

文章编号: 1000\_0887(2000) 01\_0099\_07

# 用旋量方法规划机器人运动轨迹

林瑞麟

(华侨大学 机电工程系, 福建 泉州 362011)

(汤任基推荐)

**摘要:** 以姿态旋量描述机器人的位置姿态, 在对偶空间中通过姿态旋量映射的点规划机器人的终端轨迹, 具有直观、简便的独特优点。规划中直接根据跟踪误差进行收敛, 提高了轨迹运行的动态精度, 并适合于冗余自由度操作器。

**关键词:** 旋量方法; 机器人; 规划; 运动轨迹

**中图分类号:** O221.1; O183.1; TH112 **文献标识码:** A

## 引言

轨迹规划是机器人控制问题的重要方面, 根据作业要求通地轨迹序列控制点控制机器人位姿轨迹。Paul<sup>[1]</sup>首先利用齐次变换矩阵将手部在直角坐标下的位置、速度和加速度变换成各关节的位移、速度和加速度, 然后规划成二次平滑函数。Paul方法的计算量非常大, Taylor<sup>[2]</sup>采用四元数表示法改进了Paul方法。后来Lin和Luh<sup>[3,4]</sup>提出规划轨迹的3次样条函数方法, 可得到优化的关节运动规律, 但当轨迹中间路径点个数 $n$ 较多时, 此法所需计算量也较大, 而且缺乏时姿态插补的考虑。在许多高精度应用场合, 如切割、弧焊等不仅要求机器人位置精确, 还需要在该位置具有任意确定的姿态, 对外部品质的要求是很高的。因此, 必须解决机器人姿态在插补结点处相应的空间坐标, 以寻求更具一般意义的位姿轨迹生成的通用算法。

本文运用旋量法来描述机器人末端夹持器在直角坐标空间中的位置和姿态对时间函数所显示的运动轨迹, 由于姿态旋量的直观和简便对描述瞬时姿态有独特的优点, 且计算量也小。文中还利用速度矢量是雅可比矩阵列向量的线性组合关系, 对广义坐标的速度量进行线性规划, 免去了求解运动学方程, 并适合于具有冗余自由度的操作器。

## 1 机器人位姿轨迹

### 1.1 姿态旋量

机器人的位姿就是终端夹持器的位置和姿态。我们可以用角位移矢量来描述机器人的姿态, 设 $\theta$ 为基坐标系中绕瞬时轴加转的等效旋转角,  $\mathbf{K}$ 表示基系中瞬时转轴的单位向量, 则角位移矢量:

$$\theta = \mathbf{K}$$

收稿日期: 1998\_02\_05; 修订日期: 1999\_10\_30

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目

根据旋量定义, 可以证明等效角位移矢量的姿态矢量是旋量, 表示为

$$\hat{\Omega} = \Omega + OP = \Omega + OD,$$

式中,  $OP$  为用位移矢量上给定的初始点位置, 基系原点  $O$  为旋量参考点

由对偶数理论可知: 三维欧氏空间中直线与三维对偶空间中的点是一一对应, 于此可将直角坐标空间中的姿态旋量  $\hat{\Omega}$  映射到对偶空间, 得到对应点  $b_i$ , 位姿轨迹的规划问题便转化为对偶空间中由姿态旋量所映射的点  $b_i$  运动轨迹的选择问题

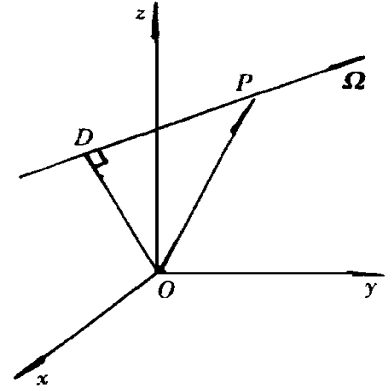


图 1 姿态旋量

## 1.2 位姿轨迹

设  $T$  为机器人由起始点到结束点完成运动所需的总时间,  $t$  为分段轨迹算起的时间, 令

$$\tau = \frac{t}{T} \quad (\tau \in [0, 1])$$

若在时间间隔  $[0, t]$  内, 机器人完成一个给定的工作, 整个工作轨迹上需计算的采样点数:

$$N_0 = \text{Int}(t/T)$$

姿态旋量  $\hat{\Omega}_i$  时应的对偶空间中的点  $\hat{a}_i$ , 假设沿着一连续轨迹运动

$$\hat{\Omega}_i = f(\hat{q}) = \Omega_i + S_i^0; \hat{q} = \hat{q}(\tau)$$

$\hat{q}$  是  $(\tau)$  的对偶函数, 写成对偶坐标形式

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_i &= f_1(\hat{q}) = x_i + S_{x_i}^0 \\ \hat{y}_i &= f_2(\hat{q}) = y_i + S_{y_i}^0 \\ \hat{z}_i &= f_3(\hat{q}) = z_i + S_{z_i}^0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $x_i, y_i, z_i$  为姿态坐标分量,  $\hat{a}_i$  的 Plücker 坐标  $(\Omega_i, S_i^0)$  用坐标分量的纯量形式表示为  $(x_i, y_i, z_i, S_{x_i}^0, S_{y_i}^0, S_{z_i}^0)$

