

文章编号: 1000_0887(1999) 11_1121_07

多重孔隙介质的有效应力定律^{*}

陈 勉¹, 陈至达²

(1. 石油大学, 北京 102200; 2. 中国矿业大学(北京校区), 北京 100083)

(谨以此文纪念尊敬的导师陈至达教授逝世|周年——陈勉)

摘要: 通过对双重孔隙介质有效应力的研究, 建立了多重孔隙介质条件下的有效应力定律, 发现了有效应力定律的唯一性依赖于孔隙介质本构关系的假设, 提出了多重孔隙介质有效应力定律的所有可能形式。

关 键 词: 多重孔隙介质; 孔隙; 裂隙; 有效应力

中图分类号: TU452 文献标识码: A

引 言

有效应力定律对于描述孔隙流体压力作用下的孔隙介质的力学响应十分重要。Terzaghi [1923]首先将有效应力的概念引入饱和土壤中。Terzaghi 发现以下事实:(1) 若外部静水应力 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 和孔隙压力都增加了同样的量, 则材料的体积几乎不变;(2) 在剪切破坏中, 虽然如果仅增加法向应力, 剪切强度有相当的增加, 但如果法向应力和孔隙压力都增加同样的量, 剪切强度并不增加。因此 Terzaghi[1943]认为孔隙流体压力是一种“中性应力”(neutral stress), 并将有效应力定义为应力与中性应力的差值。

对于单孔介质(single porosity medium), 有效应力张量 σ_{ij} 的一般形式为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + k p_p \delta_{ij}, \quad (1)$$

其中 σ_{ij} 为施加应力, p_p 为孔隙流体压力, δ_{ij} 为 Kronecker 符号, k 为常数。

Geertsma(1975) 和 Skempton(1961) 指出

$$k = 1 - \frac{k}{k_s}, \quad (2)$$

其中, k 为干孔隙材料的体积模量, k_s 为无孔隙材料的体积模量。

此结论被 Nur 和 Byerlee(1971) 严格导出。

对于单孔各向异性介质, Carroll(1979) 和 Thompson 和 Willis(1991) 讨论了相应的有效应力定律。

虽然有效应力对于单孔介质看来已经比较完善, 但这种有效应力形式对于裂隙性孔隙介质并不适用。在裂隙性孔隙介质中, 大多数的流体储存在孔隙中, 但裂缝性渗透率远远大于孔

* 收稿日期: 1999_07_09

作者简介: 陈勉(1962~), 男, 教授, 博士导师, 中国岩石力学与工程学会理事, 中国岩石力学与工程学会深层岩石力学委员会副主任, 研究方向: 岩石力学、石油工程和有限变形力学。

隙的渗透率(Tuncay 和 Corapcioglu, 1995)• 这导致在同一单元点出现两种不同的压力: 裂隙中的流体压力和孔隙中的流体压力• Barenblatt 等(1960)首次导出了应用于天然裂缝性孔隙介质的双孔模型(double porosity)• 对于双孔介质和更复杂的多重介质, 其有效应力定律的数学形式及唯一性尚无讨论• 本文将试图讨论这一问题•

1 双孔介质的有效应力定律

裂缝性孔隙介质可用双孔介质模型描述, 介质被分为三个部分: 固体相 Ω_s , 孔隙中的流体相 Ω_p 和裂隙中的流体相 Ω_f , 如图 1 所示•

假设固体相 Ω_s , 孔隙固体相 $\Omega_s + \Omega_p$, 裂隙固体相 $\Omega_s + \Omega_f$ 和裂隙孔隙固体相 $\Omega_s + \Omega_p + \Omega_f$ 均为均匀各向同性线性弹性物质•

对于固体相介质 Ω_s , 本构方程为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E_s} [(1 + \nu_s) \sigma_{ij} - \nu_s \Theta \delta_{ij}], \quad (3)$$

