应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 11_1115_06

有限变形非对称弹性理论变分原理*

宋彦琦, 陈至达

(中国矿业大学(北京校区) 力学系, 北京 100083)

(谨以此文纪念敬爱的导师陈至达教授逝世| 周年——宋彦琦)

摘要: 应用有限变形 S_R 分解定理, 将体力矩重新定义为内外两种体力矩之和, 给出了相应的变形能增率表达式及其物理意义, 并进一步补充和完善了有体力矩作用下的有限变形力学的功率变分原理和余功率变分原理•

关 键 词: 体力矩; 变形能; 有限变形; 变分原理
中图分类号: O313.2 文献标识码: A

引 言

目前在非线性连续体力学理论中关于有限应变与局部转动有多种定义方式• 基于 Green 应变张量的经典非线性理论缺乏和应变相协调的有限转动定义, 极分解定理由于分解的非唯一性而不实用• 1979 年, 陈至达教授采用拖带坐标系描述法, 在张量分析和微分变换群等数学理论的基础上, 建立了全新的有限变形 S_R 分解理论[1, 2], 并以此为基础, 确立了与之对应的理性力学新体系• 该理论已成功地应用在固体力学、岩石力学、粘弹性力学、断裂力学、生物力学以及其它许多领域中•

非线性弹性力学问题分为材料的物理非线性和变形的几何非线性• 在几何非线性问题中, 若考虑体力矩, 则称为有限变形非对称弹性力学问题[3]• 在本文中, 我们应用 S_R 分解定理, 采用拖带坐标系描述法, 把体力矩定义为内外两种体力矩之和, 并由此给出变形能增率表达式, 补充并完善了有体力矩作用下的有限变形力学的功率变分原理和余功率变分原理•

1 有限变形力学中变形体的能量定律

应用热力学第一定律, 可以证明变形体中的内能增量 $\dot{U}$ 等于变形能的增量 $\dot{\Phi}$ 与热量的增量 $\dot{Q}$ 之和, 即 $\dot{U} = \dot{\Phi} + \dot{Q}$•

设已知作用在变形体的外力有表面力 $\boldsymbol{p}$ (力/ 单位面积), 体力 $\boldsymbol{q}$ (力/ 单位质量), 电磁场或其它外场产生的体矩 $\overset{(E)}{\boldsymbol{m}}$ (力矩/ 单位质量)• 在拖带坐标系中, 以 $\mathrm{d}a$ 指界面的微元面积, 以 $\mathrm{d}\Omega$ 指微元体积, ρ 指单位体积的体矩(变形位形中)• 变形体中任一点的速度为 $\boldsymbol{V}$, 则外力功率可表示为:

---

* 收稿日期: 1999_07_09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672023)
作者简介: 宋彦琦(1969~) , 女, 博士, 讲师, 研究方向: 有限变形力学及其应用, 已发表论文 7 篇.

$$\dot{W} = \oint_S (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{V})\,\mathrm{d}a + \int_\Omega \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{V}\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \rho \overset{(E)}{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{L}\,\mathrm{d}\Omega, \tag{1}$$

上式积分号下的 S 指面积, Ω 指体积•

将 $\boldsymbol{p} = \sigma^{ij}\boldsymbol{g}_j n_i$ 代入(1) 式, 并应用散度定理, 可以得到:

$$\oint_S (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{V})\,\mathrm{d}a = \oint_S (\sigma^{ij}\boldsymbol{g}_j \cdot V_l \boldsymbol{g}^l)\, n_i\,\mathrm{d}a = \oint_S (\sigma^{ij} V_j)\, n_i\,\mathrm{d}a =$$

$$\int_\Omega (\sigma^{ij} V_j)\Big\|_i\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \left[\sigma^{ij}\,\|_i V_j + \sigma^{ij}(V_j\,\|_i)\right]\mathrm{d}\Omega• \tag{2}$$

