文章编号: 1000_0887(1999) 12_1291_10

具有三个转向点方程渐近解的完全表达式*

张居铃 朱文莉

(四川轻化工学院 基础部, 四川 自贡 643003)

(林宗池推荐)

摘要: 本文研究二阶线性常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+[\lambda^2q_1(x)+\lambda q_2(x,\lambda)]y=0,$$

其中 $q_1(x)=(x-\mu_1)(x-\mu_2)(x-\mu_3)f(x),\quad f(x)\neq 0,\ \mu_1<\mu_2<\mu_3,$
λ 为大参数, 即具有三个转向点的方程· 而

$$q_2(x,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}g_i(x)\lambda^{-i}\quad(\text{此时 } g_0(x)\neq 0)\cdot$$

本文使用 JL 函数得到方程在转向点附近形式一致有效渐近解的完全表达式·

关 键 词: JL 函数; 转向点; 渐近解
中图分类号: O29 文献标识码: A

引 言

在文[1]中我们已介绍了具有几个转向点的概念, 指的是二阶线性常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+[\lambda^2q_1(x)+q_2(x)]y=0,$$

其中 $q_1(x)=(x-\mu_1)(x-\mu_2)\cdots(x-\mu_n)f(x), f(x)\neq 0$, λ 为大参数· 在文[1]中我们只得到解的渐近展开的第一项, 关于高次近似, 难度较大·

对于一个高阶转向点的高次近似问题, 文[2]进行了讨论, 用的是广义 Airy 函数; 对于两个一阶转向点的高次近似问题 Moriguchi(1959)[3], Lynn 和 Keller(1970)[4] 进行过讨论, 用的是 Weber 函数; 本文讨论三个一阶转向点的高次近似问题, 用的是 JL 函数, 我们得到了具有三个转向点方程形式一致有效渐近解的完全表达式·

1 JL 函数

1.1 定义整变量 n 的非零函数 $\omega(n)$, $(n\geqslant 6)$, 其中

$$\omega(6)=5\cdot 6$$
$$\omega(7)=1\cdot 2\cdot 6\cdot 7,$$
$$\omega(8)=2\cdot 3\cdot 7\cdot 8,$$
$$\omega(9)=3\cdot 4\cdot 8\cdot 9,$$

* 收稿日期: 1997_06_20; 修订日期: 1999_04_28
作者简介: 张居铃(1933~), 男, 四川自贡人, 教授.

$$\omega(10)=4\cdot5\cdot9\cdot10.$$

一般情况, $n\geqslant 11$ 时, $\omega(n)=n(n-1)\omega(n-5)$, 显然, $n\geqslant 6$ 时, $\omega(n)/\omega(n+1)<1$.

引理 1 $n\geqslant 6$ 时, 不等式 $\omega(n)/\omega(n+1)+\omega(n)/\omega(n+2)<1$ 成立.

证 n 依次使 $n-1\equiv 5(\mathrm{mod}\ 5)$ 时

$$\frac{\omega(n)}{\omega(n+1)}+\frac{\omega(n)}{\omega(n+2)}\leqslant\frac{\omega(6)}{\omega(7)}+\frac{\omega(6)}{\omega(8)}=\frac{5\cdot6}{1\cdot2\cdot6\cdot7}+\frac{5\cdot6}{2\cdot3\cdot7\cdot8}=\frac{5}{2\cdot7}+\frac{5}{7\cdot8}<1;$$

$n-1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$ 时,

$$\frac{\omega(n)}{\omega(n+1)}+\frac{\omega(n)}{\omega(n+2)}\leqslant\frac{\omega(7)}{\omega(8)}+\frac{\omega(7)}{\omega(9)}=\frac{1\cdot2\cdot6\cdot7}{2\cdot3\cdot7\cdot8}+\frac{1\cdot2\cdot6\cdot7}{3\cdot4\cdot8\cdot9}=\frac{1}{4}+\frac{7}{8\cdot9}<1;$$

$n-1\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 5)$ 时,

$$\frac{\omega(n)}{\omega(n+1)}+\frac{\omega(n)}{\omega(n+2)}\leqslant\frac{\omega(8)}{\omega(9)}+\frac{\omega(8)}{\omega(10)}=\frac{2\cdot3\cdot7\cdot8}{3\cdot4\cdot8\cdot9}+\frac{2\cdot3\cdot7\cdot8}{4\cdot5\cdot9\cdot10}=\frac{7}{2\cdot9}+\frac{2\cdot3\cdot7}{5\cdot5\cdot9}<1;$$

