应用数学和力学, 第 20 卷 第 12 期(1999 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 12_1252_07

封闭薄壁截面空间曲杆的双力矩*

朱渝春, 张培源, 严 波

(重庆大学 工程力学系, 重庆 400044)

(张汝清推荐)

摘要: 讨论了各向异性材料薄壁截面空间曲杆的双力矩, 给出了一般解法及平面曲杆受竖向载荷作用的双力矩公式.

关 键 词: 封闭薄壁截面; 空间曲杆; 双力矩
中图分类号: TB125 文献标识码: A

引 言

薄壁截面直杆的约束扭转问题, 无论是匀质材料或是各向异性非匀质材料, 对开口截面或对闭合截面, 均已得到完好的解答[1, 2, 3]. 但对于空间曲杆, 这个问题至今却未能得到令人满意的结果. 近代工程结构, 特别是与箱形截面曲梁相关的桥梁工程结构, 急需对这一问题作深入的研究. 为此, 本文基于各向异性材料提出了封闭薄壁截面空间曲杆的双力矩解法.

设空间曲线 l 的切线、法线和次法线单位矢量分别为 $\boldsymbol{e}_s$、$\boldsymbol{e}_n$、$\boldsymbol{e}_b$, 对足够光滑的曲线, 如下 Frenet 公式成立, 即

$$\dot{\boldsymbol{e}}_s = k_0 \boldsymbol{e}_n, \quad \dot{\boldsymbol{e}}_n = -k_0 \boldsymbol{e}_s + \tau_0 \boldsymbol{e}_b, \quad \dot{\boldsymbol{e}}_b = -\tau_0 \boldsymbol{e}_n, \tag{1}$$

式中 $(\dot{\ }) = \mathrm{d}(\ )/\mathrm{d}s$, s、k_0 和 τ_0 分别为弧坐标、曲率和挠率[4].

过平面图形 F 上的定点 O_1, 在面内取两正交的固定方向 $O_1\xi$ 和 $O_1\eta$, 让点 O_1 在曲线 l 上运动且平面图形总垂直于 l, 由此产生的图形 F 的轨迹构成了空间曲杆. 方向 $O_1\xi$ 与曲线法线 $\boldsymbol{e}_n$ 的夹角记为 θ. 通常 θ 是 s 的函数. 如果用 $\boldsymbol{e}_\xi$ 和 $\boldsymbol{e}_\eta$ 表示 $O_1\xi$ 和 $O_1\eta$ 的单位矢量, 则有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_\xi &= \boldsymbol{e}_n\cos\theta + \boldsymbol{e}_b\sin\theta, \\ \boldsymbol{e}_\eta &= -\boldsymbol{e}_n\sin\theta + \boldsymbol{e}_b\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

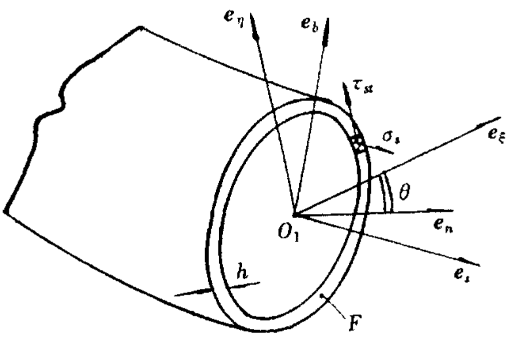

图 1 σ_s 和 τ_{st}

由式(1) 可以得到

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}}_s &= k_\xi \boldsymbol{e}_\xi - k_\eta \boldsymbol{e}_\eta, \\ \dot{\boldsymbol{e}}_\xi &= -k_\xi \boldsymbol{e}_s + \tau \boldsymbol{e}_\eta, \\ \dot{\boldsymbol{e}}_\eta &= k_\eta \boldsymbol{e}_s - \tau \boldsymbol{e}_\xi, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

* 收稿日期: 1998_01_14; 修订日期: 1999_04_19
作者简介: 朱渝春(1945~) , 男, 硕士, 副教授.

式中 $k_\xi = k_0\cos\theta$, $k_\eta = k_0\sin\theta$, $\tau = \tau_0 + \dot{\theta}$.

