应用数学和力学,第 20 卷 第 12 期(1999 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 12_1275_06

一个用于低周疲劳寿命预测的损伤函数*

姜风春, 刘瑞堂, 刘殿魁

(哈尔滨工程大学 702 教研室, 哈尔滨 150001)

(钱伟长推荐)

摘要: 选择循环塑性应变能作为损伤变量, 建立了它的瞬态响应数字模型, 采用损伤力学分析方法, 导出了计及循环相关的非线性疲劳损伤函数, 得到了用于低周疲劳寿命预测的数学公式• 利用该损伤函数预测的低周疲劳寿命与试验结果符合较好•

关 键 词: 循环塑性应变能; 疲劳损伤; 寿命预测
中图分类号: O346.2 文献标识码: A

引 言

近年来, 损伤力学成功地应用于疲劳过程的分析和计算之中• 采用损伤力学的分析方法研究疲劳损伤问题, 关键在于找到一个物理意义明确、易于测定的损伤变量来构造表征疲劳损伤程度的损伤函数• 单纯的以应力或应变作为损伤变量都不能揭示疲劳损伤过程的实质, 由它们构造的疲劳损伤函数也大都没有明确的物理意义, 所描述的事实也不符合实际的疲劳损伤演化进程, 所以, 预测的疲劳寿命偏差较大• 研究表明: 循环塑性变形及其累积是导致疲劳损伤的基本原因, 塑性应变能是描述疲劳损伤的一个重要参量[1]• 循环塑性应变能是疲劳过程中材料每一循环所吸收的应变能, 它综合反映了循环应力和循环应变两方面的影响, 且能很好地反映材料循环硬化或软化的瞬态响应• 因此, 用它作为损伤变量定义损伤函数不仅具有明确的物理意义, 而且能反映循环变形过程中材料的非线性效应对疲劳损伤演化规律的影响•

本文选择循环塑性应变能作为损伤变量, 考虑疲劳损伤的非线性事实, 利用循环塑性应变能瞬态响应的数学模型, 建立了计及循环相关的非线性疲劳损伤函数, 得到了低周疲劳寿命预测的理论公式, 并对该方法的有效性进行了试验验证•

1 循环塑性应变能的瞬态响应及其数学模型

低周疲劳过程中, 材料每一循环所吸收的塑性应变能 ΔW_P 等于它所对应的滞回环的面积• 对于 Masing 特性的材料[2]:

$$\Delta W_P = \frac{1-n'}{1+n'}\Delta\sigma\Delta\varepsilon_P, \tag{1}$$

式中, n' 为循环应变硬化指数, $\Delta\sigma$ 为循环应力变程, $\Delta\varepsilon_P$ 为循环塑性应变变程•

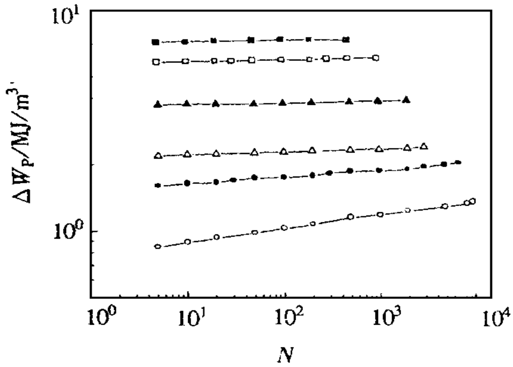
---

* 收稿日期: 1998_10_06; 修订日期: 1999_04_19
作者简介: 姜风春(1963~), 男, 山东莱州人, 讲师, 在职博士研究生.