姿态矢量  $\Omega_i$  为瞬时转动轴上的自由矢量, 只有当  $P_i$  点位置确定后, 它才在轴线上唯一确定,  $\Omega_i$  在空间的定位可通过瞬时转动轴线上  $P_i$  的位置矢量  $r_{p_i}$  给定, 于此  $S_i^0 = r_{p_i} \wedge \Omega_i$ , 将式(1)改写成行列式形式的参数方程为

$$\hat{a}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{p_i} & y_{p_i} & z_{p_i} \\ x_i & y_i & z_i \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中,  $x_{p_i}, y_{p_i}, z_{p_i}$  为夹持器姿态矢量  $\Omega_i$  在轴线上  $P_i$  点相对于基系的坐标, 式(2) 就是机器人位姿的姿态旋量表示, 由  $x_i, y_i, z_i$  确定机器人夹持器的姿态轨迹, 由  $x_{p_i}, y_{p_i}, z_{p_i}$  导出其位置轨迹, 设定理想位置及姿态轨迹为

$$\left. \begin{aligned} x_{p_i} &= f_1[\tau], \\ y_{p_i} &= f_2[\tau], \\ z_{p_i} &= f_3[\tau], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} x_i &= 1[ (t)], \\ y_i &= 2[ (t)], \\ z_i &= 3[ (t)] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

代入式(2)便可确定机器人在对偶空间的姿态旋量。机器人在进行焊接或切割工作, 圆弧曲线轨迹运动中姿态的变化, 需要按式(2)求出每一采样时刻的姿态角

## 2 机器人运动螺旋方程

设  $\hat{\mathbf{v}}_i$  为终端速度旋量,  $\dot{\theta}_i$  为姿态角速度向量,  $\mathbf{v}_{p_i}$  为终端位置速度,  $\hat{\mathbf{e}}$  基旋量,  $\hat{\mathbf{v}}_i = \hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{v}}_i$

$$\mathbf{v}_{p_i} = x_{p_i} \mathbf{i} + y_{p_i} \mathbf{j} + z_{p_i} \mathbf{k}, \quad (5)$$

$$\dot{\theta}_i = \dot{\theta}_{ix} \mathbf{i} + \dot{\theta}_{iy} \mathbf{j} + \dot{\theta}_{iz} \mathbf{k}, \quad (6)$$

于端夹持器的瞬时运动螺旋方程为

$$\hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{v}}_i = \dot{\theta}_i + \mathbf{v}_{p_i} \quad (7)$$

螺旋轴线 Plücker 坐标为  $(\dot{\theta}_i; \mathbf{v}_{p_i})$

## 3 关节运动速度

设固联于机器人各可动件上的附件参考系原点  $O_i$  放在运动副关节处, 相邻运动副轴线之间的合法线长度为  $a_{12}, a_{23}, \dots$ ; 相邻两杆之间的偏距分别为  $d_1, d_2, \dots$ ; 相邻轴线之间的扭角为  $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots$ ; 运动副相对回转角为  $\theta_1, \theta_2, \dots$

定义函数

$$i = \begin{cases} 1 & (\text{当第 } i \text{ 个关节是转动关节时}), \\ 0 & (\text{当第 } i \text{ 个关节是移动关节时}) \end{cases}$$

令  $\hat{\mathbf{v}}_i = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_i \ 0 \ 0 \ (1-i)]^T$

取第  $i$  关节的转角  $\theta_i$  或滑移距离  $z_i$  作为广义坐标,  $q_i = (1-i)z_i + \theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

将螺旋运动旋量方程(7)作转换后可得

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{J} \mathbf{q} \quad (8)$$

或表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_6 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3$  是雅可比矩阵  $\mathbf{J}$  的三个  $3 \times 3$  子阵, 这里注意到六关节机器人决定姿态的关节 4、5、6 的变量没有影响  $v_x, v_y, v_z$  的移动, 可将式(9) 分解写成

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_2 \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \mathbf{J}_3 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

由上式可知终端执行器移动线速度和转动角速度与各关节角速度的关系由雅可比矩阵联系,它由机器人各杆件的位姿矩阵和旋转矩阵组合给出

根据工作过程的需要,规划终端执行器的位姿轨迹及速度必需与末端的实际测定的数值一致 然而,机器人各杆件的弹性变动,关节间隙,重力负载及杆件离心效应等因素的影响致使机器人位姿动态精度形成误差 设  $\hat{\mathbf{v}}$  为期望轨迹上的速度旋量,  $\hat{\mathbf{v}}^*$  为机器人末端测定的实际速度旋量,由传感器可获得实际位姿轨迹与期望作业偏差为