$n-1\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 5)$ 时,

$$\frac{\omega(n)}{\omega(n+1)}+\frac{\omega(n)}{\omega(n+2)}\leqslant\frac{\omega(9)}{\omega(10)}+\frac{\omega(9)}{\omega(11)}=\frac{3\cdot4\cdot8\cdot9}{4\cdot5\cdot9\cdot10}+\frac{3\cdot4\cdot8\cdot9}{5\cdot6\cdot10\cdot11}=\frac{3\cdot4}{5\cdot5}+\frac{8\cdot9}{5\cdot5\cdot11}<1;$$

$n-1\equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 5)$ 时,

$$\frac{\omega(n)}{\omega(n+1)}+\frac{\omega(n)}{\omega(n+2)}\leqslant\frac{\omega(10)}{\omega(11)}+\frac{\omega(10)}{\omega(12)}=\frac{4\cdot5\cdot9\cdot10}{5\cdot6\cdot10\cdot11}+\frac{4\cdot5\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot6\cdot7\cdot11\cdot12}=\frac{2\cdot3}{11}+\frac{5\cdot5}{7\cdot11\cdot2}<1.$$

1.2 JL 方程

考虑

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=hx(x+1)(x-b)y,\tag{1}$$

其中 b 为实数, h 为参数 $|h|\geqslant 1$, 我们叫 JL 方程, 即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=h[x^3+(1-b)x^2-bx]y.$$

设解 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, $c_n(n=0,1,2,3,\cdots)$ 待定. 则

$$\sum_{n=2}^{\infty}c_nn(n-1)x^{n-2}=h\Big[\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+3}+\sum_{n=0}^{\infty}(1-b)c_nx^{n+2}-b\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}\Big],$$

即

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_{m+2}(m+2)(m+1)x^m=h\Big[\sum_{m=3}^{\infty}c_{m-3}x^m+\sum_{m=2}^{\infty}(1-b)c_{m-2}x^m-b\sum_{m=1}^{\infty}c_{m-1}x^m\Big].$$

比较系数得 $2\cdot1c_2=0$, $c_2=0$(我们取 $c_0=1$, $|c_1|=1$, 而先取 $c_1=1$). 由于

$$3\cdot2c_3=-hbc_0,\quad c_3=\frac{-hb}{3\cdot2},$$

$$4\cdot3c_4=h[(1-b)c_0-bc_1],\quad c_4=h\frac{1-2b}{4\cdot3},$$

$$5\cdot4c_5=h[c_0+(1-b)c_1-bc_2],\quad c_5=h\frac{2-b}{5\cdot4},$$

$$6\cdot5c_6=h[c_1+(1-b)c_2-bc_3],\quad c_6=h\frac{1+b^2h/3\cdot2}{6\cdot5},$$

一般 c_n 用递推公式

$$n(n-1)c_n=h[c_{n-5}+(1-b)c_{n-4}-bc_{n-3}],$$

得知

$$c_n = h\frac{c_{n-5}+(1-b)c_{n-4}-bc_{n-3}}{n(n-1)}.$$

取 $B = \max(2+|b|, 1+2|b|)$, 则 $2<B$, $|b|<B$,

$$|c_3|\leqslant\frac{|h|B}{3\cdot 2},\quad |c_4|\leqslant\frac{|h|B}{4\cdot 3},\quad |c_5|\leqslant\frac{|h|B}{5\cdot 4},$$

$$|c_6|\leqslant|h|^2\frac{B^2/4+B^2/3\cdot 2}{6\cdot 5}\leqslant|h|^2\frac{B^2}{6\cdot 5},$$

$$|c_7|\leqslant|h|\frac{|c_2|+(1+|b|)|c_3|+|b||c_4|}{7.6}\leqslant$$

$$|h|B\frac{|h|B/3\cdot 2+|h|B/4\cdot 3}{7\cdot 6}=$$

$$|h|^2B^2\frac{2\cdot 1/3\cdot 2+2\cdot 1/4\cdot 3}{7\cdot 6\cdot 2\cdot 1}\leqslant|h|^2B^2\frac{1}{7\cdot 6\cdot 2\cdot 1},$$

$$|c_8|\leqslant|h|\frac{|c_3|+B|c_4|+B|c_5|}{8\cdot 7}\leqslant|h|^2B^2\frac{1/3\cdot 2+1/4\cdot 3+1/5\cdot 4}{8\cdot 7}\leqslant$$