而体矩 $\overset{(E)}{\boldsymbol{m}}$ 的功率用分量可以表示为:

$$\overset{(E)}{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{L} = \overset{(E)}{m}{}^k L_k = \frac{1}{2}\varepsilon^{kij} m_{ij} L_k = \frac{1}{2}\overset{(E)}{m}{}_{ij} L^{ij} = \frac{1}{2}\overset{(E)}{m}{}^{i\cdot}_{\cdot j} L_{i\cdot}^{\cdot j}• \tag{3}$$

因此式(1) 可写为

$$\dot{W} = \int_\Omega (\sigma^{i\cdot}_{\cdot j}\,\|_i + q_j)\, V^j\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \sigma^{i\cdot}_{\cdot j} V^j\,\|_i\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \frac{1}{2}\rho \overset{(E)}{m}{}^{i\cdot}_{\cdot j} L_{i\cdot}^{\cdot j}\,\mathrm{d}\Omega• \tag{4}$$

将运动方程[1]

$$\rho \dot{V}_j = \sigma^{i\cdot}_{\cdot j}\,\|_i + q_j$$

代入上式, 则式(4) 的第一项可写为:

$$\int_\Omega (\sigma^{i\cdot}_{\cdot j}\,\|_i + q_j)\, V^j\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \rho \dot{V}_j V^j\,\mathrm{d}\Omega = \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{1}{2}\rho V_j V^j\,\mathrm{d}\Omega = \dot{K}$$

以上证明中利用了 $\rho\,\mathrm{d}\Omega$ 在拖带系微元体积等于常数的关系• $\dot{K}$ 为变形体宏观动能的增率, 以变形后的体积计•

又利用公式[1]　　$V^j\,\|_i = L_{i\cdot}^{\cdot j} + \dot{S}_i^j$

因此式(4) 中的第二项可写为:

$$\int_\Omega \sigma^{i\cdot}_{\cdot j} V^j\,\|_i\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \sigma^{i\cdot}_{\cdot j}(L_{i\cdot}^{\cdot j} + \dot{S}_i^j)\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \underset{(a)}{\sigma^{i\cdot}_{\cdot j}} L_{i\cdot}^{\cdot j}\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \underset{(s)}{\sigma^{i\cdot}_{\cdot j}} \dot{S}_i^j\,\mathrm{d}\Omega, \tag{5}$$

在一般情况下, 为计算方便, 我们将非对称应力张量分解为对称与反对称部分, 即

$$\sigma^{i\cdot}_{\cdot j} = \frac{1}{2}\left(\sigma^{i\cdot}_{\cdot j} + \sigma^{i\cdot T}_{\cdot j}\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma^{i\cdot}_{\cdot j} - \sigma^{i\cdot T}_{\cdot j}\right) \equiv \underset{(s)}{\sigma^{i\cdot}_{\cdot j}} + \underset{(a)}{\sigma^{i\cdot}_{\cdot j}}, \tag{6}$$

其中应力下标 (s)、(a) 分别指对称和反对称分量, 对称应力和反对称应力分别与应变和整旋共轭• 对称部分使形变体发生形变, 而反对称部分使其转动•

将式(5)、(6) 代入式(4) 可得到:

$$\dot{W} = \dot{K} + \int_\Omega \frac{1}{2}\rho \overset{(E)}{m}{}^{i\cdot}_{\cdot j} L_{i\cdot}^{\cdot j}\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \underset{(a)}{\sigma^{i\cdot}_{\cdot j}} L_{i\cdot}^{\cdot j}\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \underset{(s)}{\sigma^{i\cdot}_{\cdot j}} \dot{S}_i^j\,\mathrm{d}\Omega, \tag{7}$$

如果我们定义 $\overset{(I)}{\boldsymbol{m}}$ 表示物体内部产生的体矩, 则物体所受总体矩 $\boldsymbol{m}$ 可表示为:

$$\boldsymbol{m} = \overset{(E)}{\boldsymbol{m}} + \overset{(I)}{\boldsymbol{m}}, \tag{8}$$

其中 $\overset{(I)}{\boldsymbol{m}}$ 是由于非局部效应产生的体矩•

代入动量矩平衡方程(1) 得到:

$$\sigma^{i\cdot}_{\cdot j} - \sigma_{j\cdot}^{\cdot i} + \rho\left(\overset{(E)}{m} + \overset{(I)}{m}\right)^{i\cdot}_{\cdot j} = 0• \tag{9}$$

