

文章编号: 1000_0887(1999) 12_1229_06

粘弹性板混沌振动的输出变量反馈 线性化控制

陈立群¹, 程昌钧^{1,2}

(1 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

2 上海大学 力学系, 上海 200072)

摘要: 研究了粘弹性板混沌振动的控制问题 应用非线性系统精确线性化控制理论导出了一类非仿射控制系统的非线性反馈控制律 建立了描述材料非线性的粘弹性板运动的数学模型并利用 Galerkin 方法进行简化 采用相空间曲线和频率谱密度函数说明了在特定参数条件下系统将出现混沌振动, 并以位移为输出变量将混沌振动控制为给定的周期运动

关键词: 控制混沌; 输出变量反馈线性化; 粘弹性板; 非线性

中图分类号: O322 **文献标识码:** A

引 言

控制混沌问题的研究由于其深刻的理论意义和广阔的应用前景而日益受到重视并取得进展^[1~4] 精确线性化方法为设计非线性系统控制的重要方法, 已应用于混沌系统的控制^[5~8]

然而现有的工作^[5~8] 均仅局限于仿射系统的情形, 对于非仿射受控系统中混沌行为的控制尚无涉及 本文用输出变量反馈线性化方法研究一类非仿射可控系统中混沌行为的控制

混沌等非线性动力学理论的发展为粘弹性结构动力学分析提供了新的视角 数值实验揭示混沌运动可出现于多种粘弹性结构, 如杆^[9, 10]、梁^[11]、板^[10, 12] 和壳^[10, 12] 本文在建立一类材料非线性粘弹性板的数学模型并进行简化的基础上, 不仅用数值方法验证了粘弹性方形板的混沌振动, 而且利用输出变量反馈线性化方法将其控制为给定的周期运动

1 一类非仿射系统的输出变量反馈线性化控制

反馈精确线性化的基本思路是设计反馈控制律使得闭环系统的输入_状态关系或输入_输出关系为线性的

考虑单输入和单输出的仿射非线性控制系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (1)$$

$$y = h(x), \quad (2)$$

收稿日期: 1998_07_22; 修订日期: 1999_03_30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19727027); 中国博士后科学基金资助项目(98JC14032); 上海市科技发展基金资助项目(98SHB1417)

作者简介: 陈立群(1963~), 男, 教授, 博士.

其中 $\mathbf{x} \in R^n$, $u \in R$ 和 $y \in R$ 分别为系统状态变量、输入变量(控制)和输出变量, $f, g: R^n \rightarrow R^n$ 为光滑向量值函数, $h: R^n \rightarrow R$ 为光滑实函数. 可以证明^[13]: 当系统(1)对于输出函数(2)有相对度为 r , 即

$$L_g L_f^k h(\mathbf{x}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r-2) \text{ 且 } L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (3)$$

时可输入-输出线性化. 上式中 $L_g h(\mathbf{x})$ 为实函数 $h(\mathbf{x})$ 对向量场 g 的 Lie 导数, 且

$$L_f^k h(\mathbf{x}) = L_f L_f^{k-1} h(\mathbf{x}) \quad L_f^0 h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \quad (4)$$

若给定输出函数的控制目标为 $y_R(t)$, 则有非线性反馈控制律

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})} \left(-L_f^r h(\mathbf{x}) + y_R^{(r)} - \sum_{i=1}^{r-1} c_{i-1} \left[L_f^i h(\mathbf{x}) - y_R^{(i-1)} \right] \right), \quad (5)$$

其中系数 $c_j (j = 1, 2, \dots, r-1)$ 可以由极点配置、二次型最优控制和鲁棒伺服控制等通常的线性系统设计原则确定.

现研究单输入和单输出的非仿射非线性控制系统

$$\dot{q} = a(q, q, q, t) + b(q, q, q, t) \left((q, q, q, t)v + (q, q, q, t)v \right), \quad (6)$$

其中 q 为系统广义坐标, v 为系统控制变量, $a(q, q, q, t)$, $b(q, q, q, t)$, (q, q, q, t) 和 (q, q, q, t) 均为可微函数. 输出变量取为广义坐标, 即 $y = q$, 令

