

文章编号: 1000_0887(1999) 12_1281_05

非线性动力系统中两鞍_结分岔点 间非稳定曲线的确定*

张家忠, 华 军, 许庆余

(西安交通大学 建筑工程与力学学院, 西安 710049)

(鲁传敬推荐)

摘要: 采用将伪弧长延拓法与 Poincaré 映射法相结合的方法, 确定非自治动力系统中两鞍_结分岔点间非稳定曲线, 并对采用一般延拓法时出现的奇异性进行了证明。该方法引入了一正则化方程, 避免了在求解过程中出现的奇异问题, 并给出了相应的迭代格式。在曲线的延拓过程中, 由于存在两个延拓方向, 为保证将曲线延拓出来, 给出了一种确定切线方向的方法, 该方法在分析非线性振动系统中的双稳态现象等问题是很有效的。

关键词: 非线性动力系统; 分岔; 稳定性

中图分类号: TB123; O322 文献标识码: A

引 言

鞍_结分岔在具有周期激振的非线性耗散动力系统中是经常发生的, 并且它的发生将对系统的动力特性产生大的影响, 对于一个实际的动力系统, 其将表现为突跳^[1]。如果滞后和突跳同时存在一动力系统中, 则系统将表现出非线性动力系统中的双稳态现象, 由于这类现象对系统的危害性很大, 因此很有必要对其进行机理方面的研究^[2]。

对于具有滞后特性的非线性动力系统中的两鞍_结分岔点, 其间有一光滑曲线, 但由于其不稳定^[3], 采用直接积分法将不能确定出该曲线, 而采用一般的延拓法, 在分岔点处, 其相应的 Jacobi 矩阵发生奇异。

已有部分文献对于伪弧长延拓法进行了研究及应用, 其中文献[4]仅给出了伪弧长延拓法在具有稳态响应的非线性转子动力系统中的应用。

因此, 需要对一般的延拓法进行改进, 下面将采用伪弧长延拓法与 Poincaré 映射相结合的方法, 用以确定具有周期激振的非自治动力系统中的这类曲线。

1 延拓方法的基本形式

对于单参数有限维问题:

* 收稿日期: 1998_09_14; 修订日期: 1999_04_13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(95335100)

作者简介: 张家忠(1968~), 男, 讲师, 博士, 研究方向为非线性振动系统中的运动稳定性、分岔、混沌。

$$F(x) = 0, \quad x = (u, \lambda) \in R^n \times R,$$

其中, $F: R^{n+1} \rightarrow R^n$ 充分光滑.

假设存在一点 $x_0 \in R^{n+1}$, 满足

$$F(x_0) = 0, \text{ Rank } D_u F(x_0) = n, \tag{1}$$

则由隐函数定理知: 存在开区间 J 和唯一光滑曲线 $x(\gamma) \in R^{n+1}, \gamma \in J$ 且满足:

$$F(x(\gamma)) = 0, \text{ Rank } D_u F(x_0) = n, x'(\gamma) \neq 0, \tag{2}$$

并且 $x(0) = x_0,$

其中 $x'(\gamma) = dx(\gamma)/d\gamma.$

如果已知一点 $x_0 = (u_0, \lambda_0)$, 则采用 Newton 等方法, 通过下列迭代:

$$u^{k+1} = u^k - D_u F(u^k, \lambda_k)^{-1} F(u^k, \lambda_k), \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \tag{3}$$

其中 $\lambda_k = \lambda_0 + \delta, \delta$ 为选定的步长.

可以确定出曲线上的下一个点 $x_1 = (u_1, \lambda_1).$ 重复上述过程, 就可得到曲线 $x(\gamma).$

但是上述方法不适合如图 1 所示的情况, 因为此时方程有一简单极限点 x^* , 在 x^* 处 $D_u F(x^*)$ 奇异.