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{v}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{r} & \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{r} &= \begin{bmatrix} x, & y, & z \end{bmatrix}^T, \\ &= \begin{bmatrix} x, & y, & z \end{bmatrix} J^T, \\ r &= \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2} R, \\ &= \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2} G \end{aligned}$$

机器人的位置和姿态误差分别小于给定误差  $R$  及  $G$  的概率<sup>[6]</sup> 为使误差收敛反回轨迹,以消除误差的累积效果,需使位置及姿态误差得到校正补偿,式(10),(11) 改写为

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_3^{-1} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_2^{-1} \left( \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \mathbf{J}_1 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (13)$$

式(12)、(13) 适用于  $\mathbf{J}$  满秩的情况,当机器人具有冗余自由度时,对应的  $\mathbf{q}$  有无穷多解,对此可取能量损失为最小,选取最优解

$$N(\mathbf{q}) = \min \left[ \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{W} \mathbf{q} \right], \quad (14)$$

为寻求  $\mathbf{q}$  满足式(14) 使损失函数  $N(\mathbf{q})$ , 为最小,应用拉格朗日算子解

$$N(\mathbf{q}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{W} \mathbf{q} - \lambda^T (\mathbf{J} \mathbf{q} - \hat{\mathbf{v}}), \quad (15)$$

$\mathbf{W}$  为  $n \times n$  对称正定矩阵,  $\lambda$  为 Lagrange 乘子,满足最优解的必要条件是

$$\frac{dN}{d\mathbf{q}} = 0,$$

即

$$\begin{aligned} \mathbf{W} \mathbf{q} - \mathbf{J}^T \lambda &= 0, \\ \mathbf{q} &= \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T \lambda, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{即} \quad \mathbf{J} \mathbf{q} - \hat{\mathbf{v}} = 0,$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{J} \mathbf{q} = \mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T \lambda \quad (17)$$

在式(16),(17) 中消去  $\lambda$ , 得最优解

$$\mathbf{q} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \hat{\mathbf{v}} \quad (18)$$

考虑到使误差得到收敛,式(18) 改写成

$$\mathbf{q} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} (\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{k} \mathbf{S}) \quad (19)$$

其中  $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix}^T$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{W}$  均为正定阵 式(19) 适用于有冗余自由度时的规划 要求关节运

动速度不应达到边界位置极限速度, 设  $q_M$  为允许的最大速度, 必需使  $q < q_M$ , 以适应电机最大转速的要求

## 4 算 例

设斯坦福机械手在拟定轨迹中通过空间 3 个已知点  $P_1(50, 0, 118)$ ,  $P_2(110.5, 50, 84)$ ,  $P_3(50.2, 100, 50)$ , 并在三点保持姿态为  ${}_1(0, 0, 1.57)^T$ ,  ${}_2(0, -0.045, 0)^T$ ,  ${}_3(0, 0, 1.57)^T$   $P_1$ ,  ${}_1$  状态相对应的关节坐标及其相应的正弦和余弦值如表 1, 试规划其运动和位姿轨迹

表 1 关节坐标

坐 标	数 值	正 弦	余 弦
1	0	0	1
2	90	1	0
3		/	/
4	0	0	1
5	90	1	0
6	90	1	0

**解** 设机械手终端以圆弧轨迹规划, 其位置坐标函数及姿态坐标函数为

$$x_p = f_1[t] = 60.5 \sin(2.9966t) + 50,$$

$$y_p = f_2[t] = -50.03 \cos(2.9966t) + 50,$$

$$z_p = f_3[t] = 34 \cos(2.9966t) + 84,$$

$$x = {}_1[t] = -0.05 \cos^2(2.9966t) + 0.05 \sin(2.9966t) + 0.05,$$

$$y = {}_2[t] = -0.065 \sin(2.9966t) + 0.02 \cos^2(2.9966t) + 0.02,$$

$$z = {}_3[t] = 0.0012 \cos^2(2.9966t) - 1.57 \sin(2.9966t) + 1.569$$

设运动总时间为  $T = 60s$ , 据式(2) 当  $t = 40s$  时终端夹持器的位置, 姿态为

$${}^{40} \hat{0}_s = \begin{bmatrix} -0.0058 \\ -0.0413 \\ 0.208 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ 102.5 & 25.09 & 67.07 \\ -0.0058 & -0.0413 & 0.208 \end{bmatrix}$$