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q & q & q & t \end{bmatrix}^T, \quad (7)$$

$$u = (q, q, q, t)v + (q, q, q, t)v, \quad (8)$$

则以广义坐标 q 为输出变量的非仿射系统(6)可以转化为仿射系统(1)和(2), 其中

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & a(x_1, x_2, x_3, x_4) & 1 \end{bmatrix}^T, \\ g(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & b(x_1, x_2, x_3, x_4) & 0 \end{bmatrix}^T, \\ h(\mathbf{x}) &= x_1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由式(9)计算可得到

$$L_g L_f^0 h(\mathbf{x}) = L_g L_f^1 h(\mathbf{x}) = 0, \quad L_g L_f^2 h(\mathbf{x}) = b(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (10)$$

因而当 $b(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0$ 时, 系统的相对度 $r = 2 + 1 = 3$. 相应的非线性反馈控制律为

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_g L_f^2 h(\mathbf{x})} \left(-L_f^3 h(\mathbf{x}) + y_R - c_2(y - y_R) - c_1(y - y_R) - c_0(y - y_R) \right); \quad (11)$$

当 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0$ 时, 将式(11)代入式(8)解出 v 便得到系统(6)的控制律

$$v(\mathbf{x}) = \exp \left[- \int_{t_0}^t \frac{(\mathbf{x})}{(\mathbf{x})} dt \right] \int_{t_0}^t \frac{u(\mathbf{x})}{(\mathbf{x})} \exp \left[\int_{t_0}^t \frac{(\mathbf{x})}{(\mathbf{x})} dt \right] dt, \quad (12)$$

其中 t_0 为开始施加控制的时刻.

注意到由式(9)可计算导出

$$\det \begin{bmatrix} \text{ad}_f^0 g & \text{ad}_f^1 g & \text{ad}_f^2 g & \text{ad}_f^3 g \end{bmatrix} = 0, \quad (13)$$

其中 $\text{ad}_f^k g = [f, \text{ad}_f^{k-1} g]$, $\text{ad}_f^0 g = g$, (14)

而 $[,]$ 记为 Lie 括号, 故系统(6)不满足状态变量反馈线性化的条件^[13].

2 一类材料非线性粘弹性板运动的数学模型及其简化

考虑受已知面内荷载作用的简支各向同性粘弹性方形薄板的运动. 设几何关系为线性但计及面内力在铅垂方向投影时, 板的动力学方程为

$$M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_x W_{,xx} + N_y W_{,yy} + 2N_{xy} W_{,xy} + hW = 0, \quad (15)$$

其中 M_{xx} 、 M_{xy} 和 M_{yy} 为内力矩, N_x 和 N_y 为 x 和 y 方向面内力, N_{xy} 为面内剪力, W 为挠度, 和 h 分别为板的密度和厚度

设非线性粘弹性材料本构关系满足

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{Q}(0)\mathbf{g}[\mathbf{q}(t)] + \int_0^t \mathbf{Q}(t-\tau)\mathbf{g}[\mathbf{q}(\tau)]d\tau, \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{g}(t) = \left[\begin{array}{ccc} q_{xx}(t) & q_{yy}(t) & q_{xy}(t) \end{array} \right]^T, \quad \mathbf{q}(t) = \left[\begin{array}{ccc} q_{xx}(t) & q_{yy}(t) & q_{xy}(t) \end{array} \right]^T, \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}(t)) = \left[\begin{array}{ccc} q_{xx}(t) + \frac{1}{2}q_{xx}^2(t) + \frac{1}{6}q_{xx}^3(t) & q_{yy}(t) + \frac{1}{2}q_{yy}^2(t) + \frac{1}{6}q_{yy}^3(t) & q_{xy}(t) + \frac{1}{2}q_{xy}^2(t) + \frac{1}{6}q_{xy}^3(t) \end{array} \right]^T, \quad (17)$$

式中 q_{xx} , q_{yy} , q_{xy} , q_{xx} , q_{yy} 和 q_{xy} 为常数 对于各向同性粘弹性材料并只考虑 Poisson 比 为常数的 情形, 有

$$\mathbf{Q}(t) = \left[\begin{array}{ccc} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & 0 \\ Q_{21}(t) & Q_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}(t) \end{array} \right], \quad (18)$$

其中

$$Q_{11}(t) = Q_{22}(t) = \frac{E(t)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12}(t) = Q_{21}(t) = \frac{\nu E(t)}{1-\nu^2}, \quad Q_{66}(t) = \frac{E(t)}{2(1+\nu)}, \quad (19)$$