$$|h|^2B^2\frac{1+3\cdot 2/4\cdot 3+3\cdot 2/5\cdot 4}{8\cdot 7\cdot 3\cdot 2}\leqslant|h|^2B^2\frac{2}{8\cdot 7\cdot 3\cdot 2},$$

$$|c_9|\leqslant|h|\frac{|c_4|+B|c_5|+B|c_6|}{9\cdot 8}\leqslant|h|^3B^3\frac{1+4\cdot 3/5\cdot 4+4\cdot 3/6\cdot 5}{9\cdot 8\cdot 4\cdot 3}\leqslant$$

$$|h|^3B^3\frac{2}{9\cdot 8\cdot 4\cdot 3},$$

$$|c_{10}|\leqslant|h|\frac{|c_5|+B|c_6|+B|c_7|}{10\cdot 9}\leqslant$$

$$|h|^3B^3\frac{1+5\cdot 4/6\cdot 5+5\cdot 4/7\cdot 6\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 5\cdot 4}\leqslant|h|^3B^3\frac{2}{10\cdot 9\cdot 5\cdot 4},$$

$$|c_{11}|=|h|\frac{|c_6|+B|c_7|+B|c_8|}{11\cdot 10}\leqslant$$

$$|h|^3B^3\cdot 2\cdot\frac{1+6\cdot 5/7\cdot 6\cdot 2\cdot 1+6\cdot 5/8\cdot 7\cdot 3\cdot 2}{11\cdot 10\cdot 6\cdot 5}\leqslant\frac{|h|^3B^3\cdot 2^2}{11\cdot 10\cdot 6\cdot 5}.$$

引理2　$n\geqslant 6$ 时, 不等式

$$|c_n|\leqslant|h|^{[n/3]}B^{[n/3]}2^{[(n-5)/3]}/\omega(n)$$

成立, 其中 $[n/3]$ 表示 $n/3$ 的整数部份.

证明　用数学归纳法. 已知 $6\leqslant n\leqslant 11$ 时不等式成立. 假设 $n<k$ 时 $(k\geqslant 12)$ 不等式成立, 去证 $n=k$ 时不等式成立.

由于

$$|c_k|\leqslant|h|B\frac{|c_{k-5}|+|c_{k-4}|+|c_{k-3}|}{k(k-1)}\leqslant$$

$$|h|B\left\{\frac{|h|^{[(k-5)/3]}B^{[(k-5)/3]}2^{[(k-10)/3]}}{\omega(k-5)}+\frac{|h|^{[(k-4)/3]}B^{[(k-4)/3]}2^{[(k-9)/3]}}{\omega(k-4)}+\right.$$

$$\left.\frac{|h|^{[(k-3)/3]}B^{[(k-3)/3]}2^{[(k-8)/3]}}{\omega(k-3)}\right\}\Big\backslash k(k-1)\leqslant$$

$$|h|B\frac{|h|^{[(k-3)/3]}B^{[(k-3)/3]}2^{[(k-8)/3]}\left(1+\dfrac{\omega(k-5)}{\omega(k-4)}+\dfrac{\omega(k-5)}{\omega(k-3)}\right)}{k(k-1)\,\omega(k-5)},$$

应用引理1,

$$|c_k|\leqslant\frac{|h|^{[k/3]}B^{[k/3]}2^{[(k-8)/3]}\cdot 2}{\omega(k)}=\frac{|h|^{[k/3]}B^{[k/3]}2^{[(k-5)/3]}}{\omega(k)}.$$

证毕•

引理 3　幂级数

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{|h|^{[n/3]} B^{[n/3]} 2^{[(n-5)/3]}}{\omega(n)} x^n$$

处处绝对收敛•

证　分别令 $n = 5i + r(r = 0, 1, 2, 3, 4)$, 对固定的 r, 考虑绝对值级数

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(|h|B)^{[(5i+r)/3]} 2^{[(5i+r-5)/3]}}{\omega(5i+r)} |x|^{5i+r},$$

