文章编号: 1000_0887(1999) 11_1183_04

由真值向量求异或开关函数

洪晴华

(宁波大学 管理学系, 浙江宁波 315211)

(程昌 钧推 荐)

摘要: 由于卡诺图受到变量个数的限制, 在数字电路中由真值向量推求函数表达式未完美解决 在本文中, 通过定义向量的两种收缩性, 得到了由已知函数真值向量推求异或开关函数的简捷方法, 该方法不受变量个数的限制, 且易于电脑操作

关 键 词: 异或开关函数; Kronecker 积; 真值向量; Reed_Muller 函数
中国分类号: O183 1; TN791 文献标识码: A

异或开关函数本质上是模 2 代数多项式, 它引起重视基于以下两个理由[1]:

1) 在故障检测、可靠性分析、图象信号处理等方面有广泛应用

2) 较之 与、或、非 系统, 它具有良好的代数性质

对于 2 值模代数函数, 在 n 个变量下假设函数表达式为[2] :

$$f(x_n, x_{n-1}, \quad, x_2, x_1) = \sum_{j=0}^{N} a_j x_n^{j_n} \quad x_2^{j_2} x_1^{j_1},$$

f 为 L^n 到L 的映射, 其中 $a_j, x_i, j_i \quad L = \{0, 1\}, i = 1, \quad, n, N = 2^n - 1, x_i^{j_i} = \begin{cases} 1 & (j_i = 0) \\ x_i & (j_i = 1) \end{cases}$,

$j_{10} = \quad j_n \quad j_2 j_{1\,2}$ 即j 的 10 进制表示等于$j_n \quad j_2 j_1$ 的二进制表示

例如 $n = 2$ 时, $f(x_2, x_1) = a_0 x_2^0 x_1^0 + a_1 x_2^0 x_1^1 + a_2 x_2^1 x_1^0 + a_3 x_2^1 x_1^1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2 x_1$

记函数值向量(真值向量) $f(x_n, \quad, x_1)] = f] = \boldsymbol{d}, f(x_n, \quad, x_1)] = (f(0, \quad, 0), f(0, \quad, 0, 1), \quad, f(1, \quad, 1)) = (b_0, b_1, \quad, b_N)$

如果已知$f(x_n, \quad, x_1)]$, 如何求出f 的表达式?这是数字电路中的公开问题, 卡诺图有受变量数的局限性 本文通过引入向量的两种收缩性, 提出利用函数的真值向量表示及化简异或开关函数的简明方法 该方法不受变量数量的限制, 且利于电脑操作

1 向量的收缩性

对真值向量$f]$, 我们引入以下定义

收稿日期: 1998_06_01; 修订日期: 1999_07_13
基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目(9401)
作者简介: 洪晴华(1941~) , 女, 副教授, 研究方向: 近世代数, 开关理论等, 已发表论文 20 余篇.

定义 1 2^k 乘收缩 设$f]=f_2]\quad f_1]$, 其中 表示Kronecker乘积(K积), 如果$f_1]$ 为2^k 维向量, 称$f]$ 可以2^k 乘收缩 $k=1$ 时, 称$f]$ 可以2乘收缩

定义 2 完全2乘收缩 如果$f]$ 可以经$n-1$次2乘收缩, 最后收缩为n 个二元组的K积, 称$f]$ 可以完全2乘收缩

例 1 $f]=(00000110)=(01)\quad(0110)$, 所以$f]$ 可2^2 乘收缩

例 2 $f]=(00001010, 00000000)=(10)\quad(00001010)=(10)\quad(01)\quad(1010)=(10)\quad(01)\quad(11)\quad(10)$, $f]$ 可以完全2乘收缩

定义 3 2^k 和收缩 如果2^n 维向量$f]$ 将2^k 个元素作为一节$(k<n)$, 分为2^{n-k} 节, 如果第一节为$a_0a_1\quad a_{2^k-1}$, 其余各节为$(a_0+i)(a_1+i)\quad(a_{2^k-1}+i)(i\quad L)$中的一种; 规定对应关系为$a_0a_1\quad a_{2^k-1}\quad 0$, 则$(a_0+i)(a_1+i)\quad(a_{2^k-1}+i)\quad i$, $f]$ 将收缩为2^{n-k} 维向量, 称$f]$ 可以2^k 和收缩 如果第一节为(a_0, a_1), 其余各节为$(a_0+i)(a_1+i)$, 称$f]$ 可以2和收缩