式中 $E(t)$ 为时变松弛函数, $E(0)$ 为材料的初始弹性模量

对于具有小挠度的薄板, 应变和位移关系和内力矩分别为

$$\epsilon_{xx} = -zW_{,xx}, \quad \epsilon_{yy} = -zW_{,yy}, \quad \epsilon_{xy} = -2zW_{,xy}, \quad (20)$$

$$M_{xx} = -\int_{-h/2}^{h/2} z \epsilon_{xx} dz, \quad M_{yy} = -\int_{-h/2}^{h/2} z \epsilon_{yy} dz, \quad M_{xy} = -\int_{-h/2}^{h/2} z \epsilon_{xy} dz \quad (21)$$

采用分离变量法, 设

$$W(x, y, t) = q(t) \phi(x, y) \quad (22)$$

式(22)代入式(20)将结果代入式(16)并利用式(18)最后代入式(21), 得到

$$\left. \begin{array}{l} M_{xx} = \frac{I}{1-\nu^2} 2(\epsilon_{,xx} + \nu\epsilon_{,yy})F_1(t) + \frac{J}{1-\nu^2} [\epsilon_{xx}(\epsilon_{,xx})^3 + \nu\epsilon_{yy}(\epsilon_{,yy})^3] F_2(t), \\ M_{yy} = \frac{I}{1-\nu^2} 2(\nu\epsilon_{,xx} + \epsilon_{,yy})F_1(t) + \frac{J}{1-\nu^2} [\nu\epsilon_{xx}(\epsilon_{,xx})^3 + \epsilon_{yy}(\epsilon_{,yy})^3] F_2(t), \\ M_{xy} = \frac{I}{1+\nu} \epsilon_{,xy}F_1(t) + \frac{4}{1+\nu} \frac{J}{1+\nu} (\epsilon_{,xy})^3 F_2(t), \end{array} \right\} \quad (23)$$

其中

$$\left. \begin{array}{l} F_1(t) = E(0)q(t) + \int_0^t E(t-\tau)q(\tau)d\tau, \\ F_2(t) = E(0)q^3(t) + \int_0^t E(t-\tau)q^3(\tau)d\tau; \end{array} \right\} \quad (24)$$

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12}, \quad J = \int_{-h/2}^{h/2} z^4 dz = \frac{h^5}{80} \quad (25)$$

将式(22)和式(23)代入式(15)并设剪力 $N_{xy} = 0$, 整理后得到

$$\begin{aligned} & \frac{I}{1-\nu^2}(\kappa_{xxx} + 2\kappa_{xyy} + \kappa_{yyy})F_1(t) + \frac{J}{1-\nu^2}\left\{ \kappa_{xx}[(\kappa_{xx})^3]_{,xx} + \right. \\ & \left. \kappa_{yy}[(\kappa_{yy})^3]_{,yy} + \kappa_{xy}[(\kappa_{xy})^3]_{,xx} + \kappa_{xx}[(\kappa_{xx})^3]_{,yy} + \right. \\ & \left. 8\kappa_{xy}(1-\nu)[(\kappa_{xy})^3]_{,xy} \right\}F_2(t) + N_x \kappa_{,xx}q(t) + \\ & N_y \kappa_{,yy}q(t) + h q(t) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

对于边长为 l 的简支方形板,应用 Galerkin 方法处理方程(26)并仅取第一项,即设

$$(x, y) = \sin \frac{x}{l} \sin \frac{y}{l} \quad (27)$$

式(27)代入式(26)并将所得结果分别对 x 和 y 在 $[0, l]$ 上进行积分,再代入式(24)和(25),可以得到

$$\begin{aligned} q + \left[1 - \frac{N_x + N_y}{N} \right] q + kq^3 = - \int_0^t D(t-\tau) q(\tau) d\tau - \\ k \int_0^t D(t-\tau) q^3(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} D(t) &= \frac{4h^2 E(0)}{3(1-\nu^2)l^4}, \quad N = \frac{2h^3 E(0)}{3(1-\nu^2)l^2}, \quad D(t) = \frac{E(t)}{E(0)}, \\ k &= \frac{9}{1280} \frac{8h^4 E(0)}{(1-\nu^2)l^8} [\kappa_{xx}(1+\nu) + \kappa_{yy}(1+\nu) + 8\kappa_{xy}(1-\nu)] \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

