

文章编号: 1000-0887(1999) 10-1004-11

主被动阻尼层合板结构的自由振动 和阻尼特性分析*

高坚新, 沈亚鹏

(西安交通大学 建筑工程力学学院 国家重点实验室, 西安 710049)

摘要: 给出了含主被动阻尼非对称复合材料层合板结构的振动微分方程; 得到了在压电材料和高粘弹材料作主被动阻尼层情况下, 简支层合板结构自由振动的自然频率和损失因子的解析解; 分析了正逆向压电效应对自然频率和损失因子的影响

关键词: 主被动约束; 自由振动; 损失因子

中图分类号: O328; TB123 文献标识码: A

前 言

被动阻尼控制已广泛地应用于结构的减振、降噪中。其中一个常用的方法就是被动约束层阻尼方法,即在约束层与被控结构之间有一层高粘弹性材料,振动过程中粘弹层消耗了振动能量,达到减振效果。虽然传统的被动控制具有可靠性好、简单、经济等优点,但它有一个重要缺陷——即非智能化,只要阻尼设计好,就不可改变。这样就限制了它在高速、高精度结构中的应用。近年来,主动阻尼控制已引起人们的广泛注意和研究。目前,常用的方法是,用压电类智能材料作为约束层(如图 1),利用压电材料的机电耦合效应,达到改变阻尼层剪切变形,改变其能耗的作用。这种主动约束层控制不但具有被动约束简单可靠的优点,又具有随环境变化能自适应控制的优点。可以使系统在较宽频带上获得阻尼特性。目前,国外在这方面的研究很活跃, Baz (1993)^[1], Shen (1994)^[2] 分别基于 Mead 和 Markus (1969)^[3] 以及 Ditaranto (1965)^[4] 的剪切模型,导出了含主动约束层梁的运动微分方程,分析了主动约束阻尼方法的阻尼效果及系统的可控性、可观性和稳定性等问题, Shen (1994)^[5] 用伽辽金近似解方法分析了简支各向同性层合板主动阻尼的作用效果。结果表明主动阻尼具有良好的阻尼效果。最近, Baz (1997)^[6], Shen (1997)^[7] 又分别用变分方法导出了梁结构的控制微分方程,提出了边界控制策略,对主动约束机理做了研究,另外,还有许多学者如: Baz (1995)^[8], Vasundara (1996)^[9], 本文作者 (1998)^[10] 等用有限元方法对主动阻尼层结构进行了研究。

在人们设计主动约束层阻尼控制结构时,首先就要知道结构各阶振动频率和损失因子;由于机电耦合效应,压电层有正逆向压电效应,因此,压电层的正逆向压电效应对结构各阶振动

* 收稿日期: 1998_04_28; 修订日期: 1998_07_10

基金项目: 国家自然科学基金资助课题(59635140); 国家教委博士点基金资助课题; 航空基金资助课题; 西安交大博士论文基金资助课题

作者简介: 高坚新(1962~), 山东人, 副教授, 博士。

频率和损失因子的影响也应加以分析。本文给出了压电类智能材料和高粘弹性材料作主被动约束层情况下有限长非对称层合板的自由振动控制方程。得到了简支边界条件下, 压电层在正、逆向压电效应两种情况下, 电势沿压电层厚度方向的实际分布, 给出了相应的运动控制方程; 首次给出了这两种情况下简支层合板结构的自然频率和损失因子的解析解。并分析了正逆向压电效应对自然频率和损失因子的影响。通过几个实例验证和应用了本文给出的结果。

1 基本方程

本文研究的主动约束层阻尼结构如图 1 所示, 在分析中作如下假设: 压电层和基体都可看作经典板; 粘弹层只是剪切变形, 粘弹材料特性可用复剪切模量 $G_2^* = G_2(1 + i\eta_2)$ 表示, η_2 是粘弹材料的损失因子; 各层之间理想结合, 无相对滑动。

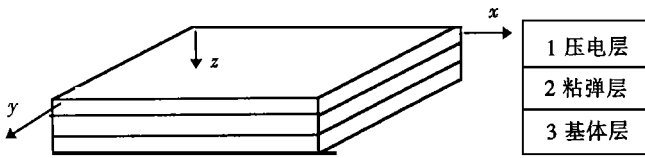


图 1 主被动阻尼板示意图

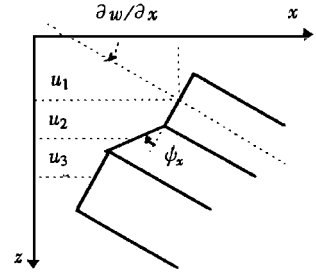


图 2 各层位移关系示意图

1.1 各层之间位移关系

建立整体坐标系如图 1, 根据粘弹层与基体及压电层界面之间的位移连续条件, 可求得各层位移之间的关系。下面以 xz 坐标面为例说明(如图 2)。层合板相对 x 轴的转角为 $\partial w / \partial x$, 粘弹层的相对剪切转角为 ϕ_x , 设 $\partial w / \partial x$ 、 ϕ_x 以顺时针转动为正, 由粘弹层上、下表面的位移连续条件得:

$$\begin{cases} u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} = u_2 + \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right), \\ u_3 + \frac{h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial x} = u_2 - \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right), \end{cases}$$

