frac{h}{y} - \frac{g}{y}\frac{h}{x}$$

显然

$$J(g, h) = - J(h, g)$$

现在我们给出下面量纲为一的变换:

$$(x, y) \mid \quad \frac{b}{}(x \ , y \ ), \quad \mid \quad \frac{b^4}{4} \quad ,$$

此处 $= \frac{}{b} \mid \quad f \mid_{-1}$ 代表驱动流体运动的外力强度 经整理可得

$$Gr^{-1} \ {}^2 + J(\quad , \quad) = Gr^{-1} F, \tag{2}$$

其中 Gr 是 Grashoff 数, 定义为

$$Gr = \frac{b^4}{2 \ 4},$$

且 $F = - \mathrm{rot} f \mid \quad f \mid_{-1}$

经变换后, 方程(2) 就被变换到如下矩形域上

$$= \left[- \frac{}{}, \frac{}{}\right] \quad [- \quad , \quad], \quad = \frac{b}{a}$$

当然, 量纲为一的变换的方式很多, 我们这里的目的是使外力强度的阶为 $O(G^{-1})$

若我们以 V_2 表示下面具有周期边界的函数空间

$$V_2 = \left\{ \quad = \sum_{k \quad Z^2, k \quad 0} c_k e^{i(k_1 \ x + k_2 y)}, \ c_k = \overline{c_{-k}}, \sum_{k \quad Z^2, k \quad 0} \mid c_k \mid^2 (k_1^4 \ {}^4 + k_2^4) < + \quad \right\},$$

并以(,) 表示其 L^2 内积, , 表示 L^2 上的对偶对, ${}_l$ 表示 l 阶 Sobolev 空间范数, 特别地, 以 表示 L^2 范数, 则我们可得(2) 的弱形式为

$$\left.\begin{aligned} & \text{求} \quad V_2, \text{使得} \\ & a(\ , v) + j(\ , \quad , v) = Gr^{-1} \ F, v \quad (\quad v \quad V_2), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

这里

$$a(\ , v) = Gr^{-1}(\quad , \quad v),$$

$$j(\ ,\ \ ,v) = (J(v,\ \ ),\ \ ) = (\ {}_y v_x,\ \ ) - (\ {}_x v_y,\ \ )$$

由三线性形式 j 的定义, 我们容易得到其如下性质

$$\left.\begin{aligned} & j(\ ,\ \ ,v) = -j(v,\ \ ,\ ), \quad \text{特有}\ j(v,\ \ ,v) = 0, \\ & j(\ ,\ \ ,v) = -j(\ ,v,\ \ ), \quad \text{特有}\ j(\ ,\ v,\ \ v) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

及估计(估计方法参见[7])

$$j(u,\ u,w)\quad c_1\quad u\quad {}_{s_1+1}\quad v\quad {}_{s_2+2}\quad w\quad {}_{s_3+1}, \tag{5}$$

其中 $s_1 + s_2 + s_3\ \ 1$, $(s_1, s_2, s_3)\ \ (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$, $c_1 > 0$ 是一个依赖于 的常数

若我们以 P_m 表示 V_2 上的 L^2 正交投影算子, 并以 $V_{2,m}$ 记 V_2 在 P_m 下的投影, 也即

$$V_{2,m} = \left\{\ = \sum_{|k| < m, k\ \ 0} c_k e^{i(k_1 x + k_2 y)},\ c_k = \overline{c_{-k}}\right\}$$

于是(3) 的 Galerkin 逼近为

$$\left.\begin{aligned} & \text{求}\ {}_m\quad V_{2,m}\ \text{使得} \\ & a(\ {}_m, v) + j(\ {}_m,\ \ {}_m, v) = Gr^{-1}\ F, v\quad (\ v\quad V_{2,m}) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

我们进一步假定 ${}_m$ 和 间的误差满足

$$\ {}_1\quad {}_1(Gr, m),\quad\ {}_2\quad {}_2(Gr, m),\ \text{其中}\ = \ - \ {}_m \tag{7}$$

2 真解的分解

从 L^2_正交投影的角度来看, (7) 所给出的是一个最优误差估计 由于受到逼近论精度的限制, 我们不可能得到 $\ - \ {}_m\ {}_l$, $l = 1, 2$ 的更高阶的估计, 事实上, 它们具有与截断误差 $(I - P_m)\ \ {}_l$, $l = 1, 2$ 同样的阶数 当然, 为了提高(7) 所给出的逼近解的误差, 人们很容易想到利用某种后处理技巧来得到$(I - P_m)$ 的一个近似, 但这时候, P_m 与 ${}_m$ 间的距离就变成了决定整体误差的主要因素 如果我们从其它投影的角度来考虑这个问题, 情况就有可能与 L^2_投影的情形大不相同 最直观地, 我们将(3) 的解作如下分解