其后项与前项之比

$$\frac{u_{i+1}}{u_i} = \frac{\omega(5i+r)}{\omega(5i+r+5)} (B|h|)^{[(5i+r+5)/3]-[(5i+r)/3]} 2^{[(5i+r)/3]-[(5i+r-5)/3]} |x|^5 \leqslant$$

$$\frac{1}{(5i+r+5)(5i+r+4)} (B|h|)^{[(5i+r)/3+2]-[(5i+r)/3]} 2^{[(5i+r-5)/3+2]-[(5i+r-5)/3]} |x|^5 =$$

$$\frac{1}{(5i+r+5)(5i+r+4)} (B|h|)^2 2^2 |x|^5 \xrightarrow[i\to\infty]{} 0•$$

应用引理 2、3 得知原幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 表示 x 的一整函数, 记为 $L(b, h, x)$, 称为第二类 JL 函数

$$L(b, h, x) = 1 + x - \frac{hb}{3\cdot 2}x^3 + \frac{h(1-2b)}{4\cdot 3}x^4 + \frac{h(2-b)}{5\cdot 4}x^5 + \frac{h(1+b^2h/3\cdot 2)}{6\cdot 5}x^6 + \cdots;$$

另取 $c_1 = -1$ 有类似的结果又得一整函数 $J(b, h, x)$, 称为第一类 JL 函数

$$J(b, h, x) = 1 - x - \frac{hb}{3\cdot 2}x^3 + \frac{h}{4\cdot 3}x^4 + \frac{hb}{5\cdot 4}x^5 + \frac{h(-1+b^2h/3\cdot 2)}{6\cdot 5}x^6 + \cdots•$$

$J(1, 1, x), L(1, 1, x); J(1, -1, x), L(1, -1, x)$ 的函数图形见图 1、图 2, 故 JL 方程的通解为

$$y = k_1 J(b, h, x) + k_2 L(b, h, x),$$

其中 k_1、k_2 为任意常数•

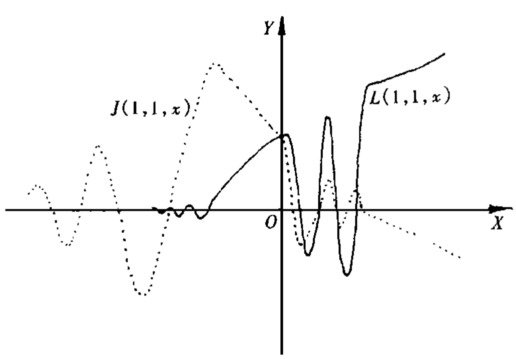

图　1

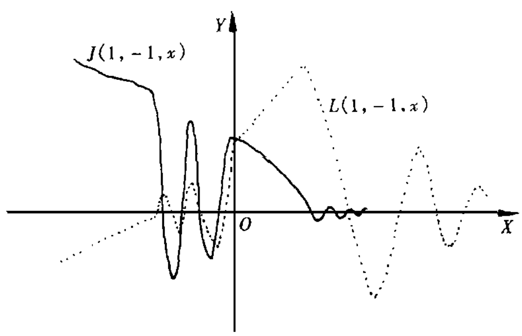

图　2

2　Langer 变换

考虑

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [\lambda^2 q_1(x) + \lambda q_2(x, \lambda)]y = 0, \tag{2}$$

其中 $q_1(x) = (x - \mu_1)(x - \mu_2)(x - \mu_3)f(x), f(x) \neq 0$• 设 X 为包括 μ_1、μ_2、μ_3 的一个开区间, $f(x)$ 在 X 内为 x 的解析函数, $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, 假设 $q_2(x, \lambda)$ 在 X 内对 x 为解析的,

$$q_2(x,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}g_i(x)\lambda^i\qquad(\text{此时 } g_0(x)\neq 0),$$

$g_i(x)$ 在 X 均为x 的解析函数•

下面进行 Langer 变换, 即令 $z=\phi(x)$(设 $\phi(x)$ 为单调增函数, 且 $\phi'(x)>0$, $\phi(\mu_2)=0$),

$$v=\psi(x)y(x)\qquad(\psi(x)=\sqrt{\phi'(x)}),$$

则(2) 变成

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}+\left[\lambda^2\frac{q_1}{\phi'^2}+\frac{\lambda q_2(x,\lambda)}{\phi'^2}+\frac{3}{4}\frac{\phi''^2}{\phi'^4}-\frac{1}{2}\frac{\phi'''}{\phi'^3}\right]v=0•$$

记 $$p(z,\lambda)=\frac{q_2}{\phi'^2}+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{3}{4}\frac{\phi''^2}{\phi'^4}-\frac{1}{2}\frac{\phi'''}{\phi'^3}\right),$$