设曲线 l 为杆的轴线, 并称图形 F 为杆的截面. 用 h 表示壁厚, t 表示壁厚中线的弧坐标. 并假定壁厚 h 远小于截面的面内尺寸, 于是, 取材料的本构方程可近似表示为(图 1)

$$\sigma_s = E\varepsilon, \quad \tau_{st} = G\gamma_{st}, \tag{4}$$

式中 E、G 为相应的拉压模量和剪切模量[5].

1　内力、平衡方程和几何方程

把截面 F 上的应力矢量向 O_1 简化, 得到主矢 $\boldsymbol{N}$ 和主矩 $\boldsymbol{M}$, 分别用 N_s、N_ξ、N_η 和 M_s、M_ξ、M_η 表示其分量, 则

$$\boldsymbol{N} = N_s\boldsymbol{e}_s + N_\xi\boldsymbol{e}_\xi + N_\eta\boldsymbol{e}_\eta, \quad \boldsymbol{M} = M_s\boldsymbol{e}_s + M_\xi\boldsymbol{e}_\xi + M_\eta\boldsymbol{e}_\eta,$$

其中 N_s 为轴力, N_ξ、N_η 为切力, M_s 为扭矩, M_ξ、M_η 为弯矩. 再以 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 表示轴线单位长度对应的外力和外力矩为

$$\boldsymbol{p} = p_s\boldsymbol{e}_s + p_\xi\boldsymbol{e}_\xi + p_\eta\boldsymbol{e}_\eta, \quad \boldsymbol{m} = m_s\boldsymbol{e}_s + m_\xi\boldsymbol{e}_\xi + m_\eta\boldsymbol{e}_\eta.$$

平衡方程为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{\boldsymbol{N}\} - [\boldsymbol{K}]\cdot\{\boldsymbol{N}\} + \{\boldsymbol{p}\} = \{\boldsymbol{0}\}, \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{\boldsymbol{M}\} - [\boldsymbol{K}]\cdot\{\boldsymbol{M}\} - [\boldsymbol{H}]\cdot\{\boldsymbol{N}\} + \{\boldsymbol{m}\} = \{\boldsymbol{0}\}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中

$$\{\boldsymbol{N}\} = [N_s \quad N_\xi \quad N_\eta]^{\mathrm{T}}, \quad \{\boldsymbol{M}\} = [M_s \quad M_\xi \quad M_\eta]^{\mathrm{T}},$$
$$\{\boldsymbol{p}\} = [p_s \quad p_\xi \quad p_\eta]^{\mathrm{T}}, \quad \{\boldsymbol{m}\} = [m_s \quad m_\xi \quad m_\eta]^{\mathrm{T}},$$
$$[\boldsymbol{K}] = \begin{bmatrix} 0 & k_\xi & -k_\eta \\ -k_\xi & 0 & \tau \\ -k_\eta & -\tau & 0 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{H}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

其通解[6]为(取 $\{\boldsymbol{m}\} = \{\boldsymbol{0}\}$)

$$\left.\begin{aligned} &\{\boldsymbol{N}\} = [\boldsymbol{A}]\cdot\left\{\{\boldsymbol{Q}_0\} - \int_0^s[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}\cdot\{\boldsymbol{p}\}\,\mathrm{d}s\right\}, \\ &\{\boldsymbol{M}\} = [\boldsymbol{A}]\cdot\left\{\{\boldsymbol{R}_0\} + \int_0^s[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}\cdot[\boldsymbol{H}]\cdot[\boldsymbol{A}]\cdot(\{\boldsymbol{Q}_0\} + \{\boldsymbol{Q}^*\})\,\mathrm{d}s\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中 $\{\boldsymbol{Q}_0\}$ 和 $\{\boldsymbol{R}_0\}$ 为积分常数, $\{\boldsymbol{Q}^*\} = -\int_0^s[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{p}\}\,\mathrm{d}s$. 如空间固定的直角坐标系基本单位矢量为 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$, 则有

