文章编号: 1000_0887(1999) 12_1301_08

一类非线性控制系统解的渐近性质*

滕志东

(新疆大学 数学系, 乌鲁木齐 830046)

(马兴瑞推荐)

摘要: 主要目的是研究一类非线性控制系统解的渐近性质• 通过建立沿着解的无穷积分和借助于积分形式的LaSalle 不变原理, 得到了关于系统解的二分性和全局渐近性的判别准则• 改进和进一步发展了 »Ã±±ø°¶ 所得到的研究方法与结论•

关 键 词: 非线性控制系统; 沿着解的积分; 二分性; 全局渐近性; 不变原理
中图分类号: O175.14 文献标识码: A

引 言

考虑如下非线性控制系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\phi(\sigma), \quad \sigma = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in R^n$, 记号T 表示矩阵和向量的转置, $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、和 $\boldsymbol{C}$ 分别为$n \times n$、$n \times m$ 和$n \times m$ 常数矩阵, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m)^{\mathrm{T}} \in R^m$, $\phi(\sigma) = (\phi_1(\sigma_1), \phi_2(\sigma_2), \cdots, \phi_m(\sigma_m))^{\mathrm{T}}$ 为 $R^m \to R^m$ 连续函数, 且具有性质如下: 存在常数 $\mu_i > 0$, 且 $\mu_i \leqslant \infty$, 使得

1) $0 \leqslant \sigma_i\phi_i(\sigma_i) \leqslant \mu_i\sigma_i^2$ 对$\sigma_i \in R$ 和$i = 1, 2, \cdots, m$; 或者

2) $0 \leqslant \sigma_i\phi_i(\sigma_i) < \mu_i\sigma_i^2$ 对$\sigma_i \in R$ 和$i = 1, 2, \cdots, m$•

记满足性质1) 的连续函数 $\phi(\sigma)$ 的全体为 $S[0, \mu]$, 而满足性质2) 的连续函数 $\phi(\sigma)$ 的全体为 $S[0, \mu)$, 这里记 $\mu = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$•

设 $D \subset R^n$ 表示系统(1) 的全体平衡点• 系统(1) 称为二分的[1], 如果对于系统(1) 的任何在$[0, \infty)$ 上有界的解 $\boldsymbol{x}(t)$, 都有当 $t \to \infty$时 $\rho(\boldsymbol{x}(t), D) \to 0$, 这里 $\rho(\boldsymbol{x}(t), D)$ 表示点$\boldsymbol{x}(t)$ 到集合D 的距离• 系统(1) 称为全局渐近的[1], 如果对系统(1) 的任何解 $\boldsymbol{x}(t)$, 都有当 $t \to \infty$ 时 $\rho(\boldsymbol{x}(t), D) \to 0$•

进入 80 年代, 关于非线性控制系统的解的稳定性和渐近性的研究产生了一系列新的研究方法和判别准则, 其中比较重要的工作有[2~10]• 作为文[2, 3] 工作的改进和进一步发展, 本文研究非线性控制系统(1) 的解的渐近性质• 首先建立沿着系统(1) 的解的无穷积分, 然后以这个无穷积分为基础, 借助于积分形式的 LaSalle 不变原理得到关于系统(1) 的解的二分性和全局渐近性的代数形式判别准则•

---

* 收稿日期: 1998_02_09; 修订日期: 1999_04_24
基金项目: 国家教委留学回国人员科研启动基金资助课题
作者简介: 滕志东(1960~), 男, 副教授, 苏联哈萨克国立大学副博士.

1 沿着解的积分

设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(1) 的某个解, 令 $\zeta(t)=\phi(\sigma(t))$, $\sigma(t)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t)$, 则有

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\zeta(t),\qquad 对\ t\geqslant 0. \tag{2}$$

引入下列函数:

$$\lambda_1(t)=\zeta^{\mathrm{T}}(t)\tau_1(\sigma(t)-\mu^{-1}\zeta(t)),\quad \lambda_2(t)=\sigma^{\mathrm{T}}(t)\tau_2(\sigma(t)-\mu^{-1}\zeta(t)),$$
$$\lambda_3(t)=\zeta^{\mathrm{T}}(t)\tau_3\sigma(t),\quad \lambda_4(t)=(\sigma(t)-\mu^{-1}\zeta(t))^{\mathrm{T}}\tau_4\dot{\sigma}(t),$$
$$\lambda_5(t)=\zeta^{\mathrm{T}}(t)\tau_5\dot{\sigma}(t),\quad \lambda_6(t)=\sigma^{\mathrm{T}}(t)\tau_6\dot{\sigma}(t),\quad \lambda_7(t)=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{x}}(t).$$