若 $z=\phi(x)$ 为解析时, 则 $p(z,\lambda)$ 对 z 解析• 则(2) 变成

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\left[\lambda^2\frac{q_1}{\phi'^2}+\lambda p(z,\lambda)\right]v=0•$$

我们取 $z=-1,0$ 对应于 $x=\mu_1,\mu_2$, 再去选择 $z=b>0$, 对应 $x=\mu_3$•

(i) $f(x)>0$ 时

使 $$a\int_0^z\sqrt{(\tau+1)\tau(\tau-b)}\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mu_2}^x\sqrt{q_1(\tau)}\,\mathrm{d}\tau,$$

其中待定常数 $a>0$• 这里选择的平方根分枝使 z 为x 的解析函数, 而区域

$$(x-\mu_1)(x-\mu_2)(x-\mu_3)>0 \text{ 和 } (x-\mu_1)(x-\mu_2)(x-\mu_3)<0$$

分别变换成

$$(z+1)z(z-b)>0 \text{ 和 } (z+1)z(z-b)<0,$$

即 $$\mu_1<x<\mu_2,\ x>\mu_3\quad\text{变成}\quad -1<z<0,\ z>b;$$

$$x<\mu_1,\ \mu_2<x<\mu_3\quad\text{变成}\quad z<-1,\ 0<z<b•$$

由于 $(x-\mu_1)(x-\mu_2)(x-\mu_3)$ 与$(z+1)z(z-b)$ 保持同号,

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{(x-\mu_1)(x-\mu_2)(x-\mu_3)}{(z+1)z(z-b)}f(x)}>0,$$

故知 $z=\phi(x)$ 为单调增函数• 下面确定 a, b 如下:

使 $$a\int_0^{-1}\sqrt{(\tau+1)\tau(\tau-b)}\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mu_2}^{\mu_1}\sqrt{q_1(\tau)}\,\mathrm{d}\tau,$$

即 $$a\int_{-1}^0\sqrt{(\tau+1)\tau(\tau-b)}\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mu_1}^{\mu_2}\sqrt{q_1(\tau)}\,\mathrm{d}\tau;$$

又使 $$a\int_0^b\sqrt{(\tau+1)\tau(\tau-b)}\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mu_2}^{\mu_3}\sqrt{q_1(\tau)}\,\mathrm{d}\tau;$$

消去 a 得

$$\left[\int_{\mu_2}^{\mu_3}\sqrt{q_1(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]\left[\int_{-1}^0\sqrt{(\tau+1)\tau(\tau-b)}\,\mathrm{d}\tau\right]=$$
$$\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\sqrt{q_1(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]\left[\int_0^b\sqrt{(\tau+1)\tau(\tau-b)}\,\mathrm{d}\tau\right],$$

知

$$\left[\int_{\mu_2}^{\mu_3}\sqrt{-q_1(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]\left[\int_{-1}^0\sqrt{(\tau+1)\tau(\tau-b)}\,\mathrm{d}\tau\right]=$$

$$\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\sqrt{q_1(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]\left[\int_0^b\sqrt{-(\tau+1)\tau(\tau-b)}\,\mathrm{d}\tau\right].$$

记 $\alpha=\int_{\mu_1}^{\mu_2}\sqrt{q_1(\tau)}\,\mathrm{d}\tau>0,\quad \beta=\int_{\mu_2}^{\mu_3}\sqrt{-q_1(\tau)}\,\mathrm{d}\tau>0.$

令 $F(b)=\alpha\int_0^b\sqrt{\tau(\tau+1)(b-\tau)}\,\mathrm{d}\tau-\beta\int_{-1}^0\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}\,\mathrm{d}\tau.$

引理 4 存在 $b=b^*>0$ 使 $F(b^*)=0.$

证

1° $\alpha=\beta$ 时, 显然

$$b^*=1,$$

且
$$F(1)=\alpha\left(\int_0^1\sqrt{\tau(\tau+1)(1-\tau)}\,\mathrm{d}\tau-\int_1^0\sqrt{t(1-t)(t+1)}(-\mathrm{d}t)\right)=0.$$

2° $\alpha>\beta$ 时

$$F(0)=-\beta\int_{-1}^0\sqrt{(\tau+1)\tau^2}\,\mathrm{d}\tau<0,$$

$$F(1)=\alpha\int_0^1\sqrt{\tau(\tau+1)(1-\tau)}\,\mathrm{d}\tau-\beta\int_0^1\sqrt{\tau(\tau+1)(1-\tau)}\,\mathrm{d}\tau=$$
$$(\alpha-\beta)\int_0^1\sqrt{\tau(\tau+1)(1-\tau)}\,\mathrm{d}\tau>0,$$