对于非 Masing 特性的材料, Ellyin[3]利用“主骨架”模型也得出类似的计算公式•

在循环变形过程中, 具有循环稳定特征的材料其每一循环的塑性应变能变化不大, 可视为常数, 并按上述公式计算•　事实上, 由于塑性变形过程中材料非线性效应的影响, 材料具有复杂的循环硬化或循环软化现象, 其每一循环所消耗的塑性应变能并非总是常量, 而是随循环变形的进行发生变化, 即具有循环相关性, 这种现象在循环应变幅较低时尤为明显•

图 1 所示是船用 945 钢的低周疲劳试验结果•可见循环塑性应变能 ΔW_P 随循环数 N 的变化规律与循环应变幅 ε_a 大小有关•　当循环应变幅值较低时, 材料的微观塑性变形占主导地位, 而微观塑性变形主要取决于材料的显微结构, 所以塑性应变能变化较大; 反之, 当循环应变幅值较高时, 循环塑性应变能变化较小•　很多研究者都观察到了这一试验结果•　如: 童小燕[4] 和 Amzallag[5] 等•　这说明循环塑性应变能具有循环相关性, 在选择循环塑性应变能作为损伤变量时必须考虑这一特性, 即要考虑其瞬态响应•



○ ε_a = 0.3%, △ ε_a = 0.4%, □ ε_a = 0.6%,
● ε_a = 0.35%, ▲ ε_a = 0.5%, ■ ε_a = 0.7%

图 1　循环塑性应变能变化曲线

很显然, 循环塑性应变能 ΔW_P 是循环应变幅 ε_a 和循环数 N 的函数, 即

$$\Delta W_P = \omega'_P(\varepsilon_a, N) \cdot \tag{2}$$

由实验结果可以发现, 在双对数坐标中, ΔW_P 与 N 之间较好地符合线性关系, 并且直线的斜率($\Delta W_P \sim N$ 直线的斜率表示 ΔW_P 的瞬态响应速度) 与 ε_a 成反比, 即

$$\Delta W_P \propto N^{\beta'_0/\varepsilon_a} \cdot \tag{3}$$

根据 Amzallag 的分析: 循环塑性应变能与循环应变幅之间的关系可表示为

$$\Delta W_P \propto \exp(\alpha'_0, \varepsilon_a) \cdot \tag{4}$$

综合上述可得到

$$\Delta W_P = \omega'_0 \cdot \exp(\alpha'_0 \varepsilon_a) N^{\beta'_0/\varepsilon_a} \cdot \tag{5}$$

式中 ε_a 为循环应变幅, N 为循环数, α'_0、β'_0 为循环相关指数, ω'_0 为循环相关系数, MJ/m^3, 式(5) 即是本文给出的循环应变能瞬态响应的数学模型•　与已有的 Amzallag 模型相比较, 本文的模型更充分地考虑了循环塑性应变幅对循环塑性应变能及其响应速率的影响, 尤其是注意到了 $\lg \Delta W_P \sim \lg N$ 直线并不相互平行的实验事实, 而 Amzallag 模型认为 $\lg \Delta W_P \sim \lg N$ 直线是相互平行的, 这仅仅是数学处理上的需要•　为了得到式(5) 中的有关参数, 需要对其进行变换•　对式(5) 两边取对数得到

$$\lg \Delta W_P = \lg \omega'_0 + \alpha'_0 \lg e \cdot \varepsilon_a + \beta'_0 \cdot \frac{1}{\varepsilon_a} \lg N \cdot \tag{6}$$

令

$$y = \lg \Delta W_P,\quad a_0 = \lg \omega'_0,\quad a_1 = \alpha'_0 \lg e,$$

$$a_2 = \beta'_0,\quad x_1 = \varepsilon_a,\quad x_2 = \frac{1}{\varepsilon_a} \cdot \lg N,$$

则(6) 式变换为

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 . \tag{7}$$

这样，式(5)转换成了线性方程，利用实验数据可拟合得到有关的参数。

2 能量_寿命关系

材料疲劳失效时吸收的总塑性应变能称为疲劳破坏总失效吸收能，用 W_{ft} 表示。它的大小可由塑性应变能 ΔW_{P} 的变化曲线与失效寿命 N_{f} 坐标所包围的面积求得，即

$$W_{\mathrm{ft}} = \int_0^{N_{\mathrm{f}}} \mathrm{d}(\Delta W_{\mathrm{P}i}) . \tag{8}$$