这里 $t\geqslant 0$, $\tau_i=\mathrm{diag}(\tau_{i1},\tau_{i2},\cdots,\tau_{im})$ 为常数对角阵, $i=1,2,\cdots,6$, $\boldsymbol{H}$ 为 $n\times n$ 常数对称阵, $\mu^{-1}=\mathrm{diag}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1},\cdots,\mu_m^{-1})$, 且当 $\mu_i=\infty$ 时规定 $\mu_i^{-1}=0$. 设函数:

$$J_1(t)=\int_0^t\sum_{i=4}^{7}\lambda_i(s)\mathrm{d}s,\quad J_2(t)=\int_0^t\sum_{i=1}^{7}\lambda_i(s)\mathrm{d}s\qquad 对\ t\geqslant 0.$$

我们有结论如下:

引理 1.1 设函数 $\phi(\sigma)\in S[0,\mu]$, 则:

a) 当 $\tau_i\geqslant 0(i=1,2,3)$ 时, $J_1(t)\leqslant J_2(t)$ 对 $t\geqslant 0$;

b) 当 $\tau_i\geqslant 0(i=4,5,6)$ 时, $J_1(t)\geqslant C_0+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t)$ 对 $t\geqslant 0$, 且 C_0 为常数;

c) 当解 $\boldsymbol{x}(t)$ 在$[0,\infty)$ 上有定义和有界时, $J_1(t)$ 在$[0,\infty)$ 上也有定义和有界.

证明 令 $\zeta(t)=(\zeta_1(t),\zeta_2(t),\cdots,\zeta_m(t))^{\mathrm{T}}$, 其中 $\zeta_i(t)=\phi_i(\sigma_i(t))$. 计算得到

$$\lambda_1(t)=\sum_{i=1}^{m}\zeta_i(t)\tau_{1i}(\sigma_i(t)-\mu_i^{-1}\zeta_i(t)), \tag{3}$$

$$\lambda_2(t)=\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(t)\tau_{2i}(\sigma_i(t)-\mu_i^{-1}\zeta_i(t)), \tag{4}$$

$$\lambda_3(t)=\sum_{i=1}^{m}\zeta_i(t)\tau_{3i}\sigma_i(t), \tag{5}$$

$$\int_0^t\lambda_4(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\sum_{i=1}^{m}(\sigma_i(s)-\mu_i^{-1}\zeta_i(s))\tau_{4i}\dot{\sigma}_i(s)\mathrm{d}s=$$
$$\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i(t)}(\sigma_i-\mu_i^{-1}\phi_i(\sigma_i))\tau_{4i}\mathrm{d}\sigma_i-\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i(0)}(\sigma_i-\mu_i^{-1}\phi_i(\sigma_i))\tau_{4i}\mathrm{d}\sigma_i, \tag{6}$$

$$\int_0^t\lambda_5(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\sum_{i=1}^{m}\zeta_i(s)\tau_{5i}\dot{\sigma}_i(s)\mathrm{d}s=$$
$$\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i(t)}\phi_i(\sigma_i)\tau_{5i}\mathrm{d}\sigma_i-\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i(0)}\phi_i(\sigma_i)\tau_{5i}\mathrm{d}\sigma_i, \tag{7}$$

$$\int_0^t\lambda_6(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(s)\tau_{6i}\dot{\sigma}_i(s)\mathrm{d}s=$$
$$\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i(t)}\sigma_i\tau_{6i}\mathrm{d}\sigma_i-\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i(0)}\sigma_i\tau_{6i}\mathrm{d}\sigma_i. \tag{8}$$

由于 $\phi(\sigma)\in S[0,\mu]$, 故当 $\tau_i\geqslant 0(i=1,2,3)$ 时由(3) ~ (5) 式得知 $\lambda_i(t)\geqslant 0(i=1,2,3)$ 对 $t\geqslant 0$. 因此 $J_1(t)\leqslant J_2(t)$ 对 $t\geqslant 0$ 即结论 a) 成立. 而当 $\tau_i\geqslant 0(i=4,5,6)$ 时由(6) ~ (8) 式得知

$$\int_0^t(\lambda_4(s)+\lambda_5(s)+\lambda_6(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$- \sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i(t)}[(\sigma_i - \mu_i^{-1}\phi_i(\sigma_i))\tau_{4i} + \phi_i(\sigma_i)\tau_{5i} + \sigma_i\tau_{6i}]\mathrm{d}\sigma_i.$$

因此 $J_1(t) \geqslant C_0 + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t)$ 对 $t \geqslant 0$, 其中

$$C_0 = - \sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i(0)}[(\sigma_i - \mu_i^{-1}\phi_i(\sigma_i))\tau_{4i} + \phi_i(\sigma_i)\tau_{5i} + \sigma_i\tau_{6i}]\mathrm{d}\sigma_i - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(0).$$