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_s\cdot\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_s\cdot\boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_s\cdot\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_\xi\cdot\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_\xi\cdot\boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_\xi\cdot\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_\eta\cdot\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_\eta\cdot\boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_\eta\cdot\boldsymbol{e}_z \end{bmatrix}. \tag{7}$$

为了导出几何方程, 引入乘子 δu_s、δu_ξ、δu_η、$\delta\varphi_s$、$\delta\varphi_\xi$、$\delta\varphi_\eta$, 用 $[\delta u_s \quad \delta u_\xi \quad \delta u_\eta]$ 和 $[\delta\varphi_s \quad \delta\varphi_\xi \quad \delta\varphi_\eta]$ 左乘方程(5) 两端, 将两等式求和后在区间(0, l) 上对 s 作积分, 得到

$$\begin{aligned} \int_0^s[&(\dot{N}_s - k_\xi N_\xi + k_\eta N_\eta + p_s)\delta u_s + (\dot{u}_\xi - k_\xi u_s - \tau N_\eta + p_\xi)\delta u_\xi + \\ &(\dot{N}_\eta - k_\eta N_s + \tau N_\xi + p_\eta)\delta u_\eta + (\dot{M}_s - k_\xi M_\xi + k_\eta M_\eta + m_s)\delta\varphi_s + \\ &(\dot{M}_\xi + k_\xi M_s - \tau M_\eta - N_\eta + m_\xi)\delta\varphi_\xi + (\dot{M}_\eta - k_\eta M_s + \tau M_\xi + N_\xi + m_\eta)\delta\varphi_\eta]\,\mathrm{d}s = \end{aligned}$$

$$\int_0^l (N_s\delta\varepsilon + N_\xi\delta\gamma_\xi + N_\eta\delta\gamma_\eta + M_s\delta\kappa_s + M_\xi\delta\kappa_\xi + M_\eta\delta\kappa_\eta)\,\mathrm{d}s +$$
$$[N_s\delta u_s]_0^l + [N_\xi\delta u_\xi]_0^l + [N_\eta\delta u_\eta]_0^l + [M_s\delta\varphi_s]_0^l + [M_\xi\delta\varphi_\xi]_0^l + [M_\eta\delta\varphi_\eta]_0^l, \tag{8}$$

其中引入了记号 $[\boldsymbol{J}]_0^s = (\boldsymbol{J})_{s=l} - (\boldsymbol{J})_{s=0}$ 和

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon = \dot{u}_s - k_\xi u_\xi + k_\eta u_\eta, \quad \gamma_\xi = \dot{u}_\xi + k_\xi u_s - \tau u_\eta - \varphi_\eta,\\
&\gamma_\eta = \dot{u}_\eta - k_\eta u_s + \tau u_\xi + \varphi_\xi, \quad \kappa_s = \dot{\varphi}_s - k_\xi\varphi_\xi + k_\eta\varphi_\eta,\\
&\kappa_\xi = \dot{\varphi}_\xi + k_\xi\varphi_s - \tau\varphi_\eta, \quad \kappa_\eta = \dot{\varphi}_\eta - k_\eta\varphi_s + \tau\varphi_\xi\cdot
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

则在方程(8)中, ε、γ_ξ、γ_η、κ_s、κ_ξ、κ_η 分别是广义应力 N_s、N_ξ、N_η、M_s、M_ξ、M_η 对应的广义应变, u_s、u_ξ、u_η、φ_s、φ_ξ、φ_η 为载荷 p_s、p_ξ、p_η、m_s、m_ξ、m_η 对应的广义位移• 边界条件为

$$N_s \text{ 或 } u_s,\ N_\xi \text{ 或 } u_\xi,\ N_\eta \text{ 或 } u_\eta,\ M_s \text{ 或 } \varphi_s,\ M_\xi \text{ 或 } \varphi_\xi,\ M_\eta \text{ 或 } \varphi_\eta\cdot \tag{10}$$