其中 ε_{ij} 为应变张量; σ_{ij} 为应力张量; $\Theta = \sigma_{kk}$ 为应力第一不变量; E_s , ν_s 分别为固体相介质的弹性模量和 Poisson 比•

对于孔隙固体相介质 $\Omega_s + \Omega_p$, 其本构方程为

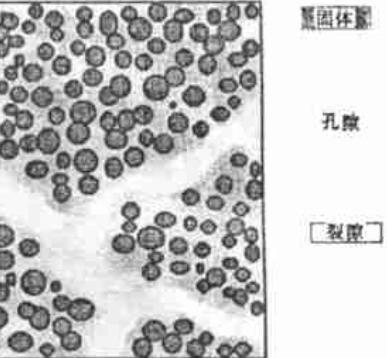


图 1 双孔介质单元

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E_{sp}} [(1 + \nu_{sp}) \sigma_{ij} - \nu_{sp} \Theta \delta_{ij}], \quad (4)$$

其中, E_{sp} 和 ν_{sp} 分别代表孔隙固体相介质的弹性模量和 Poisson 比•

对于裂隙固体相介质 $\Omega_s + \Omega_f$, 其本构方程为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E_{sf}} [(1 + \nu_{sf}) \sigma_{ij} - \nu_{sf} \Theta \delta_{ij}], \quad (5)$$

其中, E_{sf} 和 ν_{sf} 分别代表裂隙孔隙固体相介质的弹性模量和 Poisson 比•

对于裂隙孔隙固体相介质 $\Omega_s + \Omega_p + \Omega_f$, 其本构方程为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E_{spf}} [(1 + \nu_{spf}) \sigma_{ij} - \nu_{spf} \Theta \delta_{ij}], \quad (6)$$

其中, E_{spf} 和 ν_{spf} 分别代表裂隙孔隙固体相介质的弹性模量和 Poisson 比•

在联合施加应力 σ_{ij} , 孔隙流体压力 p_p 和裂隙流体压力 p_f 的情况下, 我们将分别分析三种不同情况下的应力状态•

第一种情况: 考虑裂隙孔隙介质 $\Omega_s + \Omega_p + \Omega_f$ 的情况• 引入裂隙孔隙固体模量 E_{spf} 和 ν_{spf} , 并施加应力 $\sigma_{ij} + (p_p + p_f) \delta_{ij}$, 由方程(6) 可得其应变

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{E_{spf}} [(1 + \nu_{spf}) \sigma_{ij} - \nu_{spf} \Theta \delta_{ij}] + \frac{1 - 2\nu_{spf}}{E_{spf}} (p_p + p_f) \delta_{ij}, \quad (7)$$

第二种情况: 考虑裂隙固体介质 $\Omega_s + \Omega_f$ 并且施加外力 $-p_p \delta_{ij}$ • 引入裂隙固体介质模量 E_{sf} 和 ν_{sf} , 由方程(5) 可得其应变

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = - \left(\frac{1 - 2\nu_{sf}}{E_{sf}} \right) p_p \delta_{ij}, \quad (8)$$

第三种情况: 考虑孔隙固体介质 $\Omega_s + \Omega_p$, 并且施加外力 $-p_f \delta_{ij}$ • 引入孔隙固体介质模量

E_{sp} 和 ν_{sp} , 由方程(4) 可得其应变

$$\varepsilon_{ij}^{(3)} = - \left(\frac{1 - 2\nu_{sp}}{E_{sp}} \right) p_f \delta_{ij} \bullet \quad (9)$$