故结论 b) 成立. 如果解 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $[0, \infty)$ 有界, 则存在常数 $M > 0$ 使得 $|\sigma_i(t)| \leqslant M$ 对 $t \geqslant 0$ 和 $i = 1, 2, \cdots, m$. 由于

$$\begin{aligned} J_1(t) = & \sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i(t)}[(\sigma_i - \mu_i^{-1}\phi_i(\sigma_i))\tau_{4i} + \phi_i(\sigma_i)\tau_{5i} + \sigma_i\tau_{6i}]\mathrm{d}\sigma_i - \\ & \sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i(0)}[(\sigma_i - \mu_i^{-1}\phi_i(\sigma_i))\tau_{4i} + \phi_i(\sigma_i)\tau_{5i} + \sigma_i\tau_{6i}]\mathrm{d}\sigma_i + \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(0), \qquad 对\ t \geqslant 0, \end{aligned}$$

所以 $J_1(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上有定义和有界. 故结论 c) 成立. 引理证毕.

设 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 m, 则存在 $m \times n$ 矩阵 Θ 使得 $\Theta\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, 这里 $\boldsymbol{E}$ 为 $m \times m$ 单位阵. 由(2)式得到

$$\zeta(t) = \Theta(\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)), \qquad 对\ t \geqslant 0. \tag{9}$$

将(2)、(9)式代入 $\lambda_i(t)(i = 1, 2, \cdots, 7)$, 经过计算我们不难得到

$$\sum_{i=1}^{7}\lambda_i(t) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}(t) + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{x}(t) + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_3\dot{\boldsymbol{x}}(t),$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_1 = & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Theta^{\mathrm{T}}(-\tau_4\mu^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} - \tau_1\mu^{-1} + \tau_5\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\Theta\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{C}\tau_1\mu^{-1} - \boldsymbol{C}\tau_1 + \\ & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\tau_4\mu^{-1} - \boldsymbol{C}\tau_3 - \boldsymbol{C}\tau_4\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\tau_5 - \boldsymbol{C}\tau_6\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{H}\boldsymbol{B})\Theta\boldsymbol{A} + \\ & (\boldsymbol{C}\tau_4 + \boldsymbol{C}\tau_6)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\tau_2\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{P}_2 = & \Theta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^*, \\ \boldsymbol{P}_2^* = & \tau_1\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} + 2\mu^{-1}\tau_1\Theta\boldsymbol{A} - \mu^{-1}\tau_2\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} + \tau_3\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} + \mu^{-1}\tau_4\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\Theta\boldsymbol{A} - \\ & \mu^{-1}\tau_4\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\tau_4\mu^{-1}\Theta\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\tau_4\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} + \tau_5\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} - \\ & \tau_5\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\Theta\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\tau_5\Theta\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\tau_6\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}, \\ \boldsymbol{P}_3 = & \Theta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3^*\Theta, \quad \boldsymbol{P}_3^* = -\tau_1\mu^{-1} - \tau_4\mu^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} + \tau_5\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}. \end{aligned}$$

这表明对 $t \geqslant 0$ 有

$$J_2(t) = \int_0^t[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}(s) + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{x}(s) + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_3\dot{\boldsymbol{x}}(s)]\mathrm{d}s.$$

考虑 $\boldsymbol{P}_2^*$, 假设存在 $m \times m$ 对称阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{P}_2^* = 2\boldsymbol{Q}\Theta$, 则 $\boldsymbol{P}_2 = 2\Theta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Theta$, 并且

$$\begin{aligned} J_2(t) = & \int_0^t[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}(s) + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_3\dot{\boldsymbol{x}}(s)]\mathrm{d}s + \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\Theta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Theta\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\Theta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Theta\boldsymbol{x}(0). \end{aligned} \tag{10}$$

进一步根据引理 1.1 我们得出结论:

引理 1.2 设函数 $\phi(\sigma) \in S[0, \mu]$, $\boldsymbol{B}$ 的秩为 m, $\tau_i \geqslant 0(i = 1, 2, \cdots, 6)$. 设存在对称阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{P}_2^* = 2\boldsymbol{Q}\Theta$, 则沿着系统(1)的任何解 $\boldsymbol{x}(t)$ 有

$$\int_0^t[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}(s) + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_3\dot{\boldsymbol{x}}(s)]\mathrm{d}s \geqslant C_1 + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{H} - \Theta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Theta)\boldsymbol{x}(t)$$

对 $t \geqslant 0$, 其中常数 $C_1 = C_0 + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\,\Theta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Theta\boldsymbol{x}(0)$.