通常将方程(9)称为几何方程, 可改写为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{\varphi\} - [\boldsymbol{K}]\cdot\{\varphi\} - \{\kappa\} = \{\boldsymbol{0}\},\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{\boldsymbol{u}\} - [\boldsymbol{K}]\cdot\{\boldsymbol{u}\} - [\boldsymbol{H}]\cdot\{\varphi\} - \{\varepsilon\} = \{\boldsymbol{0}\},
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中

$$\{\varphi\} = [\varphi_s \quad \varphi_\xi \quad \varphi_\eta]^{\mathrm{T}}, \quad \{\boldsymbol{u}\} = [u_s \quad u_\xi \quad u_\eta]^{\mathrm{T}},$$
$$\{\kappa\} = [\kappa_s \quad \kappa_\xi \quad \kappa_\eta]^{\mathrm{T}}, \quad \{\varepsilon\} = [\varepsilon \quad \gamma_\xi \quad \gamma_\eta]^{\mathrm{T}}\cdot$$

因此, 几何方程有通解

$$\left.\begin{aligned}
&\{\varphi\} = [\boldsymbol{A}]\cdot(\{\phi_0\} + \{\phi^*\}),\\
&\{\boldsymbol{u}\} = [\boldsymbol{A}]\cdot\left\{\{\boldsymbol{U}_0\} + \int_0^s [\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}\cdot(\{\varepsilon\} + [\boldsymbol{H}]\cdot[\boldsymbol{A}](\{\phi_0\} + \{\phi^*\}))\cdot\mathrm{d}s\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

式中 $\{\phi_0\}$ 和 $\{\boldsymbol{U}_0\}$ 为积分常数, $\{\phi^*\} = \int_0^s [\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}\cdot\{\kappa\}\,\mathrm{d}s$ •

2 双力矩和等效本构方程

在上面的讨论中未计入双力矩• 非自由扭转的空间薄壁杆, 存在双力矩情况下, 仿照[1, 5] 取截面上应变 ε_s 和 γ_{st} 的分布规律为

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_s = \varepsilon + \eta\kappa_\xi - \xi\kappa_\eta - \dot{\kappa}\omega_A^*,\\
&\gamma_{st} = \kappa_s r_0 - \gamma_\xi\sin\alpha + \gamma_\eta\cos\alpha - \kappa(r_0 - e),
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

式中 ε、γ_ξ、γ_η、κ_s、κ_ξ、κ_η 仍按式(8) 表示• 对于闭合薄壁截面, 考虑约束扭转引入了广义应变 κ• ω_A^*、r_0、r_A、e 定义(图 2) 为[5]

$$\omega_A^* = \omega_A - \int_0^t e\,\mathrm{d}t, \quad e = \Omega\bigg/\left(Gh\oint\frac{\mathrm{d}t}{Gh}\right), \quad \omega_A = \int_0^t r_A\,\mathrm{d}t, \quad \Omega = \omega_A\,|_{s=l}\cdot \tag{14}$$

坐标系 $O_1\xi\eta$、点 A 和弧长计算起点 P_0 的选择应满足的条件是

$$\oint E\xi h\,\mathrm{d}t = \oint E\eta h\,\mathrm{d}t = 0, \quad \oint E\xi\eta h\,\mathrm{d}t = 0$$

和

$$\oint E\xi\omega_A^* h\,\mathrm{d}t = \oint E\eta\omega_A^* h\,\mathrm{d}t = 0, \quad \oint E\omega_A^* h\,\mathrm{d}t = 0\cdot$$

这种坐标系 $O_1\xi\eta$ 称为物理形心主轴系, ω_A^* 为物理主扇性坐标•

引入内力的应力表示为

$$
\left.\begin{aligned}
&N_s = \oint \sigma_s h\,\mathrm{d}t,\ N_\xi = -\oint \tau_{st}\sin\alpha h\,\mathrm{d}t,\\
&N_\eta = \oint \tau_{st}\cos\alpha h\,\mathrm{d}t,\\
&M_s = \oint \tau_{st} r_0 h\,\mathrm{d}t,\\
&M_\xi = \oint \sigma_s \eta h\,\mathrm{d}t,\\
&M_\eta = -\oint \sigma_s \xi h\,\mathrm{d}t,\\
&M_{\mathrm{B}} = \oint \sigma_s \omega_A^* h\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}\right\}
\tag{15}
$$