根据方程式根的存在定理, 知有 b^*, $0<b^*<1$ 使 $F(b^*)=0.$

3° $\alpha<\beta$ 时

$$F(1)<0,$$

$$F(b)=\alpha\int_0^b\sqrt{\tau(\tau+1)(b-\tau)}\,\mathrm{d}\tau-\beta\int_0^1\sqrt{\tau(1-\tau)(\tau+b)}\,\mathrm{d}\tau>$$
$$\alpha\int_0^b\tau\sqrt{b-\tau}\,\mathrm{d}\tau-\beta\int_0^1\sqrt{1+b}\,\mathrm{d}\tau=$$
$$\alpha\frac{4}{15}b^{5/2}-\beta(1+b)^{1/2}=b^{1/2}\left[\frac{4}{15}\alpha b^2-\beta\left(\frac{1+b}{b}\right)^{1/2}\right],$$
$$F(+\infty)=+\infty,\ (b>1).$$

根据方程式根的存在定理, 知有 b^*, $b^*>1$, 使 $F(b^*)=0$, 证毕.

取 b 为方程 $F(b)=0$ 之正根后, 确定

$$a=\frac{\int_{\mu_1}^{\mu_2}\sqrt{q_1(\tau)}\,\mathrm{d}\tau}{\int_{-1}^0\sqrt{(\tau+1)\tau(\tau-b)}\,\mathrm{d}\tau},$$

故(2)变成

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}+[a^2\lambda^2(z+1)z(z-b)+\lambda p(z,\lambda)]v=0.$$

令 $a\lambda=\mu$, 此式改写成

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}+[\mu^2(z+1)z(z-b)+\mu Q(z,\mu)]v=0. \tag{3}$$

(ii) $f(x)<0$ 时

使 $a\int_0^z\sqrt{(\tau+1)\tau(\tau-b)}\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mu_2}^x\sqrt{-q_1(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\qquad(a>0).$

同理可知(2)变成

$$\frac{d^2v}{dz^2}+[-a^2\lambda^2(z+1)z(z-b)+\lambda p(z,\lambda)]v=0.$$

令 $a\lambda=\mu$, 此式改写成

$$\frac{d^2v}{dz^2}+[-\mu^2(z+1)z(z-b)+\mu Q(z,\mu)]v=0. \tag{4}$$

3 一致有效渐近解

(i) $$\frac{d^2v}{dz^2}+[-\mu^2z(z+1)(z-b)+\mu Q(z,\mu)]v=0. \tag{5}$$

对应于(4), 若

$$Q(z,\mu)=\sum_{i=0}^{\infty}Q_i(z)\mu^{-i},$$

设 Z 为包括 $-1, 0, b$ 的一个开区间, $Q_i(z)$ 在 Z 均解析($i=0, 1, 2, 3, \cdots$).

考虑(5)的比较方程

$$\frac{d^2v}{dz^2}-\mu^2z(z+1)(z-b)v=0$$

的二线性无关解. 由(1)式知第一类解为 $\zeta_1(z,\mu)=J(b,\mu^2,z)$, 第二类解为 $\zeta_2(z,\mu)=L(b,\mu^2,z)$, 故

$$\zeta_i''=\mu^2z(z+1)(z-b)\zeta_i \qquad (i=1,2).$$

仿照 Olver 的方法[5], 假设(5)的渐近解为

$$v=A(z,\mu)\zeta_i+B(z,\mu)\zeta_i', \tag{6}$$

$$v'=A'\zeta_i+(A+B')\zeta_i'+B\zeta_i''=(A'+\mu^2[z(z+1)(z-b)]B)\zeta_i+(A+B')\zeta_i',$$

$$\begin{aligned}v''=&(A''+\mu^2[z(z+1)(z-b)]'B+\mu^2[z(z+1)(z-b)]B')\zeta_i+\\&(2A'+\mu^2[z(z+1)(z-b)]B+B'')\zeta_i'+(A+B')\zeta_i''=\\&(A''+A\mu^2[z(z+1)(z-b)]+\mu^2[z(z+1)(z-b)]'B+\\&2\mu^2[z(z+1)(z-b)]B')\zeta_i+(2A'+\mu^2[z(z+1)(z-b)]B+B'')\zeta_i'.\end{aligned}$$