2 二分性和渐近性

首先引入一个引理. 这个引理就是众所周知的关于常微分方程解的渐近性质的古典 LaSalle 不变原理[11]. 在这里我们将给出无穷积分的叙述形式. 考虑自治的常微分方程:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in R^n. \tag{11}$$

这里 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 $R^n \to R^n$ 连续函数. 我们有结论如下:

引理 2.1 如果对系统(11) 在 $[0, \infty)$ 上有界的解 $\boldsymbol{x}(t)$, 存在定义于 R^n 上的非负连续函数 $W(\boldsymbol{x})$ 使得 $\int_0^\infty W(\boldsymbol{x}(t))\,\mathrm{d}t < \infty$, 则 $\boldsymbol{x}(t) \to E^*$ 当 $t \to \infty$ 时, 这里 E^* 为系统(11) 位于集合 $E = \left\{\boldsymbol{x} \mid W(\boldsymbol{x}) = 0\right\}$ 中的最大不变集.

和文[11] 中的 LaSalle 不变原理相比较, 我们看到在引理 2.1 中 Liapunov 函数 $V(\boldsymbol{x})$ 被非负连续函数 $W(\boldsymbol{x})$ 所代替. 引理的证明和 LaSalle 不变原理的证明完全类似. 由于引理 2.1 的主要条件是一个无穷积分, 因此我们称它为积分形式的 LaSalle 不变原理.

关于系统(1) 解的二分性我们有如下结论.

定理 2.2 设函数 $\phi(\sigma) \in S[0, \mu]$, $\boldsymbol{B}$ 的秩为 m. 如果存在对角阵 $\tau_i (i = 1, 2, \cdots, 6)$ 和对称阵 $\boldsymbol{H}$, 且 $\tau_i \geqslant 0 (i = 1, 2, 3)$, 使得下列条件成立, 则系统(1) 是二分的:

1) $\boldsymbol{P}_2^* = 2\boldsymbol{Q}\Theta$, 并且 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 和 $\Theta\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$;

2) 下面三个条件之一成立:

a) $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_1 = -\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{S}$ 和 $(\boldsymbol{P}_3^*)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_3^* < 0$, 其中 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 分别为 $k \times n$ 和 $k \times k$ 矩阵, $k \geqslant 1$, $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} > 0$, 线性方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\Theta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 在平面 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{x} = 0$ 上除了平衡点外无任何其它在 $(-\infty, \infty)$ 上有界的解;

b) $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_1 \leqslant -\boldsymbol{C}\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 和 $(\boldsymbol{P}_3^*)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_3^* \leqslant 0$, 其中 $\boldsymbol{G}$ 为 $m \times m$ 正定阵, 线性方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在平面 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$ 上除了平衡点外无任何其它在 $(-\infty, \infty)$ 上有界的解;

c) $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_1 \leqslant 0$, $(\boldsymbol{P}_3^*)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_3^* \leqslant 0$ 和 $\tau_3 > 0$, 线性方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 除了平衡点外无任何其它在 $(-\infty, \infty)$ 上有界的解.

证明 设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(1) 在 $[0, \infty)$ 上有界的解, 令:

$$J_3(t) = \int_0^t [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}(s) + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_3\dot{\boldsymbol{x}}(s)]\,\mathrm{d}s \qquad \text{对 } t \geqslant 0.$$

由引理 1.2 存在常数 N_0 使得 $J_3(t) \geqslant N_0$ 对 $t \in [0, \infty)$. 设 Ω 为 $\boldsymbol{x}(t)$ 的 ω_极限集, 则 Ω 是非空、有界、闭的连通不变集. 为了得到二分性, 只须证明对任何的 $\boldsymbol{a} \in \Omega$ 有 $\boldsymbol{a} \in D$. 设 $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{a})$ 是系统(1) 通过点 $\boldsymbol{a}$ 的解, 则 $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{a})$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上有定义和有界, 并且 $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{a}) \in \Omega$ 对 $t \in (-\infty, \infty)$.

设条件 a) 成立, 由于

$$J_3(t) = \frac{1}{2}\int_0^t [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)(\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{x}(s) + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)(\boldsymbol{P}_3^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_3)\dot{\boldsymbol{x}}(s)]\,\mathrm{d}s, \tag{12}$$

$$\int_0^t \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)(\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s \leqslant -\int_0^t \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s \leqslant 0,$$

$$\int_0^t \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)(\boldsymbol{P}_3^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_3)\dot{\boldsymbol{x}}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\,\Theta^{\mathrm{T}}((\boldsymbol{P}_3^*)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_3^*)\,\Theta\dot{\boldsymbol{x}}(s)\,\mathrm{d}s \leqslant 0,$$

因此对 $t \in [0, \infty)$ 有

$$N_0 \leqslant J_3(t) \leqslant -\int_0^t x^{\mathrm{T}}(s) S^{\mathrm{T}} G S x(s) \mathrm{d}s \leqslant 0,$$

$$N_0 \leqslant J_3(t) \leqslant \int_0^t \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)\, \Theta^{\mathrm{T}}((P_3^*)^{\mathrm{T}} + P_3^*)\, \Theta \dot{x}(s) \mathrm{d}s \leqslant 0 .$$