将(9) 式代入(7) 式得:

$$\dot{W} = \dot{K} + \int_\Omega \frac{1}{2}\rho \overset{(E)}{m}{}^{i\cdot}_{\cdot j} L_{i\cdot}^{\cdot j}\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \underset{(a)}{\sigma^{i\cdot}_{\cdot j}} L_{i\cdot}^{\cdot j}\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \underset{(s)}{\sigma^{i\cdot}_{\cdot j}} \dot{S}_i^j\,\mathrm{d}\Omega =$$

$$\dot K-\int_\Omega \frac{1}{2}\rho\overset{(I)}{m}{}^{i\cdot}_{\cdot j}L^{\cdot j}_{i\cdot}\dot\Theta\,\mathrm d\Omega+\int_\Omega \underset{(s)}{\sigma}{}^{i\cdot}_{\cdot j}\dot S^j_i\,\mathrm d\Omega=$$

$$\dot K+\dot\Phi_{\underset{m}{(I)}}+\dot\Phi_{\mathrm s}=\dot K+\dot\Phi \tag{10}$$

这时由上式我们对变形能增率 $\dot\Phi$ 加以定义:

1) 当没有外加体矩 $\overset{(E)}{\boldsymbol m}$ 作用时

$$\dot\Phi=\dot\Phi_{\mathrm s}+\dot\Phi_{\mathrm a}=\int_\Omega \underset{(s)}{\sigma}{}^{i\cdot}_{\cdot j}\dot S^j_i\,\mathrm d\Omega+\int_\Omega \underset{(a)}{\sigma}{}^{i\cdot}_{\cdot j}L^{\cdot j}_{i\cdot}\dot\Theta\,\mathrm d\Omega, \tag{11}$$

其中

$$\dot\Phi_{\mathrm a}=\int_\Omega \underset{(a)}{\sigma}{}^{i\cdot}_{\cdot j}L^{\cdot j}_{i\cdot}\dot\Theta\,\mathrm d\Omega \qquad (\text{内力矩整旋能增率}), \tag{11$'$}$$

$$\dot\Phi_{\mathrm s}=\int_\Omega \underset{(s)}{\sigma}{}^{i\cdot}_{\cdot j}\dot S^j_i\,\mathrm d\Omega \qquad (\text{应变能增率})\cdot \tag{11$''$}$$

如应力为对称的, 则(11)′ 式为零•

2) 当有外加体矩 $\overset{(E)}{\boldsymbol m}$ 作用时

$$\dot\Phi=\dot\Phi_{\mathrm s}+\dot\Phi_{\underset{m}{(I)}}=\int_\Omega \underset{(s)}{\sigma}{}^{i\cdot}_{\cdot j}\dot S^j_i\,\mathrm d\Omega-\int_\Omega \frac{1}{2}\rho\overset{(I)}{m}{}^{i\cdot}_{\cdot j}L^{\cdot j}_{i\cdot}\dot\Theta\,\mathrm d\Omega, \tag{12}$$

其中

$$\dot\Phi_{\underset{m}{(I)}}=-\int_\Omega \frac{1}{2}\rho\overset{(I)}{m}{}^{i\cdot}_{\cdot j}L^{\cdot j}_{i\cdot}\dot\Theta\,\mathrm d\Omega \qquad (\text{体矩产生的整旋动能增率}), \tag{12$'$}$$

$$\dot\Phi_{\mathrm s}=\int_\Omega \underset{(s)}{\sigma}{}^{i\cdot}_{\cdot j}\dot S^j_i\,\mathrm d\Omega \qquad (\text{应变能增率})\cdot \tag{12$''$}$$