将一、二、三种情况叠加, 相当于在裂隙孔隙固体外边界 $\partial\Omega$ 施加应力 σ_{ij} , 在孔隙边界 $\partial\Omega_p$ 施加流体压力 p_p , 在裂隙边界施加流体压力 p_f , 其总变形为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & \frac{1}{E_{spf}} [(1 + \nu_{spf}) \sigma_{ij} - \nu_{spf} \Theta \delta_{ij}] + \frac{1 - 2\nu_{spf}}{E_{spf}} (p_p + p_f) \delta_{ij} - \\ & \left(\frac{1 - 2\nu_{sf}}{E_{sf}} \right) p_p \delta_{ij} - \left(\frac{1 - 2\nu_{sp}}{E_{sp}} \right) p_f \delta_{ij} = \\ & \frac{1}{E_{spf}} [(1 + \nu_{spf}) \sigma_{ij} - \nu_{spf} \Theta \delta_{ij}], \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \beta_p p_p \delta_{ij} + \beta_f p_f \delta_{ij}, \quad (11)$$

方程(11) 即为裂隙孔隙双重介质的有效应力定律。 σ_{ij} 为有效应力。上式中有效应力系数 β_p 和 β_f 分别为

$$\beta_p = \left(1 - \frac{K_{spf}}{K_{sp}} \right), \quad (12)$$

$$\beta_f = \left(1 - \frac{K_{spf}}{K_{sf}} \right). \quad (13)$$

干双重孔隙介质的体积压缩模量为

$$K_{spf} = \frac{E_{spf}}{3(1 - 2\nu_{spf})}. \quad (14)$$

孔隙固体介质的体积压缩模量为

$$K_{sp} = \frac{E_{sp}}{3(1 - 2\nu_{sp})}. \quad (15)$$

裂隙固体介质的体积压缩模量为

$$K_{sf} = \frac{E_{sf}}{3(1 - 2\nu_{sf})}. \quad (16)$$

特别地, 考虑单孔介质—孔隙固体的情况, 令双孔介质中 $p_p = p_f$, $\Omega_f = 0$, 于是双孔裂隙孔隙介质的体积压缩模量与单孔孔隙固体介质的体积压缩模量相等, 骨架固体介质的体积压缩模量与单孔裂隙固体介质的体积压缩模量相等

$$K_{spf} = K_{sp}, \quad K_{sf} = K_s. \quad (17)$$

于是, 在此情况下有效应力定律(11) 变为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \alpha_1 p_p \delta_{ij}. \quad (18)$$

其中

$$\alpha_1 = \beta_p + \beta_f = \left(1 - \frac{K_{sp}}{K_s} \right). \quad (19)$$

这与 Geertsma(1957) 和 Skempton(1961) 的结论是一致的。

需要指出, 有效应力定律(11) 并不是双孔介质有效应力定律的唯一形式。下面我们给出双孔介质有效应力定律第二种形式。

我们同样首先分析三种不同情况的应力状态。

第一种情况, 考虑裂隙孔隙介质 ($\Omega_s + \Omega_p + \Omega_f$), 并施加应力 $\sigma_{ij} + p_f \delta_{ij}$, 可得其应变

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{E_{\text{spf}}} [(1 + \nu_{\text{spf}}) \sigma_{ij} + \nu_{\text{spf}} \Theta \delta_{ij}] + \frac{1 - 2\nu_{\text{spf}}}{E_{\text{spf}}} \delta_{ij} p_f \bullet \quad (20)$$

第二种情况, 考虑孔隙固体介质 ($\Omega_s + \Omega_p$), 并施加应力 $(p_p - p_f) \delta_{ij}$, 其应变为

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{1 - 2\nu_p}{E_{\text{sp}}} (p_p - p_f) \bullet \quad (21)$$

第三种情况, 考虑固体介质 (Ω_s), 并施加应力 $-p_p \delta_{ij}$, 其应变为

$$\varepsilon_{ij}^{(3)} = \left[\frac{1 - 2\nu_s}{E_s} \right] p_p \bullet \quad (22)$$