这表明无穷积分

$$\int_0^\infty x^{\mathrm{T}}(t) S^{\mathrm{T}} G S x(t) \mathrm{d}t \text{ 和 } \int_0^\infty \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\, \Theta^{\mathrm{T}}((P_3^*)^{\mathrm{T}} + P_3^*)\, \Theta \dot{x}(t) \mathrm{d}t$$

都收敛. 设函数

$$W_1(x) = x^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} G S x, \quad W_2(x) = -z^{\mathrm{T}}((P_3^*)^{\mathrm{T}} + P_3^*) z,$$

其中 $z = \Theta \dot{x} = \Theta(Ax + B\phi(\sigma))$ 和 $\sigma = C^{\mathrm{T}} x$. 显然 $W_1(x)$ 和 $W_2(x)$ 满足引理 2.1 的全部条件, 因此我们得到 $\Omega \in E_1 \cap E_2$, 其中

$$E_1 = \left\{x \mid W_1(x) = 0\right\} = \left\{x \mid Sx = 0\right\},$$
$$E_2 = \left\{x \mid W_2(x) = 0\right\} = \left\{x \mid \Theta(Ax + B\phi(\sigma)) = 0\right\}.$$

由于 $x(t, a) \in E_1 \cap E_2$ 对 $t \in (-\infty, \infty)$, 所以 $Sx(t, a) \equiv 0$ 和 $\Theta(Ax(t, a) + B\phi(\sigma(t, a)))$ $\equiv 0$ 对 $t \in (-\infty, \infty)$, 其中 $\sigma(t, a) = C^{\mathrm{T}} x(t, a)$. 由于 $\Theta B = E$, 故得到 $\dot{x}(t, a) = (A - B\Theta A) x(t, a)$ 对 $t \in (-\infty, \infty)$. 根据定理中关于条件 a) 的要求得知 $x(t, a) \equiv a$ 对 $t \in (-\infty, \infty)$, 因此 $a \in D$. 故系统(1) 是二分的.

设条件 b) 成立, 则类似于条件 a) 不难得到无穷积分 $\int_0^\infty x^{\mathrm{T}}(t) C G C^{\mathrm{T}} x(t) \mathrm{d}t$ 收敛. 设函数 $W(x) = x^{\mathrm{T}} C G C^{\mathrm{T}} x$, 则由引理 2.1 得知 $\Omega \subset E$, 其中 $E = \left\{x \mid W(x) = 0\right\} = \left\{x \mid C^{\mathrm{T}} x = 0\right\}$. 于是我们有 $C^{\mathrm{T}} x(t, a) \equiv 0$ 和 $\dot{x}(t, a) = Ax(t, a)$ 对 $t \in (-\infty, \infty)$. 根据定理中关于条件 b) 的要求得知 $x(t, a) \equiv a$ 对 $t \in (-\infty, \infty)$, 因此 $a \in D$. 故系统(1) 具有二分性.

设条件 c) 成立. 令

$$J_4(t) = \int_0^t (\lambda_1(s) + \lambda_2(s) + \lambda_3(s)) \mathrm{d}s \qquad \text{对 } t \geqslant 0,$$

显然 $J_4(t) \geqslant 0$ 对 $t \in [0, \infty)$. 由于 $J_4(t) = J_2(t) - J_1(t)$, 并且由(10) 和(12) 得知 $J_2(t)$ 在$[0, \infty)$ 上有界. 故由引理 1.1 得知 $J_4(t)$ 在$[0, \infty)$ 上也有界. 因此存在常数 N_1 使得 $0 \leqslant \int_0^t \lambda_3(s) \mathrm{d}s \leqslant N_1$ 对 $t \in [0, \infty)$. 故无穷积分 $\int_0^\infty \lambda_3(t) \mathrm{d}t$ 收敛. 设函数 $W(x) = \phi^{\mathrm{T}}(\sigma) \tau_3 \sigma$, 根据引理 2.1 我们有 $\Omega \subset E$, 且 $E = \left\{x \mid W(x) = 0\right\} = \left\{x \mid \phi(\sigma) = 0\right\}$. 于是 $\phi(\sigma(t, a))$ $\equiv 0$ 和 $\dot{x}(t, a) = Ax(t, a)$ 对 $t \in (-\infty, \infty)$. 根据定理中关于条件 c) 的要求得知 $x(t, a)$ $\equiv a$ 对 $t \in (-\infty, \infty)$, 因此 $a \in D$. 故系统(1) 也是二分的. 定理证毕.