$\dot\Phi_{\underset{m}{(I)}}$ 为有体矩 $\rho\boldsymbol m$ 作用时, 引起的整旋动能增率•

将(10) 式代入能量守恒定律

$$\dot K+\dot U=\dot W+\dot Q,$$

便得到内能增率为

$$\dot U=\dot\Phi+\dot Q, \tag{13}$$

所述定理得证• 这里证明的定律, 多考虑了非对称应力所引起的内能增加•

2 有限变形力学的变分原理

当变形微小时, 我们不考虑位形变动对应力作用的影响, 同时假设体积变动略而不计, 因此采用现行的各种描述法所得到的结果, 略去高阶效应后, 看不到有何差别• 但当变形与转动为任意大时, 就应采用拖带系描述法• 因为拖带系是嵌含在变形体中, 随变形体运动, 拖带坐标面所分割的微元体在整个运动过程中都包含同一质量, 虽然微元体的形状与体积有改变, 但质量始终是守恒的• 因此用拖带系描述法建立有限变形大转动时的能量原理是合理的方法•

变形体力学的能量原理指明: 外力和体力作用于变形体的功等于动能和变形能的增量, 即 $\dot W=\dot K+\dot\Phi$, 下面分两种情况来讨论:

2.1 外加体矩不存在时

能量原理可表示为:

$$\dot K+\dot\Phi=\oint_S \boldsymbol p\cdot\boldsymbol V\,\mathrm d a+\int_\Omega \boldsymbol q\cdot\boldsymbol V\,\mathrm d\Omega\cdot \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol p$ 为表面力, $\boldsymbol q$ 为体力, $\dot K$ 为动能增率, $\dot\Phi$ 为变形能的增加率• 这时

$$\dot{\Phi}=\dot{\Phi}_s+\dot{\Phi}_a=\int_{\Omega}\sigma^{i}_{\cdot j}\dot{S}^{j}_{i}\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\sigma^{i}_{\cdot j}L^{\cdot j}_{i}\dot{\Theta}\,\mathrm{d}\Omega\tag{15}$$

从这个关系出发就可以建立不考虑外加体矩作用时有限变形力学的功率变分原理和余功率变分原理•

物体运动的每一瞬时,上式所表达的能量关系成立• 假设某一瞬时,运动达某一状态• 我们以此状态为基准,比较一切可能存在的无穷小相邻状态•

假设在变形后的位形中,保持力的大小与方向不变,而给速度、角速度和应变速率一虚变动,且假定这些虚变动满足协调条件:

$$\delta\dot{S}^{j}_{i}=\delta V^{j}\,\|_{i}-\delta(L^{\cdot j}_{i}\dot{\Theta})\tag{16}$$

又在表面 S_u 上,虚速度和已知速度相容,而在 S_p 上,力给定为 $\boldsymbol{p}$,即

$$\text{在 } S_u \text{ 上}:\ \boldsymbol{V}=\bar{\boldsymbol{V}},\ \delta\boldsymbol{V}=\boldsymbol{0};\ \text{在 } S_p \text{ 上}:\ \boldsymbol{p}=\bar{\boldsymbol{p}}\tag{17}$$

则有下列变分原理成立:在一切满足速度、角速度和应变速率协调条件及速度的表面条件的可能形变状态中,真实应力状态满足运动方程和表面力条件,使得泛函 $\dot{J}$ 取驻值,$\delta\dot{J}=0$

$$\dot{J}=\dot{K}+\dot{\Phi}-\oint_{S_p}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}a-\int_{\Omega}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}\Omega\tag{18}$$

其次,如果虚变动的不是位移速度而是力的量,也可以证明余功率原理•

上述定理为不考虑外加体矩作用时的有限变形功率变分原理和余功率变分原理• 详细证明参见文献[5]•

2.2　有外加体矩作用时　能量原理可表示为:

$$\dot{K}+\dot{\Phi}=\oint_{S}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V})\,\mathrm{d}a+\int_{\Omega}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\rho\overset{(E)}{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{L}\dot{\Theta}\,\mathrm{d}\Omega$$

这时变形能增率 $\dot{\Phi}$ 可表示为:

$$\dot{\Phi}=\int_{\Omega}\sigma^{i}_{\cdot j}\delta\dot{S}^{j}_{i}\,\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega}\frac{1}{2}\rho\overset{(I)}{m}{}^{i}_{\cdot j}\delta(L^{\cdot j}_{i}\dot{\Theta})\,\mathrm{d}\Omega\tag{19}$$