将一、二、三种情况叠加, 相当于在裂隙孔隙固体外边界 $\partial \Omega$ 施加应力 σ_{ij} , 在孔隙边界 $\partial \Omega_p$ 施加流体压力 p_p , 在裂隙边界施加流体压力 p_f , 其总变形为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} = \\ & \frac{1}{E_{\text{spf}}} [(1 + \nu_{\text{spf}}) \sigma_{ij} + \nu_{\text{spf}} \Theta \delta_{ij}] + \frac{1 - 2\nu_f}{E_{\text{spf}}} p_f \delta_{ij} + \\ & \frac{1 - 2\nu_p}{E_{\text{sp}}} (p_p - p_f) \delta_{ij} - \frac{1 - 2\nu_s}{E_s} p_p \delta_{ij} = \\ & \frac{1}{E_{\text{spf}}} [(1 + \nu_{\text{spf}}) \sigma_{ij} + \nu_{\text{spf}} \Theta \delta_{ij}], \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + (\gamma_p p_p + \gamma_f p_f) \delta_{ij} \bullet \quad (24)$$

方程(24)即为裂隙孔隙双重介质的第二有效应力定律• σ_{ij} 为有效应力• 上式中有效应力系数 γ_p 和 γ_f 分别为

$$\gamma_p = \frac{K_{\text{spf}}}{K_{\text{sp}}} - \frac{K_{\text{spf}}}{K_s}, \quad (25)$$

$$\gamma_f = 1 - \frac{K_{\text{spf}}}{K_s}. \quad (26)$$

特别地, 考虑单孔介质—孔隙固体的情况, 令双孔介质中 $p_p = p_f$, $\Omega_f = 0$, 同样有

$$K_{\text{spf}} = k_{\text{sp}}, \quad K_{\text{sf}} = K_s. \quad (27)$$

于是, 在此情况下有效应力定律(24)变为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \alpha_2 p_p \delta_{ij}, \quad (28)$$

其中

$$\alpha_2 = \gamma_p + \gamma_f = \left(1 - \frac{K_{\text{sp}}}{K_s} \right). \quad (29)$$

这与 Geertsma (1957) 和 Skempton (1961) 的结论也是一致的•

2 多重孔隙介质的有效应力定律

对于多重孔隙介质, 我们假设具有 n 重不同类型的孔隙, 分别占据空间 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n$, 其对应的边界为 $\partial \Omega_1, \partial \Omega_2, \partial \Omega_3, \dots, \partial \Omega_n$ • 在一般情况下, 多重孔隙介质除受有外部应力 σ_{ij} 的作用外, 在各重孔隙内部还受有孔隙流体压力 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 的作用, 这些孔隙流体压力分别被称为第一孔隙压力、第二孔隙压力、第三孔隙压力、……、第 n 孔隙压力•

为了研究多重孔隙介质有效应力定律, 我们仍将 n 重孔隙介质的受力分解为 $n+1$ 种情况分别研究• 其中一种简单的分解方式是将 n 重孔隙介质分为:

- 1) $\Omega_s + \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \dots + \Omega_{n-2} + \Omega_{n-1} + \Omega_n ,$
- 2) $\Omega_s + \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \dots + \Omega_{n-2} + \Omega_{n-1} ,$
- 3) $\Omega_s + \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \dots + \Omega_{n-2} ,$
- n) $\Omega_s + \Omega_1 ,$
- n+1) $\Omega_s .$

假设在以上 1), 2), ..., n+1) 情况, 介质为线性各向同性, 在 1) 的外边界上作用外力 $\sigma_{ij} + p_{(1)}\delta_{ij}$, 在 2) 的外边界上作用外力 $p_{(2)}\delta_{ij}$, 在 3) 的外边界上作用外力 $p_{(3)}\delta_{ij}$, ..., 在 n) 的外边界上作用外力 $p_{(n)}\delta_{ij}$, 在 n+1) 的外边界上作用外力 $p_{(n+1)}\delta_{ij}$ 。在一般情况下对于多重孔隙介质单元, 除受有外力 σ_{ij} 外, 还在各重孔隙内部还受有各重孔隙压力 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 。若考虑多重孔隙介质单元是由 1), 2), ..., n), n+1) 情况组合而成, 则:

$$\left. \begin{array}{l} p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)} + \dots + p_{(n)} + p_{(n+1)} = \mathbf{0}, \\ p_{(2)} + p_{(3)} + \dots + p_{(n)} + p_{(n+1)} = -p_n, \\ p_{(3)} + \dots + p_{(n)} + p_{(n+1)} = -p_{n-1}, \\ \dots \dots \dots \\ p_{(n)} + p_{(n+1)} = -p_2 \\ p_{(n+1)} = -p_1 \end{array} \right\} \quad (30)$$

解上述方程, 得

$$\left. \begin{array}{l} p_{(n+1)} = -p_1, \\ p_{(n)} = p_1 - p_2, \\ p_{(n-1)} = p_2 - p_3, \\ \dots \dots \\ p_{(3)} = p_{(n-2)} - p_{(n-1)}, \\ p_{(2)} = p_{(n-1)} - p_n, \\ p_{(1)} = p_n \end{array} \right\} \quad (31)$$

仿效双重介质有效应力定律, 对多重孔隙介质的本构方程

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \frac{1}{E_{s, 1, \dots, n}} [(1 + V_{s, 1, \dots, n})] \sigma_{ij} + V_{s, 1, \dots, n} \Theta] + \\ &\quad \frac{1 + 2V_{s, 1, \dots, n}}{E_{s, 1, \dots, n}} p_n \delta_{ij} + \frac{1 + 2V_{s, 1, \dots, (n-1)}}{E_{s, 1, \dots, (n-1)}} (-p_n + p_{n-1}) \delta_{ij} + \\ &\quad \frac{1 + 2V_{s, 1, \dots, (n-2)}}{E_{s, 1, \dots, (n-2)}} (-p_{n-1} + p_{n-2}) \delta_{ij} + \dots + \\ &\quad \frac{1 + 2V_{s, 1}}{E_{s, 1}} (-p_2 + p_1) \delta_{ij} + \frac{1 + V_s}{E_s} (-p_1) \delta_{ij} = \\ &\quad \frac{1}{E_{s, 1, \dots, n}} \left\{ [(1 + V_{s, 1, \dots, n})] \sigma_{ij} + V_{s, 1, \dots, n} \Theta \right\} + \\ &\quad \left\{ \left(1 - \frac{K_{s, 1, \dots, n}}{K_{s, 1, \dots, (n-1)}} \right) p_n + \left(\frac{K_{s, 1, \dots, n}}{K_{s, 1, \dots, (n-1)}} - \frac{K_{s, 1, \dots, n}}{K_{s, 1, \dots, (n-2)}} \right) p_{n-1} + \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{K_{s, 1, \dots, n}}{K_{s, 1, 2}} - \frac{K_{s, 1, \dots, n}}{K_s} \right) p_2 + \left(\frac{K_{s, 1, \dots, n}}{K_s} - \frac{K_{s, 1, \dots, n}}{K_s} \right) p_1 \right\} \delta_{ij} = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{E_{s,1,\dots,n}} \left[(1 + \nu_{s,1,\dots,n}) \sigma_{ij} + \nu_{s,1,\dots,n} \Theta \right] \cdot \quad (32)$$

n 重孔隙介质的有效应力

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + (\gamma_n p_n + \gamma_{n-1} p_{n-1} + \dots + \gamma_1 p_1) \delta_{ij}, \quad (33)$$

其中有效应力系数为

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{K_{s,1,\dots,n}}{K_{s,1}} - \frac{K_{s,1,\dots,n}}{K_s}, \quad Y_2 = \frac{K_{s,1,\dots,n}}{K_{s,1,2}} - \frac{K_{s,1,\dots,n}}{K_{s,1}}, \dots, \\ Y_{n-1} &= \frac{K_{s,1,\dots,n}}{K_{s,1,\dots,(n-1)}} - \frac{K_{s,1,\dots,n}}{K_{s,1,\dots,(n-2)}}, \quad Y_n = 1 - \frac{K_{s,1,\dots,n}}{K_{s,1,\dots,(n-1)}}. \end{aligned} \quad (34)$$