定理 2.3 设函数 $\phi(\sigma) \in S[0, \mu)$, B 的秩为 m. 如果存在对角阵 $\tau_i (i = 1, 2, \cdots, 6)$ 和对称阵 H 使得下列条件成立时, 则系统(1) 是二分的:

1) $P_2^* = 2Q\Theta$, 并且 $Q = Q^{\mathrm{T}}$ 和 $\Theta B = E$;

2) 下面两个条件之一成立:

a) $\tau_1 > 0$, $P_1^{\mathrm{T}} + P_1 \leqslant 0$ 和$(P_3^*)^{\mathrm{T}} + P_3^* \leqslant 0$, 线性方程 $\dot{x} = Ax$ 除了平衡点外不存在任何其它在$(-\infty, \infty)$ 上有界的解;

b) $\tau_2 > 0$, $P_1^{\mathrm{T}} + P_1 \leqslant 0$ 和$(P_3^*)^{\mathrm{T}} + P_3^* \leqslant 0$, 线性方程 $\dot{x} = Ax$ 除了平衡点外在平面 $C^{\mathrm{T}} x = 0$ 上无任何其它在$(-\infty, \infty)$ 上有界的解.

证明 设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(1) 在$[0,\infty)$ 上有界的解, Ω为$\boldsymbol{x}(t)$ 的 ω_极限集· 由定理 2.2 关于条件 c) 的证明我们得到 $0\leqslant\int_0^t\lambda_i(s)\mathrm{d}s\leqslant N_1$ 对 $t\in[0,\infty)$ 和 $i=1,2$, 这里 N_1 为常数· 因此无穷积分$\int_0^\infty\lambda_i(t)\mathrm{d}t\,(i=1,2)$ 收敛· 设函数

$$W_1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(\sigma)\tau_1(\sigma-\mu^{-1}\phi(\sigma))\ \text{和}\ W_2(\boldsymbol{x})=\sigma^{\mathrm{T}}\tau_2(\sigma-\mu^{-1}\phi(\sigma)),$$

则 $W_i(\boldsymbol{x})\,(i=1,2)$ 满足引理 2.1 的全部条件· 因此我们有 $\Omega\subset E_1\cap E_2$, 这里 $E_i=\left\{\boldsymbol{x}\mid W_i(\boldsymbol{x})=0\right\}(i=1,2)$· 对任何$\boldsymbol{a}\in\Omega$, 考察系统(1) 的解 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{a})$, 显然$\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{a})$ 在$(-\infty,\infty)$ 上有定义和有界, 并且 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{a})\in E_1\cap E_2$ 对 $t\in(-\infty,\infty)$· 若条件 a) 成立, 则 $E_1=\left\{\boldsymbol{x}\mid\phi(\sigma)=0,\ \sigma=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right\}$, 故$\phi(\sigma(t,\boldsymbol{a}))\equiv0$和$\dot{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{a})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{a})$ 对$t\in(-\infty,\infty)$· 若条件 b) 成立, 则 $E_2=\left\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0\right\}$, 故 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{a})\equiv0$和$\dot{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{a})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{a})$ 对 $t\in(-\infty,\infty)$· 根据定理中关于条件 a) 和 b) 的要求得知 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{a})\equiv\boldsymbol{a}$ 对$t\in(-\infty,\infty)$, 这表明 $\boldsymbol{a}\in D$, 即 $\Omega\subset D$· 故系统(1) 是二分的· 定理证毕·

关于系统(1)解的全局渐近性我们有如下结论:

定理 2.4 设定理2.2 或 2.3 的全部条件成立, $\tau_i\geqslant0\,(i=1,2,\cdots,6)$· 则当下列条件之一成立时, 系统(1) 是全局渐近的:

a) 矩阵 $\boldsymbol{H}-\Theta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Theta$ 是正定的;

b) 存在对角阵 $\alpha=\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 使得矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\alpha\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 稳定, 并且函数 $\phi_\alpha(\sigma)=\phi(\sigma)-\alpha\sigma$ 在 $\sigma\in R^m$ 上有界·

证明 设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(1) 的任何解· 如果条件 a) 成立, 则由引理 1.2 得知

$$\begin{aligned}0\geqslant J_3(t)&=\int_0^t[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}(s)+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_3\dot{\boldsymbol{x}}(s)]\mathrm{d}s=\\&\frac{1}{2}\int_0^t[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)(\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{x}(s)+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)(\boldsymbol{P}_3^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}_3)\dot{\boldsymbol{x}}(s)]\mathrm{d}s\geqslant\\&C_1+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{H}-\Theta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Theta)\boldsymbol{x}(t),\qquad\text{对 } t\geqslant0\cdot\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{x}(t)$ 在$[0,\infty)$ 上有界· 如果条件 b) 成立, 则我们有

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\alpha\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\phi_\alpha(\sigma(t)),\ \ \sigma(t)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t),\qquad\text{对 } t\geqslant0\cdot$$

由常数变易公式得到

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1t}\boldsymbol{x}(0)+\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1t}\int_0^t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1\tau}\boldsymbol{B}\phi_\alpha(\sigma)\mathrm{d}\tau,\qquad\text{对 } t\geqslant0,$$