定义 4 完全2和收缩 如果$f]$ 经$n-1$次2和收缩, 最后收缩为一个二元组, 则称$f]$ 可以完全2和收缩

例 3 $f]=(00010001000111101110111000011110)$, 令$(0001)\quad 0$, $f]\quad \boldsymbol{d}_1=(0001, 1101)$, 所以$f]$ 可以2^2 和收缩

例 4 $\boldsymbol{d}=f]=(0110\ 0110\ 1001\ 1001, 1001\ 1001\ 0110\ 0110)$ 令$(01)\quad 0$, $\boldsymbol{d}\quad \boldsymbol{d}_1=(0101, 1010, 1010, 0101)$; 令$(01)\quad 0$, $\boldsymbol{d}_1\quad \boldsymbol{d}_2=(0011, 1100)$; 令$(00)\quad 0$, $\boldsymbol{d}_2\quad \boldsymbol{d}_3=(0110)$; 令$(01)\quad 0$, $\boldsymbol{d}_3\quad \boldsymbol{d}_4=(01)$, 所以$f]$ 可以完全收缩

定义 5 向量的H和 如果 是m 维向量 $=(\ _1,\quad,\ _m)$, 是n 维向量 $=(\ _1,\quad,\ _n)$, 与 是H和记作

$$_h\qquad \boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{I}_m\qquad,$$

其中$\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{I}_m$ 分别是元素均为1的n 维和m 维向量, + 为模2加,

例 5 $=(1011)$, $=(100)$

$$_h=(1011)\quad(111)+(1111)\quad(100)=$$
$$(111000111111)+(100100100100)=(011100011011)$$

2 函数的积分解与和分解

可定义异或开关函数$f(x_n,\quad, x_1)$ 的积分解与和分解

定义 6 如果$f(x_n,\quad, x_1)$ 可以写成

$f(x_n,\quad, x_1)=f_{n,k+1}(x_n,\quad, x_{k+1})\quad f_{k,1}(x_k,\quad, x_1)$ 称f 可以积分解 如果$f(x_n,\quad, x_1)=f_n(x_n)\quad f_{n-1}(x_{n-1})\quad f_1(x_1)$, 称$f$ 可以完全积分解

定义 7 如果$f(x_n,\quad, x_1)$ 可以写成

$f(x_n,\quad, x_1)=f_{n,k+1}(x_n,\quad, x_{k+1})+f_{k,1}(x_k,\quad, x_1)$, 称$f$ 可以和分解, 如果$f(x_n,\quad, x_1)=f_n(x_n)+f_{n-1}(x_{n-1})+\quad+f_1(x_1)$, 称$f$ 为线性函数

易证以下引理成立:

引理 1 K积与H和都满足结合律, 但都不满足交换律

引理 2 如果$f_1]$, $f_2]$ 可以完全和收缩, 则$f_1+f_2]$ 可以完全和收缩

引理 3[3] $f(x_n,\quad, x_1)=f_{n,j+1}(x_n,\quad, x_{j+1})\quad f_{j,1}(x_j,\quad, x_1)$ 的充要条件为$f(x_n,\quad,$

$x_1)]=f_{n,j+1}(x_n, \ , x_{j-1})] \quad f_{j,1}(x_j, \ , x_1)]$，其中$f_{n,j+1}]$ 为2^{n-j} 维向量，$f_{j,1}]$ 为2^j 维向量

引理 4 $f(x_n, \ , x_1)]=f_n(x_n)] \quad f_{n-1}(x_{n-1})] \qquad f_1(x_1)]$ 的充要条件为$f(x_n, \ , x_1)=f_n(x_n) \quad f_{n-1}(x_{n-1}) \qquad f_1(x_1)$

引理 4 可以通过引理 3 用归纳法得到证明

引理 5 若$f(x_n, \ , x_1)=(\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2)$ ($\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_2$ 都为2^{n-1} 维向量)，则

$$f(x_n, \ , x_1)]=(1,0) \quad \boldsymbol{d}_1+(0,1) \quad \boldsymbol{d}_2$$

证 由$f(x_n, \ , x_1)=x_n \ f(0, x_{n-1}, \ , x_1)+x_n \ f(1, x_{n-1}, \ , x_1)$，所以$f(x_n, \ , x_1)]=x_n \ f(0, x_{n-1}, \ , x_1)]+x_n \ f(1, x_{n-1}, \ , x_1)]=(1,0) \quad \boldsymbol{d}_1+(0,1) \quad \boldsymbol{d}_2$ 下面定理表达了真值向量的收缩性与函数表达式的关系