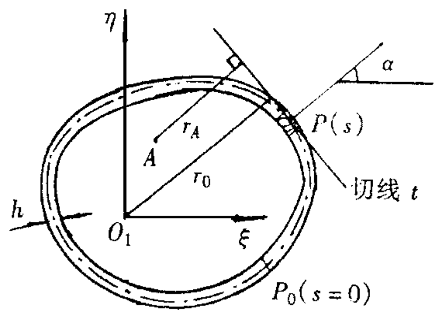

图 2　截面性质

式中 M_{B} 为双力矩· 另记

$$
M_{s\mathrm{B}} = \oint \tau_{st}(r_0 - e)h\,\mathrm{d}t,
\tag{16}
$$

容易证明

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l\oint(\sigma_s\delta\varepsilon_s + \tau_{st}\delta\gamma_{st})h\,\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}s = \int_0^l\big[N_s\delta\varepsilon + N_\xi\delta\gamma_\xi + N_\eta\delta\gamma_\eta + M_s\delta\kappa_s +\\
&\qquad M_\xi\delta\kappa_\xi + M_\eta\delta\kappa_\eta + (M'_{\mathrm{B}} - M_{s\mathrm{B}})\delta\kappa\big]\mathrm{d}s - \big[M_{\mathrm{B}}\delta\kappa\big]_0^l\cdot
\end{aligned}
\tag{17}
$$

另一方面, 应变能的变分为

$$
\begin{aligned}
\delta U = {}& \delta\int_0^l\oint\frac{1}{2}(E\varepsilon_s^2 + G\gamma_{st}^2)h\,\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}s =\\
&\int_0^l\Big\{D_{11}\varepsilon\delta\varepsilon + D_{22}\gamma_\xi\delta\gamma_\xi + D_{33}\gamma_\eta\delta\gamma_\eta + \big[D_{44}\kappa_s - (D_{44} - D_0)\kappa\big]\delta\kappa_s +\\
&D_{55}\kappa_\xi\delta\kappa_\xi + D_{66}\kappa_\eta\delta\kappa_\eta + \big[(D_{44} - D_0)(\kappa - \kappa_s) - D_{77}\kappa''\big]\delta\kappa\Big\}\mathrm{d}s +\\
&\big[D_{77}\kappa'\delta\kappa\big]_0^l + \int_0^l\Big\{-\oint Gr_A\sin\alpha h\,\mathrm{d}t(\kappa_s\delta\gamma_\xi + \gamma_\xi\delta\kappa_s) +\\
&\oint Gr_A\cos\alpha h\,\mathrm{d}t(\kappa_s\delta\gamma_\eta + \gamma_\eta\delta\kappa_s) - \oint G\sin\alpha\cos\alpha h\,\mathrm{d}t(\gamma_\xi\delta\gamma_\eta + \gamma_\eta\delta\gamma_\xi) +\\
&\oint G(r_A - e)\sin\alpha h\,\mathrm{d}t(\gamma_\xi\delta\kappa + \kappa\delta\gamma_\xi) - \oint G(r_A - e)\cos\alpha h\,\mathrm{d}t(\gamma_\eta\delta\kappa - \kappa\delta\gamma_\eta)\Big\}\mathrm{d}s\cdot
\end{aligned}
\tag{18}
$$

若假设截面形状和 G 的分布关于轴 $O_1\xi$ 和 $O_1\eta$ 对称, 则后一积分式恒为零· 使式(17) 和(18) 右端相等, 得到杆的等效本构方程