在Manson_Coffin[1]关系基础上，可以建立总失效吸收能 W_{ft} 及塑性应变能 ΔW_{P} 和疲劳寿命 N_{f} 的数学表达式，分别为[6]

$$W_{\mathrm{ft}} = \omega'_{\mathrm{ft}} (N_{\mathrm{f}})^{\beta'}, \tag{9}$$

$$\Delta W_{\mathrm{P}} = \omega'_{\mathrm{f}} (N_{\mathrm{f}})^{\alpha'} . \tag{10}$$

如果不考虑循环相关性，假定每一循环的塑性应变能为常数，则有

$$W_{\mathrm{ft}} = \Delta W_{\mathrm{P}} \cdot N_{\mathrm{f}} . \tag{11}$$

由(9)、(10)、(11)式得到

$$\omega'_{\mathrm{f}} / \omega'_{\mathrm{ft}} = N_{\mathrm{f}}^{\beta' - \alpha' - 1} . \tag{12}$$

式(12)表示疲劳寿命和常数间的关系，在后面的分析中将要用到。

3 疲劳损伤函数的定义

选择循环塑性应变能 ΔW_{P} 作为损伤变量，定义某一循环变形中材料产生的损伤等于该循环的塑性应变能与该应变幅下材料的总失效吸收能之比，即

$$D_i = \Delta W_{\mathrm{P}i} / W_{\mathrm{ft}}, \tag{13}$$

式中，D_i 为第 i 个循环产生的疲劳损伤；$\Delta W_{\mathrm{P}i}$ 为第 i 个循环材料吸收的塑性应变能；W_{ft} 为某一应变幅下材料的总失效吸收能。

将(5)、(9)式代入(13)式可得

$$D_i = \omega'_0 \exp(\alpha'_0 \varepsilon_{\mathrm{a}}) N_i^{\beta'_0/\varepsilon_{\mathrm{a}}} / \omega'_{\mathrm{ft}} (N_{\mathrm{f}})^{\beta'} . \tag{14}$$

材料经 N 次循环变形后产生的损伤为每次损伤的累积，即

$$D_N = \int_0^{N} D_i \mathrm{d}N_i . \tag{15}$$

将(14)式代入(15)式得

$$D_N = \frac{\omega'_0 \exp(\alpha'_0 \varepsilon_{\mathrm{a}}) \cdot \varepsilon_a}{\omega'_{\mathrm{ft}} (N_{\mathrm{f}})^{\beta'} (\beta'_0 + \varepsilon_{\mathrm{a}})} \cdot N^{(\beta'_0 + \varepsilon_{\mathrm{a}})/\varepsilon_{\mathrm{a}}} . \tag{16}$$

令循环比 $m_{\mathrm{K}} = N/N_{\mathrm{f}}$，则(16)式变为

$$D_N = \frac{\omega'_0 \exp(\alpha'_0 \varepsilon_{\mathrm{a}}) \cdot \varepsilon_{\mathrm{a}} \cdot m_{\mathrm{K}}^{(\beta'_0 + \varepsilon_{\mathrm{a}})/\varepsilon_{\mathrm{a}}}}{\omega'_{\mathrm{ft}} (\beta'_0 + \varepsilon_{\mathrm{a}})} \cdot N_{\mathrm{f}}^{(\beta'_0 + \varepsilon_{\mathrm{a}})/\varepsilon_{\mathrm{a}} - \beta' + 1}, \tag{17}$$