定理 1 对于函数$f(x_n, \ , x_1)$，以下三个结论是等价的：

1) $f(x_n, \ , x_1)=f_n(x_n)+f_{n-1}(x_{n-1})+ \quad +f_1(x_1)$，

2) $f(x_n, \ , x_1)]$ 可以完全和收缩，

3) $f(x_n, \ , x_1)]=f_n(x_n)] \quad {}_h f_{n-1}(x_{n-1})] \quad {}_h \quad {}_h f_1(x_1)]$

证明 a) 1) 2)

因为$f=f_n(x_n)+ \quad +f_1(x_1)=f_n(x_n)x^0_{n-1} \quad x^0_1+x^0_n f_{n-1}(x_{n-1})x^0_{n-2} \quad x^0_1+ \quad + x^0_n \quad x^0_2 f_1(x_1)$ 注意到$x^0_i]=\boldsymbol{I}_2$，由引理 4 得到

$$f]=f_n(x_n)] \quad \boldsymbol{I}_{2^{n-1}}+\boldsymbol{I}_2 \quad f_{n-1}(x_{n-1})] \quad \boldsymbol{I}_{2^{n-2}}+ \quad +\boldsymbol{I}_{2^{n-2}} \quad f_2(x_2)] \quad \boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{I}_{2^{n-1}} \quad f_1(x_1)]$$

显然上述每项都可以完全收缩，由引理 2 知$f(x_n, \ , x_1)]$ 可以完全收缩

b) 2) 3)

因为$f(x_n, \ , x_1)]$ 可以完全和收缩，故$f]$ 可以 2 和收缩，对于任意 $j \ \{0, 1, \ , 2^{n-1}-1\}$，必存在 $t_j \ L$，使得$(a_{2j}, a_{2j+1})=(a_0+t_j, a_1+t_j)=(a_0+t_j) \ {}_h(0, a_0+a_1)=(a_{2j}) \ {}_h(0, a_0+a_1)$，所以$f]=(a_0, a_2, \ , a_{2^n-2}) \ {}_h(0, a_0+a_1)= \ {}_1 \ {}_h \ {}_1$，其中 ${}_1$是$f]$ 经一次和收缩后得到的2^{n-1}维向量，由于$f]$ 可以完全和收缩，故 ${}_1$ 可以继续2和收缩，利用引理1，$f_1]= \ {}_1 \ {}_h \ {}_1=(\ {}_2 \ {}_h \ {}_2) \ {}_h \ {}_1= \quad = \ {}_n \ {}_h \ {}_{n-1} \ {}_h \quad {}_h \ {}_1=f_n(x_n)] \ {}_h \quad {}_h f_1(x_1)]$

c) 3) 1)

因为$f(x_n, \ , x_1)]=f_n(x_n)] \ {}_h \quad {}_h f_1(x_1)]$，由引理 1

$$f(x_n, \ , x_1)]=f_n(x_n)] \ {}_h(f_{n-1}(x_{n-1})] \ {}_h \quad {}_h f_1(x_1)])=f_n(x_n)] \quad \boldsymbol{I}_{2^{n-1}}+ \boldsymbol{I}_2 \quad (f_{n-1}(x_{n-1})] \ {}_h \quad {}_h f_1(x_1)])=f_n(x_n)] \quad \boldsymbol{I}_{2^{n-1}}+\boldsymbol{I}_2 \quad f_{n-1,1}(x_{n-1}, \ , x_1)]$$

故$f(x_n, \ , x_1)=f_n(x_n)x^0_{n-1} \quad x^0_1+x^0_n f_{n-1,1}(x_{n-1}, \ , x_1)=f_n(x_n)+f_{n-1,1}(x_{n-1}, \ , x_1)$ 由递推归纳得到1) 成立 (证毕)