解决这个问题的一个简便有效的方法是: 选取弧长 s 为参数 γ , 即所求曲线为 $x(s)$, 并引入一正则化方程:

$$N(u, \lambda, s) = 0, \quad N: R^{n+2} \rightarrow R,$$

使得联立方程:

$$P(x, s) = \begin{cases} F(x) \\ N(x, s) \end{cases} = 0 \tag{4}$$

在简单极限点 x^* 处, 其 Jacobi 矩阵是非奇异的, 正则化方程可选取下列形式:

$$N = \dot{x}(s_i)^T (x(s) - x(s_i)) - (s - s_i) \tag{5}$$

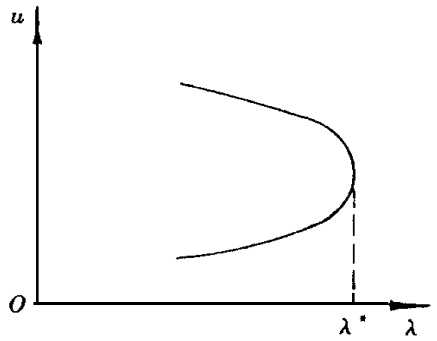


图 1 具有极限点的曲线

2 Poincaré 映射与伪弧长延拓法相结合

确定周期解的稳定性, 就是确定 Poincaré 截面上不动点的稳定性, 即求解下列问题:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, t, g(v)), \\ r(v, \lambda) = u(0, v, \lambda) - u(T, v, \lambda) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

其中 v 为 Poincaré 截面上的不动点坐标, T 为外激振周期, λ 为系统分岔参数, $g(v)$ 为方程中与 v 有关的部分.

进而确定所求得的不动点 v^* 处的稳定性, 即 $[\partial u(T, v, \lambda)/\partial v^*]$ 的特征根.

对于稳定的周期解, 可以采用 Poincaré 映射法与一般延拓法相结合的方法, 确定出系统的响应图(Poincaré 截面上). 若系统具有鞍_结分岔特性(如图 1 所示), 则一般延拓方法不再适用. 即对于一具有周期性的非自治动力系统, 如果在某一参数 λ_0 处发生鞍_结分岔, 则采用式(6)构造的一般延拓方法, 在参数 λ_0 处, $D_v r(v, \lambda_0)$ 将发生奇异. 下面将给出这一结论的证明.

引理 1 每个复数矩阵 $[A]_{n \times n}$ 都与一个约当型矩阵 $[J]$ 相似:

$$[P]^{-1}[A][P] = [J],$$

并且除去约当块的排列次序外, 约当型矩阵 $[J]$ 是被矩阵 $[A]$ 唯一确定的, 其中矩阵 $[J]$ 的主

对角线上的元素全为 $[A]$ 的特征值·

下面给出前面结论的证明·

证明 因

$$D_v r(v, \lambda_0) = [I] - \left[\frac{\partial u(T, v, \lambda_0)}{\partial v} \right] \quad (7)$$

(对于式(6), 假设系统在 λ_0 处发生鞍_结分岔),

在此 $[A]_{n \times n} \triangleq \left[\frac{\partial u(T, v, \lambda_0)}{\partial v} \right]_{n \times n}$ ·

令 $\beta_i, i = 1, \dots, n, \beta_i \in \mathbf{C}$ 为矩阵 $[A]$ 的所有特征根·

若系统在 λ_0 处发生鞍_结分岔, 则矩阵 $[A]$ 一定有一特征根其值为+1(非重根), 不妨设 $\beta_1 = +1$ · 根据引理1, 则一定存在非奇异矩阵 $[P]$, 使得

$$[P]^{-1}[A][P] = [J], \quad \text{其中}[J] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_n \end{bmatrix},$$

所以对于式(7):

$$D_v r(v, \lambda_0) = [P][[I] - [J]][P]^{-1},$$

则矩阵 $[[I] - [J]]$ 奇异, 从而 $D_v r[v, \lambda_0]$ 奇异, 因此, 基于一般延拓法的迭代格式就不再适用·

对于这种情况, 必须构造新的迭代格式, 即引入一正则化方程

$$N(v, \lambda, s) = 0, \quad N: R^{n+2} \rightarrow R,$$

使得联立方程

$$P(v, \lambda, s) = \begin{cases} r(v, \lambda) \\ N(v, \lambda, s) \end{cases} = 0$$