这里 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\alpha\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$· 因此当 $\boldsymbol{A}_1$ 稳定, 并且 $\phi_\alpha(\sigma)$ 有界时 $\boldsymbol{x}(t)$ 在$[0,\infty)$ 上有界· 由定理 2.2 或 2.3 得知$\boldsymbol{x}(t)\to D$ 当$t\to\infty$时· 故系统(1) 是全局渐近的· 定理证毕·

为了说明定理 2.2~ 2.4 我们讨论下面的例子· 考虑三维系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\phi(\sigma),\quad\sigma=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(r_1,r_2,r_3)$, $\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$和 $\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}}$, 函数 $\phi(\sigma):R\to R$ 是连续的和满足条件$0\leqslant\sigma\phi(\sigma)\leqslant\mu\sigma^2$对 $\sigma\in R$, 这里 $\mu>0$为常数· 不失一般性假设 $b_3\neq0$· 选取 $\Theta=(0,0,b_3^{-1})$, 则 $\Theta\boldsymbol{B}=1$· 选取常数 $\tau_2=\tau_4=\tau_6=0$ 和对称阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{3\times3}$, 经过计算得到:

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}2h_{11}r_1&2h_{12}r_2&2h_{13}r_3+\alpha_1\\2h_{12}r_1&2h_{22}r_2&2h_{23}r_3+\alpha_2\\2h_{13}r_1&2h_{23}r_2&2h_{33}r_3+\alpha_3+\alpha_4\end{pmatrix},$$

$$P_2^* = (\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7), \quad P_3^* = -\tau_1\mu^{-1} + \tau_5 \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B},$$

其中

$$\alpha_1 = -r_3 b_3^{-1}\left(\tau_1 c_1 + \tau_3 c_1 + \tau_5 r_1 c_1 + 2\sum_{i=1}^{3} h_{1i} b_i\right),$$

$$\alpha_2 = -r_3 b_3^{-1}\left(\tau_1 c_2 + \tau_3 c_2 + \tau_5 r_2 c_2 + 2\sum_{i=1}^{3} h_{2i} b_i\right),$$

$$\alpha_3 = -r_3 b_3^{-1}\left(\tau_1 c_3 + \tau_3 c_3 + \tau_5 r_3 c_3 + 2\sum_{i=1}^{3} h_{3i} b_i\right),$$

$$\alpha_4 = r_3^2 b_3^{-2}(-\tau_1\mu^{-1} + \tau_5 \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}),$$

$$\alpha_5 = \tau_1 c_1 + \tau_3 c_1 + \tau_5 r_1 c_1 + 2\sum_{i=1}^{3} h_{1i} b_i,$$

$$\alpha_6 = \tau_1 c_2 + \tau_3 c_2 + \tau_5 r_2 c_2 + 2\sum_{i=1}^{3} h_{2i} b_i,$$

$$\alpha_7 = \tau_1 c_3 + \tau_3 c_3 + \tau_5 r_3 c_3 + 2\mu^{-1}\tau_1 r_3 b_3^{-1} - 2\tau_5 \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} r_3 b_3^{-1} + 2\sum_{i=1}^{3} h_{3i} b_i.$$

选取 $h_{12} = h_{23} = h_{13} = 0$, 则我们有: $\boldsymbol{P}_2^* = 2\boldsymbol{Q}\Theta$ 和 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 等价于 $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$; $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_1 \leqslant 0$ 等价于 $r_1 h_{11} \leqslant 0$, $r_2 h_{22} \leqslant 0$ 和 $-r_3 b_3^{-1}(\tau_1 c_3 + \tau_3 c_3 + \tau_5 r_3 c_3) + r_3^2 b_3^{-2}(-\tau_1\mu^{-1} + \tau_5 \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}) \leqslant 0$; 以及 $P_3^* \leqslant 0$ 等价于 $-\tau_1\mu^{-1} + \tau_5 \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} \leqslant 0$. 因为

$$\boldsymbol{H} - \Theta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Theta = \mathrm{diag}(h_{11}, h_{22}, \alpha_8),$$

其中 $\alpha_8 = -b_3^{-1}(\tau_1 c_3 + \tau_3 c_3 + \tau_5 r_3 c_3) + 2r_3 b_3^{-1}(-\tau_1\mu^{-1} + \tau_5 \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$. 所以 $\boldsymbol{H} - \Theta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Theta > 0$ 等价于 $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$ 和 $\alpha_8 > 0$. 根据定理2.2～2.4我们得到: 如果 $r_i \geqslant 0\ (i = 1, 2, 3)$, 并且存在常数 $\tau_1 \geqslant 0$, $\tau_3 > 0$, $\tau_5 > 0$, $h_{11} > 0$ 和 $h_{22} > 0$ 使得 $\tau_1\mu^{-1} - \tau_5 \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} \geqslant 0$, $b_3(\tau_1 c_3 + \tau_3 c_3 + \tau_5 r_3 c_3) + 2r_3(\tau_1\mu^{-1} - \tau_5 \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}) < 0$, $\tau_1 c_1 + \tau_3 c_1 + \tau_5 r_1 c_1 + h_{11} b_1 = 0$, $\tau_1 c_2 + \tau_3 c_2 + \tau_5 r_2 c_2 + h_{22} b_2 = 0$, 则系统(13)是全局渐近的.