式中，ω'_0、α'_0、β'_0、ω'_{ft}、β' 为材料常数，可由试验测定。(17)式即为本文得出的疲劳损伤函数 D 的数学表达式。

4 疲劳损伤函数分析

4.1 该损伤函数的初始条件与失效条件

当 $N = 0$ 时, $m_K = 0$,

$$D_0 = \lim_{m_K \to 0}(D_N) = 0;$$

当 $N = N_f$ 时, $m_K = 1$,

$$D_f = \lim_{m_K \to 1}(D_N) = \frac{\omega'_0 \exp(\alpha'_0 \varepsilon_a) \cdot \varepsilon_a}{\omega'_{ft}(\beta'_0 + \varepsilon_a)} \cdot N_f^{\beta'_0/\varepsilon_a - \beta' + 1}. \tag{18}$$

(18) 式中, D_f 是循环应变幅 ε_a 及疲劳寿命 N_f 的函数. 对于一给定的循环应变, ε_a、N_f 皆为常数, 故疲劳破坏时材料的累积损伤 D_f 也为常数, 这与损伤函数的初始条件与失效条件是相符的.

4.2 该损伤函数与经典理论的关系

作为该损伤函数的一个特殊情况, 假定每一循环的塑性应变能 ΔW_P 为常数, 则可以不考虑其循环相关性. 在(5) 式中, 令 $\beta'_0 = 0$, 则塑性应变能仅是循环应变幅的函数, 即

$$\Delta W_P = \omega'_0 \exp(\alpha'_0 \varepsilon_a), \tag{19}$$

损伤函数 D_N 的数学表达式简化为

$$D_N = \frac{\omega'_0 \exp(\alpha'_0 \varepsilon_a) \cdot m_K}{\omega'_{ft}} \cdot N_f^{1-\beta'}. \tag{20}$$

将(19) 式代入(20) 式得

$$D_N = \frac{\Delta W_P \cdot m_K}{\omega'_{ft}} \cdot N_f^{1-\beta}. \tag{21}$$

将(10)、(12) 式代入(21) 式得

$$D_N = m_K = N/N_f, \tag{22}$$

即材料在一定循环变形条件下经 N 次循环产生的损伤 D_N 等于循环比 N/N_f, 这便是经典的 Miner 线性损伤理论, 它只是本损伤函数不考虑循环相关性的一个特例.

另外, 由(14) 式可以得到

$$\frac{\partial D_i}{\partial N_i} = \frac{\omega'_0 \cdot \beta'_0 \cdot \exp(\alpha'_0 \varepsilon_a) N_i^{\beta'_0/\varepsilon_a - 1}}{\omega'_{ft}(N_f)^{\beta'} \cdot \varepsilon_a} \neq 0, \tag{23}$$

因此本文定义的损伤函数所表征的疲劳损伤是循环相关的, 每一循环产生的损伤并不是弧立的, 该损伤函数具有非线性的特点, 能够表征疲劳损伤的非线性事实.

4.3 疲劳失效准则

把疲劳损伤过程看成是不可逆的能量耗散过程, 当每一循环的塑性应变能累积达到临界值——总失效吸收能时, 材料循环塑性变形的能力耗竭, 疲劳失效发生.

此时有

$$\int_0^{N_f} \Delta W_{Pi} \mathrm{d}N = W_{ft}. \tag{24}$$

由(13)、(15)、(24) 式得,

$$D_f = 1. \tag{25}$$

将式(18) 代入(25) 式可以得到

$$N_f = \left[\frac{\omega'_{ft}(\beta'_0 + \varepsilon_a)}{\omega'_0 \exp(\alpha'_0 \varepsilon_a) \cdot \varepsilon_a}\right]^{1/(\beta'_0/\varepsilon_a - \beta' + 1)}. \tag{26}$$

(26) 式便是由疲劳损伤函数导出的低周疲劳寿命计算公式, 可见, 在其它条件一定的情况下, 材料低周疲劳寿命主要取决于施加的循环应变幅大小, 这是符合实际情况的.