$$
\left.\begin{aligned}
&N_s = D_{11}\varepsilon,\ N_\xi = D_{22}\gamma_\xi,\ N_\eta = D_{33}\gamma_\eta,\ M_s = D_{44}\kappa_s - (D_{44} - D_0)\kappa,\\
&M_\xi = D_{55}\kappa_\xi,\ M_\eta = D_{66}\kappa_\eta,\ M_{\mathrm{B}} = -D_{77}\kappa',\ M_{s\mathrm{B}} = (D_{44} - D_0)(\kappa_s - \kappa),
\end{aligned}\right\}
\tag{19}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
&D_{11} = \oint Eh\,\mathrm{d}t,\ D_{22} = \oint G\sin^2\alpha h\,\mathrm{d}t,\ D_{33} = \oint G\cos^2\alpha h\,\mathrm{d}t,\\
&D_{44} = \oint Gr_0^2 h\,\mathrm{d}t,\ D_{55} = \oint E\eta^2 h\,\mathrm{d}t,\ D_{66} = \oint E\xi^2 h\,\mathrm{d}t,\\
&D_{77} = \oint E\omega_A^{*2} h\,\mathrm{d}t,\ D_0 = \Omega^2\Big\backslash\oint\frac{\mathrm{d}t}{Gh},
\end{aligned}\right\}
\tag{20}
$$

其中 D_0 为自由扭转截面的抗扭刚度· 并有关系式

$$
\oint Gr_0 eh\,\mathrm{d}t = \oint Ge^2 h\,\mathrm{d}t = D_0\cdot
$$

全杆的最小势能原理可表示为

$$\delta U-\delta\int_0^l\left(\{\boldsymbol{p}\}^{\mathrm{T}}\cdot\{\boldsymbol{u}\}+\{\boldsymbol{m}\}^{\mathrm{T}}\cdot\{\varphi\}\right)\mathrm{d}s=0, \tag{21}$$

可导出用广义位移表示的平衡方程(5)和用广义位移表示的变分方程

$$\ddot{M}_{\mathrm{B}}-M_{s\mathrm{B}}=0. \tag{22}$$

此外,还可导出边界条件(10)和边界条件

$$[M_{\mathrm{B}}\delta\kappa]_0^l=0. \tag{23}$$

3 双力矩求解的一般方法

封闭薄壁截面空间曲杆静力学问题的方程包含有(A) 变分方程(21);(B) 几何方程(11);(C) 等效本构方程(19). 一般的求解步骤是:

首先,由本构方程(19)的第4、7、8式和式(22),建立 κ 和 κ_s 的方程

$$D_{44}\kappa_s-(D_{44}-D_0)\kappa-M_s=0,\quad(-D_{77}\ddot{\kappa})-(D_{44}-D_0)(\kappa_s-\kappa)=0. \tag{24}$$

如果 D_{kk} 为常数($k=1,2,\cdots,7$),则此方程对 κ 和 κ_s 求解得到

$$\kappa=c_1\mathrm{ch}\,\alpha s+c_2\mathrm{sh}\,\alpha s+\kappa^*,\quad \kappa_s=\frac{D_{44}-D_0}{D_{44}}\kappa+\frac{1}{D_{44}}M_s, \tag{25}$$

式中 κ^* 为方程(24)的一个特解,

$$\alpha=\sqrt{(D_{44}-D_0)\cdot D_0/D_{44}D_{77}}.$$

这样,$\{\kappa\}$ 和 $\{\varepsilon\}$ 都可由 $\{\boldsymbol{N}\}$、$\{\boldsymbol{M}\}$ 和积分常数 c_1 和 c_2 表达. 余下的问题是确定积分常数 $\{\boldsymbol{Q}_0\}$、$\{\boldsymbol{R}_0\}$、$\{\phi_0\}$、$\{\boldsymbol{U}_0\}$ 和 c_1 与 c_2.

4 平面曲杆受竖向分布载荷的双力矩

在式(3)中取 $\tau=0$、$\theta=0$,就得到平面曲杆的情况(图3). 把直角坐标系 $Oxyz$ 的原点置于曲杆端点($s=0$),把坐标面 Oxy 取为杆轴线所在平面,给定的载荷为

$$\{\boldsymbol{m}\}=\{\boldsymbol{0}\},\{\boldsymbol{p}\}=[0\quad 0\quad q]^{\mathrm{T}}.$$