据式(5)、(6) 可求得  $t = 40s$  终端的位姿速度值,  $x_p = -1.5756$ ,  $y_p = 2.2691$ ,  $z_p = -1.778$

$$2, \quad x = 0.0097, \quad y = 0.00148, \quad z = 0.0180$$

斯坦福机械手雅可比矩阵的三个子阵为

$$J_1 = \begin{bmatrix} -S_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - C_2S_4S_6 & S_4C_5C_6 + C_4S_6 & 0 \\ S_2(C_4C_5C_6 + S_4C_6) + C_2S_5S_6 & -S_4C_5S_6 + C_4C_6 & 0 \\ 4S_5 + C_2C_5 & S_4C_5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -S_5C_6 & S_6 & 0 \\ S_5S_6 & C_6 & 0 \\ C_5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix},$$

其中,

$$\begin{aligned}
J_{11} &= -d_2[C_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_2S_5C_6] + S_2d_3(S_4C_5C_6 + C_4S_6), \\
J_{21} &= -d_2[-C_2(C_4C_5C_6 + S_4S_6) + S_2S_5S_6] + S_2d_3(-S_4C_5S_6 + C_4C_6), \\
J_{31} &= -d_2(C_2C_4S_5 + S_2C_5) + S_2d_3(S_4S_5), \\
J_{12} &= d_3(C_4C_5C_6 - S_4S_6), J_{13} = -S_5C_6, \\
J_{22} &= -d_3(C_4C_5S_6 + S_4C_6), J_{23} = S_5S_6, \\
J_{32} &= d_3C_4S_5, J_{33} = C_5, \\
d_2 &= -t_{6041}S_1 + t_{6042}C_1, \\
d_3 &= S_2(t_{6041}C_1 + t_{6042}S_1) + t_{6043}C_2, \\
C_i &= \cos i, S_i = \sin i, (i = 1, 2, \dots, 6), \\
t_{6041} &= 102.5, t_{6042} = 25.09, t_{6043} = 67.07,
\end{aligned}$$

可得  $d_2 = 25.09, d_3 = 102.5$

据测定手部位姿误差统计值为  $x = 0.08465, y = 0.11269, z = 0.11050, U_x = 0.10022,$   
 $U_y = 0.10025, U_z = 0.10041$  取

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -0.15 & 0 \\ 0.15 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & -0.11 & 0 \\ 0.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.11 \\ 0 & 0.11 & 0 \end{bmatrix} \#$$

据式(12), (13)可得关节速度

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.10962 \\ -0.10672 \\ 21.4456 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10013 \\ 0.10227 \\ 0.10683 \end{bmatrix} \#$$

## 5 结 论

- 1) 本文用对偶映射原理来描述机器人的姿态旋量,用 Plücker 线坐标表达机器人位姿
- 2) 在机器人轨迹规划中,利用旋量方法时描述瞬时姿态具有直观、简便的独特优点,比较全面地表达了终端执行器的位置和姿态的轨迹生成,且计算量较少

3) 根据实际工作轨迹进行规划,提高了操作器运行精确性,并使非线性优化问题化为线性优化问题,利用速度矢量是雅可比矩阵列向量的线性组合关系,免去了求解逆运动学方程,并适合于具有冗余自由度的操作器

### [参 考 文 献]

- [1] Paul R P. Manipulator cartesian path control[J]. IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics, 1979, 9(11): 702~ 711.
- [2] Taylor R H. Planning and execution of straight line trajectories[J]. IBM Journal of Research and Development, 1979, 23: 424~ 436.
- [3] Lin C S, Chang P R, Luh J Y S. Formulation and optimization of cubic polynomial joint trajectories for industrial robots[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1983, 28(12): 1066~ 1073.
- [4] Luh J Y S, Lin C S. Approximate joint trajectories for control of industrial robots along cartesian paths [J]. IEEE Trans System, Man and Cybernetics, 1984, 14(3): 444~ 450.
- [5] 林瑞麟, 蒋少茵, 林碧. 旋量法在机器人动力学分析中的应用[J]. 应用数学和力学, 1996, 17(1): 75 ~ 80.

- 6] 徐卫良, 张启先. 机器人误差分析的蒙特卡洛方法[J]. 机器人, 1988, 2(4): 1~ 5.

P l a n n i n g M o t i o n T r a c e o f R o b o t b y S p i n o r M e t h o d

Lin Ruilin

( Department of Precise Mechanics Engineering, Huaqiao  
University, Quanzhou 362011, P R China )

Abstract: In this paper, the spinors applied to describe position and attitude of robot are studied. In dual spaces, the terminal trace of robot is planned through the mapping point, of attitude spinors. As a handy method directly perceived through the sense, the spinor method directly converges tracking error in the planning. It promotes the dynamic accuracy of traceoperation. It is also suitable to the exerciser with redundant freedom.

Key words: spinor method; robot; planning; motion trace