$$= \hat{\ } + \ {}_m, \tag{8}$$

其中 ${}_m$ 是 的经典 Galerkin 逼近 在这里, 我们认为 ${}_m$ 是 的低频分量, $\hat{\ }$ 是其高频分量 当然, 按照 L^2_投影, $\hat{\ }$ 既含有高频分量, 同时又含有低频分量 为了进一步阐明这一分解的意义, 我们利用下面的形式上的 正交投影 : Q_m: $V_2\quad V_{2,m}$

$$\left.\begin{aligned} & \quad V_2,\ \text{求}\ Q_m\quad V_{2,m}\ \text{使得} \\ & a(\ - Q_m\ , v) + j(\ - Q_m\ ,\ \ {}_m, v) + j(\ {}_m,\ (\ - Q_m\ ), v) \\ & \quad + j(\ - Q_m\ ,\ (\ - Q_m\ ), v) = 0\quad (\ v\quad V_{2,m}) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

在这个意义上看, 若取 $=$, 则

$${}_m - Q_m\ = 0,\ \hat{\ } = (I - Q_m)$$

显然, 经典 Galerkin 逼近解与真解之间的误差完全来自于 截断误差 $\hat{\ }$, 并且其与 $V_{2,m}$ 在上述意义下是 正交 的, 即

$$a(\hat{\ }, v) + j(\hat{\ },\ \ {}_m, v) + j(\ {}_m,\ \hat{\ }, v) + j(\hat{\ },\ \hat{\ }, v) = 0, (\ v\quad V_{2,m}), \tag{10}$$

至于(9) 是否真的定义一个从 V_2 到 $V_{2,m}$ 的投影算子 Q_m, 我们并不关心, 而唯一有用的结果是(10)

现在我们可以按照(8) 将(3) 改写为

$$a(\hat{\ }, v) + j(\hat{\ },\ \ _m, v) + j(\ _m,\ \hat{\ }, v) + j(\hat{\ },\ \hat{\ }, v) +$$
$$a(\ _m, v) + j(\ _m,\ \ _m, v) = Gr^{-1}\ F, v \quad (\ v\ \ V_2) \tag{11}$$

3 后处理过程

众所周知(参见[1],[2]),近似惯性流形(AIM)理论断言了在解的高低频分量间至少存在某种近似作用规律,并且这种规律可以用来确定近似惯性流形,使得系统的所有轨道均被吸引进入该流形的一处薄邻域当中 在我们这里,系统的平衡点,即(3)的解将落在此薄邻域当中,换句话说,解的高频分量可由其低频分量近似表示出来

为了构造这种作用规律,我们必须构造一个从低频分量空间 $V_{2,m}$ 到高频分量空间 V_2 的映射 为此,回忆方程(3),它定义了一个从 V_2 到 V_2^* 的映射 $\mathscr{F}$

$$\left.\begin{aligned} &V_2, 求\ \mathscr{F}(\ )\ \ V_2^*\ 使得 \\ &\mathscr{F}(\ ), v = a(\ , v) + j(\ ,\ \ , v) - Gr^{-1}\ F, v \quad (\ v\ \ V_2), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

于是(3)等价于

$$\mathscr{F}(\ ) = 0 \tag{13}$$

类似地,Galerkin 方程(6)可以象(12)一样定义一个从 $V_{2,m}$ 到 $V_{2,m}^*$ 的映射 $\mathscr{F}_m$,从而(6)可等价地写为

$$\mathscr{F}_m(\ _m) = 0 \tag{14}$$

我们用 $D\mathscr{F}(\ )$ 和 $D\mathscr{F}_m(\ _m)$ 分别表示 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}_m$ 在 和 $_m$ 的 Frechet 导数,它们分别是从 V_2 到 V_2^*,$V_{2,m}$ 到 $V_{2,m}^*$ 的映射

$$\left.\begin{aligned} &D\mathscr{F}(\ )w, v = a(w, v) + j(\ ,\ w, v) + j(w,\ \ , v), (\ w, v\ \ V_2), \\ &D\mathscr{F}_m(\ _m)w, v) = a(w, v) + j(\ _m,\ w, v) + j(w,\ \ _m, v) \quad (\ w, v\ \ V_{2,m}), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

若我们令

$$\mathscr{L}(w, v) = D\mathscr{F}(\ )w, v\ ,\ \mathscr{L}_m(w, v) = D\mathscr{F}_m(\ _m)w, v\ ,$$

则

$$\mathscr{L}_m(w, v) = \mathscr{L}(w, v) - j(\hat{\ },\ w, v) - j(w,\ \hat{\ }, v) \tag{16}$$