如果取杆轴线为半径等于 a 的圆,则有

$$\beta=\frac{s}{a},\quad k=\frac{1}{a},$$

$$x=a\sin\beta,\quad y=a(1-\cos\beta).$$

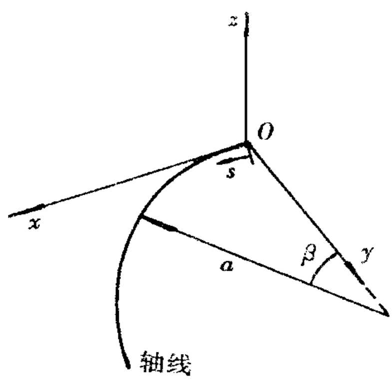

图3 平面曲杆的轴线

记 $D=D_{77}D_{44}/(D_{44}-D_0)$,则方程(24)的解(25)成为

$$\kappa=c_1\mathrm{ch}\,\alpha s+c_2\mathrm{sh}\,\alpha s+\frac{1}{D(k^2+\alpha^2)}\left\{M_{0s}\cos\beta+M_{0\xi}\sin\beta-N_{0\eta}a\left[\cos\beta-\frac{D(k^2+\alpha^2)}{D_0}\right]+qa^2\left[\sin\beta-\frac{s}{a}\frac{D(k^2+\alpha^2)}{D_0}\right]\right\}, \tag{26}$$

$$\kappa_s=\frac{D_{44}-D_0}{D_{44}}(c_1\mathrm{ch}\,\alpha s+c_2\mathrm{sh}\,\alpha s)+\frac{1}{D_{44}}\left\{(1+f)M_{0s}\cos\beta+(1+f)M_{0\xi}\sin\beta-\left[(1+f)\cos\beta+\left(1+f\frac{D(k^2+\alpha^2)}{D_0}\right)\right]N_{0\eta}a+\right.$$

$$qa^2\left[(1+f)\sin\beta-\frac{s}{a}\left(1+f\frac{D(k^2+\alpha^2)}{D_0}\right)\right]\Bigg\},\tag{27}$$

式中

$$f=(D_{44}-D_0)^2/[D_{44}D_{77}(k^2+\alpha^2)]\cdot$$

由式(6)和(12)给出

$$\left.\begin{aligned}
M_s&=M_{0s}\cos\beta+M_{0\xi}\sin\beta+N_{0\eta}y-qa(s-a\sin\beta),\\
M_\xi&=-M_{0s}\sin\beta+M_{0\xi}\cos\beta+N_{0\eta}x-qay,\\
N_\eta&=N_{0\eta}-qs,\\
\varphi_s&=\psi_{0s}\cos\beta+\psi_{0\xi}\sin\beta+\cos\beta\int_0^s(\kappa_s\cos\beta-\kappa_\xi\sin\beta)\,\mathrm{d}s+\\
&\qquad\sin\beta\int_0^s(\kappa_s\sin\beta+\kappa_\xi\cos\beta)\,\mathrm{d}s,\\
\varphi_\xi&=-\psi_{0s}\sin\beta+\psi_{0\xi}\cos\beta-\sin\beta\int_0^s(\kappa_s\cos\beta-\kappa_\xi\sin\beta)\,\mathrm{d}s+\\
&\qquad\cos\beta\int_0^s(\kappa_s\sin\beta+\kappa_\xi\cos\beta)\,\mathrm{d}s,\\
u_\eta&=U_{0\eta}+\psi_{0s}y-\psi_{0\xi}x+\int_0^s\gamma_\eta\mathrm{d}s+\int_0^s\left[\sin\beta\int_0^s(\kappa_s\cos\beta+\kappa_\xi\sin\beta)\,\mathrm{d}s+\right.\\
&\qquad\left.\cos\beta\int_0^s(\kappa_s\sin\beta+\kappa_\xi\cos\beta)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}s\cdot
\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

式中 M_{0s}、$M_{0\xi}$、$N_{0\eta}$ 为 M_s、M_ξ、N_η 在端点 $s=0$ 处的值, ψ_{0s}、$\psi_{0\xi}$、$U_{0\eta}$ 为 φ_s、φ_ξ、u_η 在端点 $s=0$ 处的值, κ_ξ 和 γ_η 则由式(19) 通过 M_ξ 和 N_η 表示· 此外, N_s、N_ξ、M_η、u_s、u_ξ、φ_η 均恒为零·