设松弛函数具有形式

$$E(t) = A + B \exp(-\lambda t), \quad (30)$$

面板内 x 方向作用简谐激励 $N_x = F_0 \cos t$, 而 y 方向作用控制力 $N_y = v$ 将式(28)两边对时间求导,经整理可得到

$$\begin{aligned} q + \left[1 - \frac{N_x + N_y}{N} \right] q + \left[\lambda^2(1-f \cos t) + 3kq^2 \right] q + \left[\lambda^2(1-f \cos t) + \right. \\ \left. f \lambda^2 \sin t - \frac{B \lambda^2}{A+B} \right] q + \frac{kA}{A+B} q^3 - \lambda^2 [vq + v(q + q)] = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\text{其中 } f = \frac{F_0}{N}, \quad v = \frac{V}{N} \quad (32)$$

3 混沌振动的控制

以往工作表明不施加控制即 $v = 0$ 时,粘弹性板在面内周期荷载作用下可能出现混沌振动^[14, 11] 事实上,取 $A = 0.3$ 、 $B = 0.7$ 、 $\lambda = 1$ 、 $\nu = 0.2$ 、 $\nu = 0.00001$ 、 $f = 1$ 和 $k = 1$, 系统(31)的挠度时间历程和相空间曲线分别如图 1 和图 2 所示,功率谱密度函数如图 3 所示,数值结果表明运动呈现混沌状态

系统(31)为单输入和单输出的非仿射非线性控制系统,若令

$$\left. \begin{aligned} a(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) &= -\ddot{q} - \left[\lambda^2(1-f \cos t) + 3kq^2 \right] \dot{q} - \left[\lambda^2(1-f \cos t) + \right. \\ & \left. f \lambda^2 \sin t - \frac{B \lambda^2}{A+B} \right] q - \frac{kA}{A+B} q^3, \\ b(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) &= \lambda^2, \quad (q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = q, \\ c(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) &= q + \dot{q}, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

则式(31)可化作式(6)的形式,且 $b(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$

0

现应用式(12)和(11)给出的控制律进行控制,用极点配置的方法确定式(11)中的系数 $c_i (i = 1, 2, 3)$ 。选择极点依次为 $-0.5, -1$ 和 -1.5 , 则相应地有 $c_0 = 0.75, c_1 = 2.75$ 和 $c_2 = 3$ 。分别取控制目标为倍周期运动和周期4运动

$$y_{R1}(t) = 0.3 + 0.25 \sin \frac{t}{2}, \quad (34)$$

$$y_{R2}(t) = -0.3 + 0.25 \sin \frac{t}{4}, \quad (35)$$

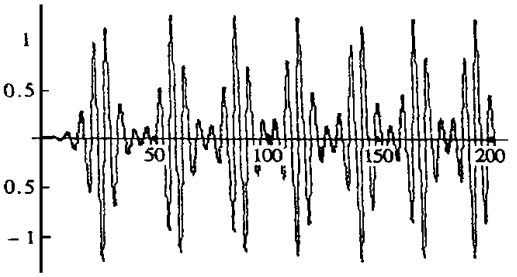


图1 混沌时间历程

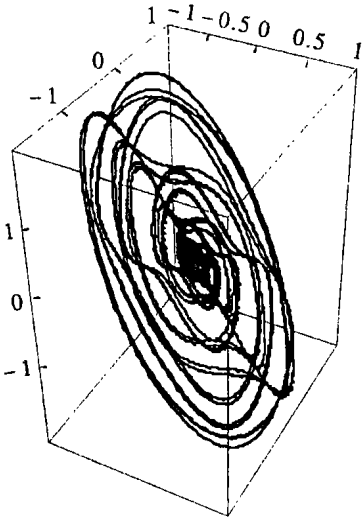


图2 混沌相轨迹曲线

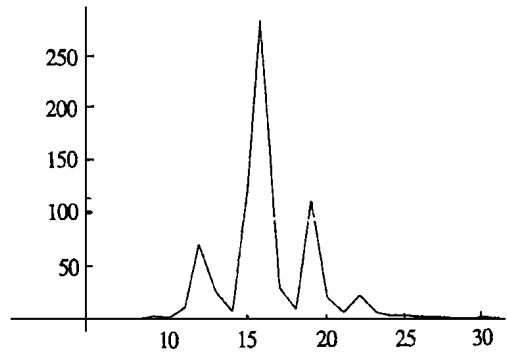


图3 混沌时间历程的功率谱密度函数

$t_0 = 50$ 后开始控制,受控系统的时间历程分别如图4和图5所示

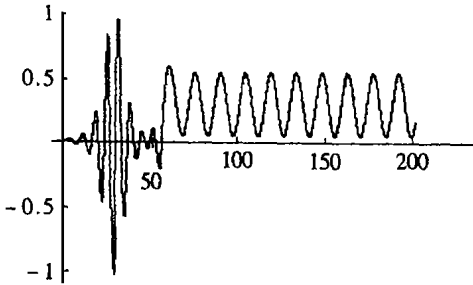


图4 控制混沌为倍周期运动(34)