代入(5), 得

$$\left\{A''+\mu QA+\mu^2[z(z+1)(z-b)]'B+2\mu^2[z(z+1)(z-b)]B'\right\}\zeta_i+$$
$$(2A'+B''+\mu QB)\zeta_i'=0.$$

由 ζ_i、ζ_i' 的系数为 0, 得

$$\left.\begin{aligned}&2A'+B''+\mu QB=0,\\&A''+\mu QA+\mu^2[z(z+1)(z-b)]'B+2\mu^2[z(z+1)(z-b)]B'=0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

这些方程为如下的形式展开所满足

$$A=\sum_{i=0}^{\infty}\mu^{-i}A_i(z),\quad B=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^{-i}B_i(z),$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&2A_0'+Q_0B_1=0,\\&2[z(z+1)(z-b)]B_1'+[z(z+1)(z-b)]'B_1+Q_0A_0=0;\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}&2A_i' + Q_0B_{i+1} = -B_i'' - \sum_{l=1}^{i} Q_lB_{i+1-l} = \alpha_i \qquad (i \geqslant 1),\\&2[z(z+1)(z-b)]B_{i+1}' + [z(z+1)(z-b)]'B_{i+1} + Q_0A_i =\\&\qquad -A_{i-1}'' - \sum_{l=1}^{i} Q_lA_{i-l} = \beta_i \qquad (i \geqslant 1)\cdot\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(8) 的解是

$$A_0 = \cosh\int_0^z \frac{Q_0(\tau)}{2\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}}\mathrm{d}\tau,$$

$$B_1 = -\frac{1}{\sqrt{z(z+1)(z-b)}}\sinh\int_0^z \frac{Q_0(\tau)}{2\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}}\mathrm{d}\tau\cdot$$

(9) 的解是

$$A_i = a_i(z)\cosh\int_0^z \frac{Q_0(\tau)}{2\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}}\mathrm{d}\tau + b_i(z)\sinh\int_0^z \frac{Q_0(\tau)}{2\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}}\mathrm{d}\tau,$$

$$\sqrt{z(z+1)(z-b)}\,B_{i+1} = -a_i(z)\sinh\int_0^z \frac{Q_0(\tau)}{2\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}}\mathrm{d}\tau -$$

$$b_i(z)\cosh\int_0^z \frac{Q_0(\tau)}{2\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}}\mathrm{d}\tau,$$

其中

$$a_i(z) = \frac{1}{2}\int_0^z(\alpha_i(\tau)A_0(\tau) - \beta_i(\tau)B_1(\tau))\mathrm{d}\tau,$$

$$b_i(z) = \frac{1}{2}\int_0^z\left(\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}\,\alpha_i(\tau)B_1(\tau) - \frac{\beta_i(\tau)A_0(\tau)}{\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}}\right)\mathrm{d}\tau,$$

则(5) 形式一致有效渐近解的一般形式为

$$v = A(a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2) + B(a_1\zeta_1' + a_2\zeta_2'),$$

其中 a_1, a_2 为二常数·

$$(\text{ii})\quad \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2} + [\mu^2z(z+1)(z-b) + \mu Q(z,\mu)]v = 0, \tag{6$'$}$$

其中 $Q(z,\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(z)\mu^{-i}\cdot$

$Q_i(z)$ 的假设与(5) 相应情况相同·

考虑比较方程

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2} + \mu^2z(z+1)(z-b)v = 0$$

的二线性无关解· 由(1) 知

$$\zeta_1(z,\mu) = J(b, -\mu^2, z),$$

$$\zeta_2(z,\mu) = L(b, -\mu^2, z),$$

$$\zeta_i''(z,\mu) = -\mu^2z(z+1)(z-b)\zeta_i, \qquad (i = 1, 2)\cdot$$

令

$$v = A(z,\mu)\zeta_i + B(z,\mu)\zeta_i',$$

$$v' = (A' - \mu^2[z(z+1)(z-b)]B)\zeta_i + (A + B')\zeta_i',$$

$$v'' = (A'' - A\mu^2[z(z+1)(z-b)] - \mu^2[z(z+1)(z-b)]'B -$$

$$2\mu^2[z(z+1)(z-b)]B')\zeta_i+(2A'-\mu^2[z(z+1)(z-b)]B+B'')\zeta_i'\cdot$$

代入(6)′得

$$\left.\begin{aligned}&2A'+B''+\mu QB=0,\\&A''+\mu QA-\mu^2[z(z+1)(z-b)]'B-2\mu^2[z(z+1)(z-b)]B'=0,\end{aligned}\right\}\tag{7'}$$

$$A=\sum_{i=0}^{\infty}A_i(z)\mu^{-i},\quad B=\sum_{i=1}^{\infty}B_i(z)\mu^{-i}\cdot$$