如果在 $s=0$ 处杆被固定, 而在 $s=l$ 处杆处于自由状态, 则其边界条件可表示为

$$s=0(\beta=0),\quad U_{0\eta}=0,\quad \psi_{0s}=\psi_{0\xi}=0,\quad \kappa=0\ (存在双力矩),$$

$$s=l(\beta=\beta_l),\quad N_\eta=0,\quad M_s=M_\xi=0,\quad \kappa'=0\ (不存在双力矩)\cdot$$

由这些条件决定出的积分常数为

$$\left.\begin{aligned}
N_{0\eta}&=ql,\quad M_{0s}=qal\left(1-\frac{q}{l}\sin\beta_l\right),\\
M_{0\xi}&=-qa^2(1-\cos\beta_l),\\
c_1&=qa\left[\frac{a\sin\beta_l}{D(k^2+\alpha^2)}-\frac{l}{D^*}\right],\\
c_2&=-c_1\mathrm{th}\,\alpha l+\frac{qa^2}{D(k^2+\alpha^2)}\cdot\frac{k^3}{\alpha^3}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}\,\alpha l}\cdot
\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

式(19)之第7式给出的双力矩为

$$\begin{aligned}
M_{\mathrm{B}}=-\frac{D_{44}-D_0}{D_{44}}\Bigg\{&qa^2\left[\left(\frac{l}{a\alpha}-\frac{\alpha\sin\beta_l}{k^2+\alpha^2}\right)\frac{\mathrm{sh}\,\alpha(l-s)}{\mathrm{ch}\,\alpha l}+\right.\\
&\left.\frac{k^3}{(k^2+\alpha^2)\alpha^2}\left(\frac{\mathrm{ch}\,\alpha s}{\mathrm{ch}\,\alpha l}-1\right)\right]+\frac{k}{k^2+\alpha^2}M_\xi\Bigg\}\cdot
\end{aligned}\tag{30}$$

在固定端 $(s=0)$ 处的双力矩为

$$M_{\mathrm{B}0}=-\frac{D_{44}-D_0}{D_{44}}qa^2\left[\left(\frac{l}{a\alpha}-\frac{\alpha\sin\beta_l}{k^2+\alpha^2}\right)\cdot\mathrm{th}\,\alpha l+\right.$$

$$\left.\frac{k^3}{(k^2+\alpha^2)\alpha^2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,\alpha l}-1\right)-\frac{k}{k^2+\alpha^2}(1-\cos\beta_l)\right]\cdot \tag{31}$$

[参 考 文 献]

[1] 詹涅里杰 Γ Ш, 巴诺夫柯 П Γ. 弹性薄壁杆件的静力学[M]. 胡海昌, 解伯民译. 北京: 科学出版社, 1955.

[2] 陈铁云, 陈伯真. 开口薄壁杆件的弯曲、扭转和稳定性[M]. 北京: 国防工业出版社, 1965.

[3] ½±ÃÀ³ . À¿¼ÀÃÄ¶¿¿Í¶ ÁÂÀ¼º¶ Ä¶Â¸¿º [M]. ÀÃ¼³ ±: ¹µÀÄ¶½ÎÃÄ³À ¼±µ¶¾ºº ±Å¼ , 1963.

[4] 吴大任. 微分几何[M]. 北京: 人民教育出版社, 1959.

[5] 罗祖道, 李惠简. 各向异性材料力学[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1994.

[6] 熊汉伟, 张培源. 空间曲杆有限元分析[J]. 重庆大学学报, 1997, **20**(4): 31~36.

Double_Moment of Spacial Curved Bars With Closed Thin_Wall Cross Section

Zhu Yuchun, Zhang Peiyuan, Yan Bo

(Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400044, P R China)

Abstract: In this paper, the double_moment of thin_wall cross section spacial curved bars of anisotropic materials is discussed, and a general solving method for this type of problems as well as the concrete double_moment formula of planary curved bars subjected to action of vertical loads are given out.

Key words: closed thin_wall cross_section; spatial curved bar; double_moment