3 由$f]$ 推求$f(x_n, \ , x_1)$ 表达式的实现

可以通过以下步骤，对任意真值向量$f]$，推求其函数表达式：

步骤 1 $f]$ 是否可以2乘收缩?如果能，则$f]=\boldsymbol{d}_2 \quad \boldsymbol{d}_1$，其中$\boldsymbol{d}_1=f_1(x_1)]$，$\boldsymbol{d}_2=f_{n,2}(x_n, \ , x_2)]$，对$\boldsymbol{d}_2$ 继续步骤 1；如果不能，则转步骤 2

步骤 2 $f]$ 是否可以2^k 和收缩(需对 k 由小到大顺序考察)?如果能，则$f]=\boldsymbol{d}_2 \ {}_h\boldsymbol{d}_1$，其中$\boldsymbol{d}_2=f_{n,k+1}(x_n, \ , x_{k+1})]$，$\boldsymbol{d}_1=f_k(x_k, \ , x_1)]$，对$\boldsymbol{d}_1$，$\boldsymbol{d}_2$分别继续步骤 1；如果不能，则转步

骤3

步骤3 将 $f] = (01) \quad \boldsymbol{d}_2 + (10) \quad \boldsymbol{d}_1$(实际上 $\boldsymbol{d}_2 = f(1, x_{n-1}, \quad , x_1)]$, $\boldsymbol{d}_1 = f(0, x_{n-1}, \quad , x_1)]$, 对 d_1, d_2 继续步骤1

以上步骤直到 $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2$ 都是2维向量则停止

例6 已知 $f(x_6, x_5, \quad , x_1)] = (00000000\ 00000000\ 00000100\ 00000000\ 01010100\ 00000001\ 00000001\ 00000001)$, 求 $f(x_6, x_5, \quad , x_1)$

解 由步骤1, $f] = (0000\ 0000\ 0010\ 0000\ 1110\ 0001\ 0001\ 0001) \quad (01) = f_1] \quad (01)$

因为 $f_1]$ 不能再进行积收缩及和收缩

由步骤3, 令 $f_1] = (01) \quad f_{11}] + (10) \quad f_{01}] = (01) \quad (1110\ 0001\ 0001\ 0001) + (10) \quad (0000\ 0000\ 0010\ 0000)$,

所以 $f_1 = x_6 f_{11}(x_5, x_4, x_3, x_2) + x_6 f_{01}(x_5, x_4, x_3, x_2)$

由步骤1, $f_{01}] = (0000000000100000) = (0010) \quad (0010) = (01) \quad (10) \quad (01) \quad (10)$

所以 $f_{01} = x_5 x_4 x_3 x_2$

由步骤2, $f_{11}] = (1110000100010001) = (0111) \quad {}_h(1110) = \boldsymbol{d}_2 \quad {}_h \boldsymbol{d}_1$,

$\boldsymbol{d}_2 = (0111) = (01) \quad (11) + (10) \quad (01)$ 得 $\boldsymbol{d}_2 = x_5 + x_5 x_4]$,

$\boldsymbol{d}_1 = (1110) = (01) \quad (10) + (10) \quad (11)$ 得 $\boldsymbol{d}_1 = x_3 x_2 + x_3]$,

所以 $f = [x_6(x_5 + x_5 x_4 + x_3 x_2 + x_3) + x_6(x_5 x_4 x_3 x_2)] x_1$

[参 考 文 献]

[1] 吴训威. 多值逻辑电路设计原理[M]. 杭州: 杭州大学出版社, 1994.

[2] Green D H. Families of Reed_Muller canonical forms[J]. International Journal of Electronics, 1991, **70** (3): 259~ 280.

[3] Fei Benchu, Hong Qinhua, Zhuang Nan. Calculation of ternary mixed polarity function vector[A]. In: Proceedings of the 23th International Symposium on Multiple_valued Logic [C], Sacramento California, IEEE Computor Society, 1993, 236~ 238.

Configuration From Truth Vector to XOR Function

Hong Qinghua

(Department of Management, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang 315211, P R China)

Abstract: Kamaugh maps are wildly used in the logic synthesis. However, the number of the variable it can deal with is limited. In this paper, two kinds of function shrinking techniques are proposed, and a fast algorithm to configure a truth vector into a XOR function is realized. There is no variable number limitation for this algorithm.

Key words: XOR function; Kronecker product; truth vector; Reed_Muller function