如果 是方程(13)的非奇异解,那么 $D\mathscr{F}(\ )$ 将是一个从 V_2 到 V_2^* 的同构,从而存在常数 $_0>0$ 使得

$$\left.\begin{aligned} &\inf_{w\ V_2}\sup_{v\ V_2}\frac{\mathscr{L}(w, v)}{w\ _2\ v\ _2}\ \ _0, \\ &\inf_{v\ V_2}\sup_{w\ V_2}\frac{\mathscr{L}(w, v)}{w\ _2\ v\ _2}\ \ _0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

下面的引理将给出保证靠近非奇异点 的函数 亦为非奇异点的条件,关于它的证明,读者可参看[8]#

引理311 假定 V_2 是 V_2 的有限维子空间,且 $\mathscr{L}$ 是从 V_2 到 V_2^* 内的映射# 令 < 是映射 $\mathscr{F}(<)$ 的非奇异点,并记

$$R(<) = +D\mathscr{F}(<)^{-1}+_{\mathscr{L}(V_2^*, V_2)},$$
$$L(<) = +D\mathscr{F}(<) - D\mathscr{F}(<) +_{\mathscr{L}(V_2, V_2^*)}$$

若 < 非常靠近 <,使得

$$(<) L(<) < 1, \qquad (18)$$

则 $D.\mathscr{A}(<)$ 就是一个从 V_2 到 V_2^* 的同构# 当然 < 是 $\mathscr{F}$ 的一个非奇异点#

由上面引理, 我们很容易得到如下推论#

推论 311 假定 W 是方程(3) 的非奇异解, 如果取 m 充分大, 使得

$$B_2(Gr, m) < \frac{A_0}{2c_1}, \qquad (19)$$

则经典 Galerkin 逼近解 W_m 是 Galerkin 方程(6) 的非奇异解, 即 W_m 是映射 $\mathscr{F}_m$ 的非奇异点#

证明 (17) 表明

$$R(W) = + D\mathscr{F}^{-1}(W) + _{\mathscr{A}(V_2^*, V_2)} [A_0^{-1}\# \qquad (20)$$

另一方面, 若我们以 $\mathscr{F}_m$ 和 W_m 替换引理 311 中的 $\mathscr{F}$ 和 <, 并以 $V_{2,m}$ 替换 V_2, 同时注意(16) 和(5), 我们有

$$L(W_m) = + D\mathscr{A}(W) - D\mathscr{F}_m(W_m) + _{\mathscr{A}(V_2, V_2^*)} =$$

$$\sup_{w, v I V_2} \frac{3 D\mathscr{A}(W) - D\mathscr{F}_m(W_m)) w, v4}{+ w +_2 + v +_2} =$$

$$\sup_{w, v I V_2} \frac{j(W, \$w, v) + j(w, \$ W, v)}{+ w +_2 + v +_2} [$$

$$2c_1 + W+_2 [2c_1 B_2(Gr, m)\#$$

于是我们可由(18) 得到推论结果# 证毕

根据(16) , 我们知道

$$\mathscr{L}_m(w, v) \setminus \mathscr{A}(w, v) - | j(W, \$w, v) | - | j(w, \$ W, v) | \setminus$$

$$\mathscr{A}(w, v) - 2c_1 B_2(Gr, m) + w +_2 + v +_2\#$$

假定 m 取的充分大, 使得条件(19) 成立, 那么我们很容易得到

$$\left.\begin{aligned} &\inf_{w I V_2} \sup_{v I V_2} \frac{\mathscr{L}_m(w, v)}{+ w +_2 + v +_2} \setminus \frac{A_0}{2}, \\ &\inf_{v I V_2} \sup_{w I V_2} \frac{\mathscr{L}_m(w, v)}{+ w +_2 + v +_2} \setminus \frac{A_0}{2}\# \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

现在, 我们可以定义下面由 $V_{2,m}$ 到 V_2 的映射

$$\left.\begin{aligned} &P\, w\ I\ V_{2,m}, \text{求}\ 5(w)\ I\ V_2\ \text{使得} \\ &\mathscr{L}_m(5(w), v) + 3\mathscr{A}(w), v4 = 0 \qquad (P\, v\ I\ V_2)\# \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

显然, 在(11) 中将 W_m 替换为 w 并略去高阶项 $j(W, \$ W, v)$, 我们就可以直接得到(22) , 即(22) 是 (11) 的线性部分# 上面的(22) 式提供给我们一种利用经典 Galerkin 逼近解 W_m 对经典 Galerkin 方法进行修正的方案#

在余下的部分, 我们将说明基于近似作用规律(22) 的一种 W_m 的简单后处理过程可以大大提高经典 Galerkin 逼近的收敛阶# 从分解(8) 的角度来看, 经典 Galerkin 逼近解 W_m 精确地等于真解 W 的低频分量, 而 W 与 W_m 之间的误差仅由/ 截断0 误差 W 引起# 如果我们从 W_m 可以得到/ 截断0 部分 W 的一个合理的近似, 记为 <, 则我们设想 <+ W_m 可以会是真解 W 的一个逼近程度优于 W_m 的近似# 这就是我们所讨论的后处理过程的基础#