则有下列变分原理成立:在一切满足速度、角速度和应变速率协调条件和速度的表面条件的可能形变状态中,其真实应力状态满足动量方程、力矩应力平衡方程以及表面力条件,使得下列泛函 $\dot{J}$ 取得驻值,即 $\delta\dot{J}=0$

$$\dot{J}=\dot{K}+\dot{\Phi}-\oint_{S}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V})\,\mathrm{d}a-\int_{\Omega}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega}\rho\overset{(E)}{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{L}\dot{\Theta}\,\mathrm{d}\Omega,\tag{20}$$

证明:

$$\begin{aligned}\delta\dot{J}=\ &\delta\dot{K}+\int_{\Omega}\sigma^{i}_{\cdot j}\,\delta\dot{S}^{j}_{i}\,\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega}\frac{1}{2}\rho\overset{(I)}{m}{}^{i}_{\cdot j}\delta(L^{\cdot j}_{i}\dot{\Theta})\,\mathrm{d}\Omega-\oint_{S}(\boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{V})\,\mathrm{d}a-\\&\int_{\Omega}\boldsymbol{q}\cdot\delta\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega}\rho\overset{(E)}{\boldsymbol{m}}\cdot\delta(\boldsymbol{L}\dot{\Theta})\,\mathrm{d}\Omega\end{aligned}\tag{21}$$

由于

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\sigma^{i}_{\cdot j}\,\delta V^{j}\,\|_{i}\,\mathrm{d}\Omega=\ &\int_{\Omega}(\sigma^{i}_{\cdot j}\delta V^{j})\,\|_{i}\,\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega}\sigma^{i}_{\cdot j}\,\|_{i}\delta V^{j}\,\mathrm{d}\Omega=\\&\int_{S_u+S_p}\sigma^{i}_{\cdot j}\,\delta V^{j}n_{i}\,\mathrm{d}a-\int_{\Omega}\sigma^{i}_{\cdot j}\,\|_{i}\delta V^{j}\,\mathrm{d}\Omega=\int_{S_p}P_{j}\,\delta V^{j}\,\mathrm{d}a-\int_{\Omega}\sigma^{i}_{\cdot j}\,\|_{i}\,\delta V^{j}\,\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

上式最后积分中,由于在 S_u 上 V 给定,故该部分积分值为零•

再则

$$\sigma^{i\cdot}_{\cdot j}L_{i\cdot}^{\cdot j} = \sigma^{ij}L_{ij} = -\sigma^{ij}L_{ji} = -\sigma^{ji}L_{ij} = -\sigma_{j\cdot}^{\cdot i}L_{i\cdot}^{\cdot j},$$

故有

$$\sigma^{i\cdot}_{\cdot j}L_{i\cdot}^{\cdot j} = \frac{1}{2}(\sigma^{i\cdot}_{\cdot j} - \sigma_{j\cdot}^{\cdot i})L_{i\cdot}^{\cdot j}.$$

由此知

$$\int_\Omega \sigma^{i\cdot}_{\cdot j}\,\delta(L_{i\cdot}^{\cdot j}\circledast)\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \frac{1}{2}(\sigma^{i\cdot}_{\cdot j} - \sigma_{j\cdot}^{\cdot i})\,\delta(L_{i\cdot}^{\cdot j}\circledast)\,\mathrm{d}\Omega,$$

综上可以证明

$$\int_\Omega \sigma^{i\cdot}_{\cdot j}\,\delta\succ_{i}^{\cdot j}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \sigma^{i\cdot}_{\cdot j}\,\delta(V^j\|_i - L_{i\cdot}^{\cdot j}\circledast)\,\mathrm{d}\Omega =$$

$$\int_{S_p} P_j\,\delta V^j\,\mathrm{d}a - \int_\Omega \sigma^{i\cdot}_{\cdot j}\|_i\,\delta V^j\,\mathrm{d}\Omega - \frac{1}{2}\int_\Omega(\sigma^{i\cdot}_{\cdot j} - \sigma_{j\cdot}^{\cdot i})\,\delta(L_{i\cdot}^{\cdot j}\circledast)\,\mathrm{d}\Omega,$$