5 试验结果及讨论

为了验证本计算公式的有效性，本文采用船用945钢进行了低周疲劳试验和寿命预测• 试验在MTS810机上进行• 条件为：应变控制，轴向对称循环加载，$R_\varepsilon = -1$，载荷波形为三角波，试验在室温空气介质中进行• 整个试验过程由一台Compaq386实时控制，利用编写的计算机程序测定循环塑性应变能• 关于试验细节见文献[6]•

试验测得的有关常数分别为：$\alpha'_0 = 499.4$，$\beta'_0 = 0.000\ 1$，$\beta' = 0.363\ 3$，$\omega'_0 = 0.286\ 0$ MJ/m^3，$\omega'_{ft} = 446.510$ MJ/m^3• 不同应变幅时疲劳寿命的试验结果和计算结果示于表1•

表1 疲劳寿命的试验值 N_{ft} 和计算值 N_{fc} 比较

N_f \ ε_a	0.003	0.003 5	0.004	0.005	0.006	0.007
N_{ft}	9 462	7 487	4 112	2 367	931	433
N_{fc}	7 678	5 427	3 794	1 816	856	400
相对误差	0.19	0.28	0.08	0.23	0.08	0.08

结果表明，利用(26)式计算的疲劳寿命较好地符合试验结果，这说明该方法是可行的• 比较试验值和计算值发现，疲劳寿命的计算值普遍稍低于试验值，该方法预测疲劳寿命偏于保守• 这主要是因为每一循环的塑性应变能不可能全部用来产生疲劳损伤，必然有一部分能量要以热和振动的形式耗散掉，也有一部分会被材料内部的一些不扩展裂纹及内部缺陷所吸收• 换句话说，循环塑性应变能中仅有部分能引起疲劳损伤累积，而不是全部• 所以，如何利用能产生损伤的有效应变能作为损伤变量来描述疲劳损伤演化规律及预测疲劳寿命是一个需深入研究的课题•

6 结　　论

(1) 本文选择循环塑性应变能作损伤变量，得到一个新的疲劳损伤函数：

$$D_N = \frac{\omega'_0 \cdot \exp(\alpha'_0 \varepsilon_a) \cdot \varepsilon_a \cdot m_K^{(\beta'_0 + \varepsilon_a)/\varepsilon_a}}{\omega'_{ft}(\beta'_0 + \varepsilon_a)} \cdot N_f^{\beta'_0/\varepsilon_a - \beta' + 1};$$

(2) 建立的疲劳损伤函数具有明确的物理意义，并且是非线性的，能够较好地预测材料的低周疲劳寿命•

[参 考 文 献]

[1] Sander B I. Fundemental of Cyclic Stress and Strain [M]. Wisconsin: The University of Wisconsin Press, 1972, 52~ 62.

[2] Morrow Jodean. Cyclic plastic strain energy and fatigue of material[Z]. ASTM STP 378, 1965, 45~ 87.

[3] Ellyin F. Effect of tensile_mean_strain on plastic strain energy and cyclic response[J]. J Eng Materials Tech, 1985, **107**(4): 119~ 125.

[4] 童小燕，王德俊. 碳钢和合金钢的循环滞回能实验研究[J]. 金属学报，1989，**25**(5): A359~ A363.

[5] Amzallag C, Leis B N, Rabbe P. Low cycle fatigue and life prediction[Z]. ASTM STP 770, 1980, 156 ~ 172.

[6] 姜风春，刘瑞堂. 循环滞回能的瞬态响应及数学模型[J]. 哈尔滨船舶工程学院学报，1994，**15**(2): 65~ 71.

A Damage Function Used for Prediction of Low Cyclic Fatigue Life

Jiang Fengchun, Liu Ruitang, Liu Diankui
(Harbin Engineering University, Harbin 150001, P R China)

Abstract: In this paper, the cyclic plastic strain energy is acted as damage variable and its mathematical model of transient response is established. The nonlinear fatigue damage function is given by means of the damage mechanical method. The formula used for prediction of low cyclic fatigue life is obtained from this damage function which takes into account the cyclic relativity of cyclic plastic strain energy. The low cyclic fatigue life predicted by this formula is in correspondence with the experimental result.

Key words: cyclic plastic strain energy; fatigue damage; life prediction