从而得到

$$\left.\begin{aligned}&2A_0'+Q_0B_1=0,\\&2[z(z+1)(z-b)]B_1'+[z(z+1)(z-b)]'B_1-Q_0A_0=0;\end{aligned}\right\}\tag{8'}$$

$$\left.\begin{aligned}&2A_i'+Q_0B_{i+1}=-B_i''-\sum_{l=1}^{i}Q_lB_{i+1-l}=\alpha_i\qquad(i\geqslant1),\\&2[z(z+1)(z-b)]B_{i+1}'+[z(z+1)(z-b)]'B_{i+1}-Q_0A_i=\\&\qquad A_{i-1}''+\sum_{l=1}^{i}Q_lA_{i-l}=\beta_i\qquad(i\geqslant1)\cdot\end{aligned}\right\}\tag{9'}$$

(8)′的解是

$$A_0=\cos\int_0^z\frac{Q_0(\tau)}{2\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}}\mathrm{d}\tau,$$

$$B_1=\frac{1}{\sqrt{z(z+1)(z-b)}}\sin\int_0^z\frac{Q_0(\tau)}{2\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}}\mathrm{d}\tau\cdot$$

(9)′的解是

$$A_i=a_i(z)\cos\int_0^z\frac{Q_0(\tau)}{2\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}}\mathrm{d}\tau+b_i(z)\sin\int_0^z\frac{Q_0(\tau)}{2\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}}\mathrm{d}\tau,$$

$$\sqrt{z(z+1)(z-b)}B_{i+1}=a_i(z)\sin\int_0^z\frac{Q_0(\tau)}{2\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}}\mathrm{d}\tau-$$

$$b_i(z)\cos\int_0^z\frac{Q_0(\tau)}{2\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}}\mathrm{d}\tau,$$

其中

$$a_i(z)=\frac{1}{2}\int_0^z[\alpha_i(\tau)A_0(\tau)+\beta_i(\tau)B_1(\tau)]\mathrm{d}\tau,$$

$$b_i(z)=\frac{1}{2}\int_0^z\left[\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}B_1(\tau)\alpha_i(\tau)-\frac{A_0(\tau)\beta_i(\tau)}{\sqrt{\tau(\tau+1)(\tau-b)}}\right]\mathrm{d}\tau\cdot$$

[参 考 文 献]

[1] 张居铃. 广义 Airy 函数与具有 n 个转向点的方程[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**(9): 845~ 862.

[2] 张居铃. 具有 n 阶转向点方程的渐近解的完全表达式[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(1): 77~ 86.

[3] Moriguchi H. An improvement of the WKB method in the presence of turning points and the asymptotic solutions of a class of Hill equation[J]. J Phy Soc Japan, 1959, **14**(1): 1711~ 1796.

[4] Lynn R Y, Keller J B. Uniform asymptotic solutions of the second order linear differential equations with turning points[J]. Comm Pure Appl Math, 1970, **23**(4): 379~ 408.

[5] Nayfeh A H. Perturbation Methods[M]. New York: John Wiley & Sons, 1973.

A Complete Expression of the Asymptotic Solution of Differential Equation With Three_Turning Points

Zhang Juling, Zhu Wenli
(Sichuan Institute of Light Industry and Chemical Technology , Zigong, Sichuan 643003, P R China)

Abstract: In this paper, a second order linear ordinary differential equation with three_turning points is studied. This equation is as follows

$$\frac{d^2y}{dx^2}+[\lambda^2 q_1(x)+\lambda q_2(x,\lambda)]y=0,$$

where $q_1(x)=(x-\mu_1)(x-\mu_2)(x-\mu_3)f(x)$, $f(x)\neq 0$, $\mu_1<\mu_2<\mu_3$,
and λ is a large parameter, but

$$q_2(x,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)\lambda^{-i} \qquad (\text{here } g_0(x)\not\equiv 0)\cdot$$

By using JL function, the complete expression of the formal uniformly valid asymptotic solutions of the equation near turning point is obtained.

Key words: JL function; turning point; asymptotic solution