在迭代求解过程中不发生奇异·

采用的Newton迭代格式:

$$\begin{bmatrix} D_v r^i & D_\lambda r^i \\ v^T & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v^i \\ \Delta \lambda^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r^i \\ N^i \end{Bmatrix},$$

其中 $D_v r = \left[\frac{\partial u(0, v, \lambda)}{\partial v} \right] - \left[\frac{\partial u(T, v, \lambda)}{\partial v} \right] - f(u, T, g(v)) \frac{\partial T}{\partial v}$ ·

由于 $\left[\frac{\partial u(0, v, \lambda)}{\partial v} \right] = [I], \left\{ \frac{\partial T}{\partial v} \right\}^T = \{0\}^T$,

故 $D_v r = [I] - \left[\frac{\partial u(T, v, \lambda)}{\partial v} \right]$ ·

而 $\left[\frac{\partial u(T, v, \lambda)}{\partial v} \right]$ 的求解, 则由下列初值问题确定:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial u}{\partial v} \right]' = \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right] \left[\frac{\partial u}{\partial v} \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial g} \right] \left[\frac{\partial g}{\partial v} \right], \\ \left[\frac{\partial u}{\partial v} \right] \Big|_{t=0} = \left[\frac{\partial u(0, v)}{\partial v} \right]. \end{cases}$$

而 $D_\lambda r$ 的求解, 可采用下列方法确定:

$$D_\lambda r = \left\{ \frac{\partial u(0, v, \lambda)}{\partial \lambda} \right\} - \left\{ \frac{\partial u(T, v, \lambda)}{\partial \lambda} \right\} = - \left\{ \frac{\partial u(T, v, \lambda)}{\partial \lambda} \right\},$$

其中 $\left\{ \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{T}, \mathbf{v}, \lambda)}{\partial \lambda} \right\}$ 通过求解下列初值问题确定：

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda} \right\}' = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right] \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda} \right\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right\}, \\ \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda} \right\} \Big|_{t=0} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}(0, \mathbf{v}, \lambda)}{\partial \lambda} \right\} = \{ \mathbf{0} \}. \end{cases}$$

下面讨论确定 $\dot{\mathbf{v}}^T$ 、 λ 的方法, 它们是关键参数, 决定着延拓的方向, 可以通过求解下列方程得到：

$$\begin{cases} D_M^i \lambda(s_i) + D_{v^T}^i \dot{\mathbf{v}}(s_i) = 0, \\ D_M^i \lambda(s_i) + D_v^i \dot{\mathbf{v}}(s_i) = -D_s^i \mathbf{N}^i. \end{cases} \quad (8)$$

对于上述方程, $-\lambda - \dot{\mathbf{v}}^T$ 也是方程的解, 切线方向的不确定, 很难将曲线延拓出来。因此, 采用下面方法确定切线方向: 先选取初始点的切线方向 $\lambda, \dot{\mathbf{v}}^T$ 的符号, 初始点以后的各点, 按下列规则选取相应的 $\lambda, \dot{\mathbf{v}}^T$ 的符号：

$$(\dot{\mathbf{v}}_i^T, \lambda)(\dot{\mathbf{v}}_{i-1}, \lambda_{-1}) > 0.$$

对于本文选用的正则化方程, 方程(8)可化为:

$$\begin{cases} D_M^i \lambda(s_i) + D_{v^T}^i \dot{\mathbf{v}}(s_i) = 0, \\ \|\lambda(s_i)\|^2 + \|\dot{\mathbf{v}}(s_i)\|^2 = 1. \end{cases} \quad (9)$$

以上是单位切向量 $(\dot{\mathbf{v}}, \lambda)$ 必须满足的方程, 下面分两种情况讨论其求解方法：

(i) D_{v^T} 非奇异情况

此时有

$$\begin{cases} D_M^i \cdot \lambda_i = -D_{v^T}^i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i, \\ \|\lambda_i\|^2 + \|\dot{\mathbf{v}}_i\|^2 = 1. \end{cases} \quad (10)$$