体积压缩模量

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{1 - 2\nu_s}{E_s}, \quad K_{s,1} = \frac{1 - 2\nu_{s,1}}{E_{s,1}}, \dots, \\ K_{s,1,\dots,n-1} &= \frac{1 - 2\nu_{s,1,\dots,n-1}}{E_{s,1,\dots,n-1}}, \quad K_{s,1,\dots,n} = \frac{1 - 2\nu_{s,1,\dots,n}}{E_{s,1,\dots,n}}. \end{aligned} \quad (35)$$

应该指出, 对于 n 重孔隙介质的有效应力定律, 方程(33) 并非唯一形式, 如若将 n 重孔隙介质受力分解为

- 1) $\Omega_s + \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \dots + \Omega_{n-1} + \Omega_n,$
- 2) $\Omega_s + \Omega_2 + \Omega_3 + \dots + \Omega_{n-1} + \Omega_n,$
- 3) $\Omega_s + \Omega_3 + \dots + \Omega_{n-1} + \Omega_n,$
-
- n) $\Omega_s + \Omega_n,$
- n+1) $\Omega_s,$

将得到另外形式的有效应力定律。

多重孔隙介质的有效应力定律形式是不唯一的, 这取决于对部分孔隙介质线性各向同性的假设。自然界的多重孔隙介质结构是千差万别的, 因此, 其对应的有效应力定律应在符合实际条件的假设下得到。

[参 考 文 献]

- [1] Terzaghi K. Die berechnung der durchlassigkeitziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungsscheinungen[J]. Sber Akad Wiss Wien , 1923, **132**(2): 105.
- [2] Terzaghi K. Theoretical Soil Mechanics [M]. New York: Wiley, 1943.
- [3] Geertsma J. The effect of fluid pressure decline on volumetric changes of porous rocks[J]. Trans AIME , 1957, **210**(1): 331~ 340.
- [4] Skempton A W. Effective Stress in Soils , Concrete and Rock, in Pore Pressure and Suction in Soils [M]. London: Butterworths, 1961.
- [5] Nur A, Byerlee J D. An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids[J]. J Geophys Res , 1971, **76**(26): 6414~ 6419.
- [6] Carroll M M. An effective stress law for anisotropic elastic deformation[J]. Journal of Geological Research , 1979, **84**(13): 7510~ 7512.
- [7] Thompson M, Willis J R. A reformation of the equations of anisotropic poroelasticity[J]. Journal of Applied Mechanics , 1991, **58**(11): 612~ 616.
- [8] Tuncay K, Corapcioglu M Y. Effective stress principle for saturated fractured porous media[J]. Wa-

- ter Resources Research , 1995, **31**(12): 3103~ 3106.
- [9] Barenblatt G I, Zheltov Yu P, Kochina I N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rock[J]. J Appl Math Mech , 1960, **24**(5): 1286~ 1303.
- [10] Lade P V, De Boer R. The concept of effective stress for soil, concrete and rock [J]. Geotechnique, 1977, **47**(1): 61~ 78.

Effective Stress Laws for Multi_Porosity Media

Chen Mian¹, Chen Zhida²

(1. Rock Mechanics Lab , University of Petroleum , Changping , Beijing 102200, P R China ;

2 China University of Mining &Technology , Beijing Campus , Beijing 100083, P R China)

Abstract: In this paper, effective stress for double porosity elasticity model is presented by means of stress analysis for double porosity media elements. It is found that the effective stress law is not unique, it depends on the hypothesis of constitutive equations for multi_porosity media. Diversified effective stress laws for multi_porosity are developed.

Key words: multi_porosity media; porosity; fracture; effective stress