注意(22) , 对任意的 $w\ I\ V_{2,m}$, 可以得到 $5(w)\ I\ V_2$# 我们将利用 $< = 5(W_m)$ 来完成对经典 Galerkin 逼近解的修正# 现在我们给出如下后处理方案

$$\left.\begin{aligned}&\text{求 } W_m\ I\ \ V_{2,m},<I\ \ V_2\text{ 使得}\\&a(W_m,v)+j(W_m,\$W_m,v)=Gr^{-1}{}_3F,v4\qquad(Pv\ I\ \ V_{2,m}),\\&<=5(W_m),\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

由于(22)是关于 5 的线性系统,所以我们只须在算法(23)中解一个有限维的非线性方程# 下面定理将说明 $<+\ W_m$ 会提供我们一个比 W_m 逼近 W 程度更高的逼近解#

定理311 设 W 和 W_m 分别是(3)和(6)的解,进一步,我们假定 W 是(3)的非奇异解# 若选取 m 足够大使得(19)成立,则我们有

$$+<+\ W_m-W+_2\ [\ \frac{2c_1k(8)}{A_0}B_1^{1-E}(Gr,m)B_2^{1+E}(Gr,m)\qquad(PE>0),\tag{24}$$

此处 $k(8)>0$ 是一个依赖于 8 的常数#

证明 在(22)中取 $w=W_m$,并从(11)中减去(22),有

$$\mathscr{L}_m(W-5(W_m),v)+j(W,\$W,v)=0\qquad(Pv\ I\ \ V_2)\#$$

利用(21)并在(5)中取 $(s_1,s_2,s_3)=(E,0,1)$,其中 $E\ I\left(0,\frac{1}{2}\right)$,则

$$\frac{A_0}{2}+W-5(W_m)+_2\ [\ \sup_{vI\,V_2}\frac{\mathscr{L}_m(W-5(W_m),v)}{+v+_2}=$$

$$\sup_{vI\,V_2}\frac{-j(W,\$W,v)}{+v+_2}\ [\ c_1+\ W+_{1+E}B_2(Gr,m)\#$$

注意 Sobolev 空间中的如下插值不等式[9]:

$$+w+_E[\ k(8)+w+_1^E+\ w+^{1-E}\qquad\left(P\ E\ I\left(0,\frac{1}{2}\right),w\ I\ H^1(8)\right),$$

这里 $k(8)>0$ 是一个仅依赖于 8 的常数# 于是

$$+W+_{1+E}\ [\ k(8)+W+_1^{1-E}+\ W+_{2\#}^E\tag{25}$$

从而我们可以由(25)得到定理结论# 证毕#

[参 考 文 献]

[1] Foias C, Sell G R, Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations[J]. J Diff Eqs, 1988, 73: 309~ 353.

[2] Foias C, Manley O, Temam R. On the interaction of small eddies in two_dimensional turbulence flows[J]. Math Modeling and Numerical Analysis, 1988, 22: 93~ 114.

[3] Marion M, Temam R. Nonlinear galerkin methods[J]. SIAM J Numer Anal, 1989, 26: 1139~ 1157.

[4] Marion M, Temam R. Nonlinear galerkin methods: the finite element casc[J]. Numer Math, 1990, 57: 205~ 226, Numer Anal, 1989, 26: 1139~ 1157.

[5] Marion M, Xu J. Error estimates on a new nonlinear galerkin method based on two_grid finite elements[J]. SIAM J Numer Anal, 1995, 32: 1170~ 1184.

[6] 侯延仁. Fourier 非线性 Galerkin 方法[J]. 应用数学和力学, 1996, 17(9): 829~ 836.

[7] Temam R. Navier_Stokes Equations [M]. 3rd Revised Edition. North_Holland Publishing Company, 1984.

[8] Girault V, Raviart P A. Finite Element Methods for the Navier_Stokes Equations: Theory and Algorithms[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1986.

[9] 李开泰, 马逸尘. 数理方程 Hilbert空间方法(上)[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991.

(Xi. an Jiaotong University , Xi. an 710049)

Abstract: A kind simple postprocess procedure for classical Galerkin method for steady Navier_Stokes equations with stream function form was presented in this paper. The main ideal was to construct an approximate interactive rule between lower frequency components and higher frequency components by using the conception of Approximate Inertial Manifold(AIM) and a kind of new decom_position of the true solution. It is demonstrated in this paper that this kind of postprocess Galerkin method could derive a higher accuracy solution with lower computing efforts.

Key words: navier_stokes equations; approximate inertial menifold; non_singular solution