致谢　对审稿人提出的非常宝贵的修改意见, 作者表示由衷的感谢.

[参考文献]

[1] ¶½º´ , ¶À¿À³ , п А щ кВ . ÃÄÀ»Éº³ÀÃÄÎ ¶½º¿¶»¿ÍÇ ºÃÄ¶¾ Ã ¶¶µº¿ÃÄ³¶¿¿Í¾ ÀÃÄÀÑ¿º¶¾ ±¿À³¶ÃºÑ[M]. ÀÃ¼³± ¹µ±Ä¶½ÎÃÄ³À ±À¼±, 1979.

[2] »Ã±±º¶³ . Ä¶ÀÂºº ±ÃÀ½ÐÄ¿À» ÅÃÄÀ»Éº³ÀÃÄº Â¶Å½ºÂÅ¶¾ÍÇ ÃºÃÄ¶¾[J]. ºÆÆ¶Â¶Èº±½Î¿Í¶ Â±¿¶¿ºÑ, 1994, **30**(5): 748～757.

[3] »Ã±±º¶³ . ½´¶Â±ÉÃ¼º¶¼Âº Ä¶Âºº ±ÃÀ½ÐÄ¿À» ÅÃÄÀ»Éº³ÀÃÄº Â¶Å½ºÂÅ¶¾ÍÇ ÃºÃÄ¶¾ º Â¶Ê¶¿ºÑ ¹±±Éº ½ºÃÄ±[J]. ¹³¶ÃÄºÑ ¶ÃÃÅ²½¼º ±±ÇÃÄ±, ¶Âº Ñ: º¹º¼À_ ±Ä¶¾±Äº É¶Ã¼±Ñ, 1994, **176**(1): 3～7.

[4] À¿Ãº±, , ±À ÅÃÑ ¹±±É¶ ±ÃÀ½ÐÄ¿À» ÅÃÄÀ»Éº³ÀÃÄº ÃºÃÄ¶¾ ÅÁÂ±½¶¿ºÑ Ã ¿¶Ã¼À½Î¼º¾º ¿¶½º¿¶»¿ÍÇ ÃÄÀ¾ÇÃÀ½ÐÄ¿ÍÇ ÅÁÂ±½¶¿ºÑ[J]. ³ÄÀ¾±ÄºÃ¼± º ¶½¶¾¶Ç±ºÃ±, 1991, **52**(1): 34～42.

[5] ±ÀÁÂÀÃ . ¹±±É± ±ÃÀ½ÐÄ¿À» ÅÃÄÀ»Éº³ÀÃÄº ÃºÃÄ¶¾ ÅÁÂ±½¶¿ºÑ Ã ¿¶Ã¼À½Î¼º¾º ¿¶½º¿¶»¿ÍÇ ÅÁÂ±½¶¿ºÑ[J]. ³ÄÀ¾±Äº¼± º ¶½¶¾¶Ç±ºÃ±, 1987, **48**(5): 66～74.

[6] 廖晓昕. 论 Lurie 间接控制系统绝对稳定的充要条件[J]. 中国科学, A辑, 1988, (10): 1019～1032.

[7] 廖晓昕. 一般 Lurie 控制系统绝对稳定的新判据[J]. 数学学报, 1990, **33**(6): 841～852.

[8] 张继业, 舒仲周. 直接控制系统绝对稳定的充要性准则[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(3): 245~251.
[9] 赵素霞, 仵永先. 绝对稳定性的新频率准则[J]. 数学学报, 1995, **38**(1): 6~ 12.
[10] 程远纪. 控制系统无穷扇形角的绝对稳定性[J]. 数学学报, 1990, **33**(3): 289~ 294.
[11] LaSalle J P. Stability theory for ordinary differential equations[J]. J Diff Equas, 1968, **4**(1): 57~ 65.

On the Asymptotical Behaviour of Solutions of a Class of Nonlinear Control Systems

Teng Zhidong
(Department of Mathematics, Xinjiang University, Urumqi 830046, P R China)

Abstract: In this paper the asymptotical behaviour solutions of a class of nonlinear control systems are studied. By establishing infinite integrals along solutions of the system and drawing support from a LaSalle's invariance principle of integral form, criteria of dichotomy and global asymptotical behaviour of solutions are obtained. This work is an improvement and further extension of research methods and results of »Ã±±½º¶³.

Key words: nonlinear control system; integral along solution; dichotomy; global asymptotical behaviour; invariance principle.