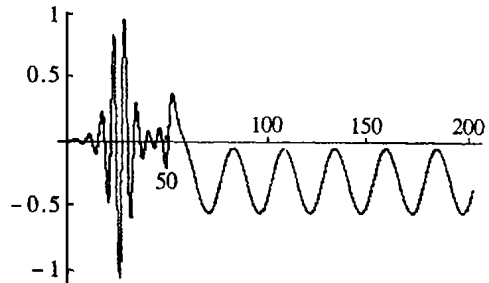


图5 控制混沌为周期4运动 (35)

4 结 论

本文应用输出变量反馈线性化方法建立了非仿射非线性控制系统(6)的反馈控制律(12)和(11),建立了一类粘弹性板面内荷载激励下运动的数学模型(26)并用 Galerkin 方法得到简化形式(28)。用数值方法说明无控制时粘弹性板出现混沌振动,应用反馈控制律(12)和(11)

将混沌运动控制为给定的周期运动(34)和(35)

[参 考 文 献]

- [1] Shinbrot T, Grebogi C, Ott E, et al. Using small perturbations to control chaos[J]. *Nature*, 1993, **363**(3): 411~ 417.
- [2] Lindner J F, Ditto W L. Removal, suppression, and control of chaos by nonlinear design[J]. *Rev Appl Mech*, 1995, **45**(12): 795~ 807.
- [3] 胡海岩,力学系统混沌的主动控制[J]. *力学进展*, 1996, **26**(4): 453~ 463.
- [4] 陈立群,刘延柱. 控制混沌的研究现状与展望[J]. *上海交通大学学报*, 1998, **32**(1): 108~ 114.
- [5] Hall E K, Hanagud S V. Control of nonlinear structural dynamic systems: chaotic vibrations[J]. *J Guidance Control Dynamics*, 1993, **16**: 470~ 476.
- [6] Alvarez_Gallegos J. Nonlinear regulation of a Lorenz system by feedback linearization techniques[J]. *Dynam Cont*, 1994, **4**(2): 277~ 298.
- [7] Yu X. Controlling chaos using input_output linearization approach[J]. *Int J Bifur Chaos*, 1997, **7**(8): 1659~ 1664.
- [8] 陈立群,刘延柱. 用精确线性化控制 Lorenz 混沌[J]. *应用数学和力学*, 1998, **19**(1): 63~ 69.
- [9] Suire G, Cederbaum G. Periodic and chaotic behavior of viscoelastic nonlinear (elastic) bars under harmonic excitations[J]. *Int J Mech Sci*, 1995, **37**(7): 753~ 772.
- [10] Ding R. The dynamic analysis of viscoelastic structure[D]. Lanzhou University: Doctoral Dissertation, 1996, 56~ 72.
- [11] Argyris J. Chaotic vibrations of a nonlinear viscoelastic beam[J]. *Chaos, Solitons, Fractals*, 1996, **7**(1): 151~ 163.
- [12] 张能辉. 粘弹性板壳结构的静动力分析[D]. 博士学位论文,兰州: 兰州大学, 1997, 39~ 99.
- [13] Isidori A. *Nonlinear Control Systems* [M]. New York: Springer-Verlag, 1989, 156~ 172.
- [14] Touati D, Cederbaum G. Dynamic stability of nonlinear viscoelastic plate[J]. *Int J Solids Struct*, 1994, **31**(17): 2367~ 2376.

Controlling Chaotic Oscillations of Viscoelastic Plates by the Linearization via Output Feedback

Chen Liqun¹, Cheng Changjun^{1,2}

(1 Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P R China;

2 Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: Controlling chaotic oscillations of viscoelastic plates is investigated in this paper. Based on the exact linearization method in nonlinear system control theory, a nonlinear feedback control law is presented for a class of non-affine control systems. The mathematical model describing motion of nonlinear viscoelastic plates is established, and it is simplified by the Galerkin method. The phase space portrait and the power spectrum are employed to demonstrate chaos in the system. The deflection is treated as an output, and is controlled to given periodic goals.

Key words: controlling chaos; linearization via output feedback; viscoelastic plate; nonlinearity