令 $D_{v^T}^i \cdot \mathbf{b} = -D_M^i$ (对于本文的单参数动力系统),

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \alpha \mathbf{b}, \quad \lambda_i = \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

$$\alpha^2 + \alpha^2 \|\mathbf{b}\|^2 = 1,$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \|\mathbf{b}\|^2}}.$$

根据前面的规定, 采用下列式子确定 α 的符号：

$$(\alpha \mathbf{b}^T, \alpha)(\dot{\mathbf{v}}_{i-1}, \lambda_{-1}) = \alpha(\mathbf{b}^T \cdot \dot{\mathbf{v}}_{i-1} + \lambda_{-1}) > 0.$$

(ii) D_{v^T} 奇异情况

此时有 $\lambda_i = 0$, $\dot{\mathbf{v}}_i$ 应取成 $D_{v^T}^i$ 的零空间, 不妨设: $\dot{\mathbf{v}}_i = \alpha \mathbf{b}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ (要求 \mathbf{b} 不为零向量, 对于本文所研究的单参数动力系统, $D_{v^T}^i$ 在鞍_结分岔点处有非重的零根, 即 $D_{v^T}^i$ 的秩为 $n-1$, 这一要求是很容易满足的), 并满足 $\alpha^2 \|\mathbf{b}\|^2 = 1$ 。

则 $\alpha = \pm 1/\|\mathbf{b}\|$ 。

α 符号的确定：

$$(\alpha \mathbf{b}^T, 0)(\dot{\mathbf{v}}_{i-1}, \lambda_{-1}) = \alpha \mathbf{b}^T \cdot \dot{\mathbf{v}}_{i-1} > 0.$$

这样, 就可以确定出具有鞍_结分岔且不稳定

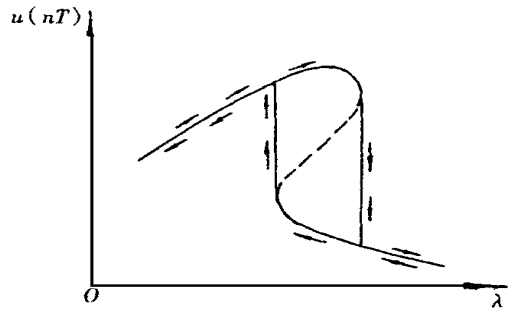


图 2 具有两鞍_结分岔点的响应曲线

的解曲线, 即图 2 中两鞍_结分岔点间的非稳定曲线。

[参 考 文 献]

- [1] Soliman M S. Jump to resonance: long chaotic transients, unpredictable outcome, and the probability of restabilization[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1993, **60**(3): 669~ 676.
- [2] Soliman M S. Jump phenomena resulting in unpredictable dynamics in the driven damped pendulum [J]. Internat J Non_Linear Mechanics, 1996, **31**(1): 167~ 174.
- [3] Parker T S, Chua L O. Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems [M]. New York: Springer_Verlag, 1992.
- [4] Sundararajan P, Noach S T. Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/ arc_length continuation method_application to rotor systems[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1997, **119**(1): 9~ 20.

A Method of Following the Unstable Path Between Two Saddle_Node Bifurcation Points in Nonlinear Dynamic System

Zhang Jiazhong, Hua Jun, Xu Qingyu

(School of Architecture Engineering and Mechanics,
Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P R China)

Abstract: A computation algorithm based on the Poincaré Mapping in combination with Pseudo_Arc Length Continuation Method is presented for calculating the unstable response with saddle_node bifurcation, and the singularity, which occurs using the general continuation method combined with Poincaré Mapping to follow the path, is also proved.

A normalization equation can be introduced to avoid the singularity in the process of iteration, and a new iteration algorithm will be presented too. There will be two directions in which the path can be continued at each point, but only one can be used, the method of determining the direction will be presented in the paper. It can be concluded that this method is effective in analysis of nonlinear dynamic system with saddle_node bifurcations.

Key words: nonlinear dynamic system; bifurcation; stability