解得:

$$\phi_x = - (h(\partial w / \partial x) + u_3 - u_1) / h_2, \quad h = (h_1 + h_3) / 2 + h_2 \quad (1)$$

同理可得: $\phi_y = - (h\partial w / \partial x + v_3 - v_1) / h_2$ 。

1.2 几何方程

由经典板理论, 在小变形下基体和压电层的几何方程为:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \partial u_i / \partial x \\ \partial v_i / \partial y \\ \partial u_i / \partial y + \partial v_i / \partial x \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}_i + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中, $i = 1$ 表示压电层, $i = 3$ 表示基体。

1.3 本构关系

如果基体是复合材料板, 由 N 层组成, 则基体横截面上合力和合力矩可写为:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}_3 \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} N_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ B_3 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^0 \\ K \end{bmatrix}, \quad (3)$$

A 、 B 、 D 分别是基体的拉伸、耦合、弯曲刚度。

对于压电层, 设压电材料是横观各向同性的, 各向同性面在 xy 面内, 则压电本构关系为:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_1 &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

引入电势: $E_1 = -\partial \Phi / \partial x$, $E_2 = -\partial \Phi / \partial y$, $E_3 = -\partial \Phi / \partial z$, 并沿厚度方向积分得:

$$N_1 = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}_1 = \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_1 dz = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} e_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \\ \int_{-h_1/2}^{h_1/2} e_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}_1 = \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_1 z dz = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} e_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial z} z dz \\ \int_{-h_1/2}^{h_1/2} e_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial z} z dz \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

如果是粘弹层有:

$$\tau_{zx} = G_2^* \phi_x, \quad \tau_{zy} = G_2^* \phi_y. \quad (7)$$

1.4 自由振动运动方程

对于压电层, 取中面的微面积 $dx dy$ 研究(如图3)。

τ_{zx} 、 τ_{zy} 是粘弹层内的剪应力。在 x 、 y 、 z 方向建立动静力平衡方程, 得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(1)}}{\partial y} + \tau_{zx}^{(2)} &= 0, \\ \frac{\partial N_{xy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} + \tau_{zy}^{(2)} &= 0, \\ \frac{\partial Q_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^{(1)}}{\partial y} &= \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

在 x 、 y 轴方向建立力矩平衡方程, 得:

$$\frac{\partial M_{xy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_y^{(1)}}{\partial y} - Q_y^{(1)} + \frac{h_1}{2} \tau_{zy}^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial M_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{(1)}}{\partial y} - Q_x^{(1)} + \frac{h_1}{2} \tau_{zx}^{(2)} = 0 \quad (9)$$

由(9)式解出 $Q_x^{(1)}$ 、 $Q_y^{(1)}$ 代入(8)式得:

$$\frac{\partial^2 M_x^{(1)}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{(1)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial \tau_{xz}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^{(2)}}{\partial y} \right) = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (10)$$

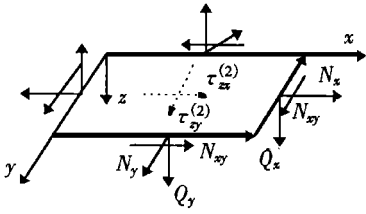


图 3 压电层中面上的力及力矩

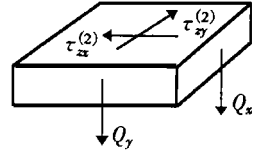
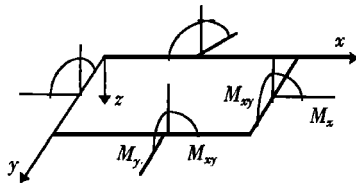


图 4 粘弹层微元上受力

对于粘弹层, 取一微元体研究(如图 4), 由 z 轴方向动力平衡得:

$$\partial Q_x^{(2)} / \partial x + \partial Q_y^{(2)} / \partial y = \rho_2 h_2 \partial^2 w / \partial t^2, \quad (11)$$

由 x, y 轴力矩平衡得:

$$Q_x^{(2)} = h_2 \tau_{xz}^{(2)}, \quad Q_y^{(2)} = h_2 \tau_{zy}^{(2)}. \quad (12)$$

对于基体, 其中面微面积受力情况与压电层相似, 只是 $\tau_{xz}^{(2)}, \tau_{zy}^{(2)}$ 方向与压电层相反, 仿照压电层可得方程

$$\left. \begin{aligned} \partial N_x^{(3)} / \partial x + \partial N_{xy}^{(3)} / \partial y - \tau_{xz}^{(2)} &= 0, \\ \partial N_{xy}^{(3)} / \partial x + \partial N_y^{(3)} / \partial y - \tau_{zy}^{(2)} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_x^{(3)}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{(3)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{(3)}}{\partial y^2} + \frac{h_3}{2} \left(\frac{\partial \tau_{xz}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^{(2)}}{\partial y} \right) &= \rho_3 h_3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