而 $$\overset{(E)}{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{L} = \overset{(E)}{m}{}^k L_k = \frac{1}{2}\varepsilon^{kij}\overset{(E)}{m}_{ij}L_k = \frac{1}{2}\overset{(E)}{m}_{ij}L^{ij} = \frac{1}{2}\overset{(E)}{m}{}^{i\cdot}_{\cdot j}L_{i\cdot}^{\cdot j} \tag{22}$$

将以上结果代入式(21),得到

$$\delta J\succ = \int_{S_p}(P_j - P_j)\,\delta V^j\,\mathrm{d}a + \int_\Omega(\rho W_j - \sigma^{i\cdot}_{\cdot j}\|_i - q_j)\,\delta V^j\,\mathrm{d}\Omega -$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\Big[(\sigma^{i\cdot}_{\cdot j} - \sigma_{j\cdot}^{\cdot i}) + \rho(\overset{(I)}{m}{}^{i\cdot}_{\cdot j} + \overset{(E)}{m}{}^{i\cdot}_{\cdot j})\Big]\,\delta(L_{i\cdot}^{\cdot j}\circledast)\,\mathrm{d}\Omega$$

由于

$$m^{i\cdot}_{\cdot j} = \overset{(I)}{m}{}^{i\cdot}_{\cdot j} + \overset{(E)}{m}{}^{i\cdot}_{\cdot j},$$

则上式可写为

$$\delta J\succ = \int_{S_p}(P_j - P_j)\,\delta V^j\,\mathrm{d}a + \int_\Omega(\rho W_j - \sigma^{i\cdot}_{\cdot j}\|_i - q_j)\,\delta V^j\,\mathrm{d}\Omega -$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega[(\sigma^{i\cdot}_{\cdot j} - \sigma_{j\cdot}^{\cdot i}) + \rho m^{i\cdot}_{\cdot j}]\,\delta(L_{i\cdot}^{\cdot j}\circledast)\,\mathrm{d}\Omega.$$

上式中如应力状态满足:

1) 动量方程;

2) 力矩应力方程;

3) 表面上给定力的条件.

则有 $\delta J\succ 0$,即为所求证.

其次,假使当形变达到某一状态时,虚变动的不是位移速度而是力的量,也可以证明余功率原理.

上述定理为不考虑外加体矩作用时的有限变形功率变分原理和余功率变分原理.

综上所述,我们进一步补充、完善了有限变形功率变分原理和余功率变分原理. 它们适用于运动过程的每一瞬态.

3 结 束 语

本文采用拖带坐标系描述法,应用有限变形S_R分解定理,将体力矩重新定义为内外两种体力矩之和,给出了变形能增率的表达形式,并补充推导了有体力矩作用下的有限变形功率变分原理和余功率原理,为有限变形力学的非线性有限元分析做了准备,同时也为解决工程实际中的大变形和大转动问题提供了理论基础.

[参 考 文 献]

[1] 陈至达. 有理力学[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1988.
[2] 陈至达. 杆、板、壳大变形理论[M]. 北京: 科学技术出版社, 1994,
[3] 赵玉祥, 顾玉祥, 李欢秋. 大变形对称弹性理论的广义变分原理[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(9): 767~ 774.
[4] 陈至达. 连续介质有限变形几何场论. 清华大学学报, 1979, **19**(4): 44~ 57.
[5] 宋彦琦. 非对称弹性力学及其变分原理研究[D]. 博士学位论文. 北京: 中国矿业大学(北京校区), 1999.

Variational Principles of Asymmetric Elasticity Theory of Finite Deformation

Song Yanqi, Chen Zhida
(Mechanics Department, China University of Mining and Technology, Beijing Campus, Beijing 100083, P R China)

Abstract: In this paper, based on the finite deformation S_R decomposition theorem, the definition of the body moment is renewed as the sum of its internal and external. The expression of the increment rate of the deformation energy is derived and the physical meaning is clarified. The power variational principle and the complementary power variational principle for finite deformation mechanics are supplemented and perfected.

Key words: body moment; deformation energy; finite deformation; variation principle