整理得结构的运动方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(1)}}{\partial y} + \tau_{xz}^{(2)} &= 0, \quad \frac{\partial N_{xy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} + \tau_{zy}^{(2)} = 0, \\ \frac{\partial N_x^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(3)}}{\partial y} - \tau_{xz}^{(2)} &= 0, \quad \frac{\partial N_{xy}^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial N_y^{(3)}}{\partial y} - \tau_{zy}^{(2)} = 0, \\ \frac{\partial^2 M_x^{(1)}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{(1)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_x^{(3)}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{(3)}}{\partial x \partial y} + \\ \frac{\partial^2 M_y^{(3)}}{\partial y^2} + h \left(\frac{\partial \tau_{xz}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^{(2)}}{\partial y} \right) &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中 $h = (h_1 + h_3)/2 + h_2, \rho = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3$.

对压电层除满足运动方程外, 还应满足电荷平衡方程:

$$\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

取复合材料基体为特殊正交各向异性层对称层合板, 此时基体的拉弯耦合刚度及拉剪耦合 A_{16}, A_{26} 和弯扭耦合 D_{16}, D_{26} 为零. 即

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}_3, \quad B_3 = \mathbf{0}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}_3 \quad (16)$$

将(1)、(2)、(3)、(5)、(6)、(7)代入(14)式得用位移表示的运动方程为:

$$\left. \begin{aligned}
 & A_{11}^1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + A_{66}^1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + (A_{12}^1 + A_{66}^1) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} - \frac{G_2^*}{h_2} \left(u_3 - u_1 + h \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\
 & - \int_{-h_1/2}^{h_1/2} e_{31} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dz, \\
 & A_{66}^1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + A_{22}^1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + (A_{12}^1 + A_{66}^1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} - \frac{G_2^*}{h_2} \left(v_3 - v_1 + h \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\
 & - \int_{-h_1/2}^{h_1/2} e_{31} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dz, \\
 & A_{11}^3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + A_{66}^3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + (A_{12}^3 + A_{66}^3) \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} + \frac{G_2^*}{h_2} \left(u_3 - u_1 + h \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \\
 & A_{66}^3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + A_{22}^3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + (A_{12}^3 + A_{66}^3) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} + \frac{G_2^*}{h_2} \left(v_3 - v_1 + h \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \\
 & \frac{G_2^*}{h_2} h \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) - \left[(D_{11}^1 + D_{11}^3) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (D_{22}^1 + D_{22}^3) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] - \\
 & 2(D_{12}^1 + 2D_{66}^1 + D_{12}^3 + 2D_{66}^3) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{G_2^* h^2}{h_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho (w^*)^2 = \\
 & \int_{-h_1/2}^{h_1/2} e_{31} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) z \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz.
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

2 运动方程的解

设板是简支的, 有边界条件:

$$x = 0, a, v_1 = v_3 = 0, w = \Phi = 0; y = 0, b, u_1 = u_3 = 0, w = \Phi = 0 \quad (18)$$

方程(17) 满足边界条件的解是:

$$\left. \begin{aligned}
 u_1(x, y, t) &= U_1 \cos(px) \sin(qy) e^{i\omega^* t}, \\
 v_1(x, y, t) &= V_1 \sin(px) \cos(qy) e^{i\omega^* t}, \\
 u_3(x, y, t) &= U_3 \cos(px) \sin(qy) e^{i\omega^* t}, \\
 v_3(x, y, t) &= V_3 \sin(px) \cos(qy) e^{i\omega^* t}, \\
 w(x, y, t) &= W \sin(px) \sin(qy) e^{i\omega^* t}, \\
 \Phi(x, y, z, t) &= \Phi_i(z) \sin(px) \sin(qy) e^{i\omega^* t},
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中, ω^* 是复频率, $(\omega^*)^2 = \omega^2(1 + \eta i)$, η 是结构的损失因子, $p = m\pi/a$, $q = n\pi/b$. U_1 、 V_1 、 U_3 、 V_3 、 W 是振动模态的分布系数.

将电势 Φ 代入压电电荷平衡方程(15) 式, 确定 $\Phi(z)$ 沿 z 轴方向的分布规律. 因:

$$\left. \begin{aligned}
 D_1 &= -\epsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad D_2 = -\epsilon_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\
 D_3 &= e_{31} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial v_1}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \epsilon_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial z},
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

电荷平衡方程变为:

$$\epsilon_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \epsilon_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \epsilon_{33} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + e_{31} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (21)$$

将(19) 式代入得:

$$[-(\epsilon_{11}p^2 + \epsilon_{22}q^2)\Phi(z) + \epsilon_{33}\Phi''(z) - e_{31}(p^2 + q^2)W]\sin(px)\cos(qy)e^{i\omega^*t} = 0, \quad (22)$$

得:

$$\epsilon_{33}\Phi''(z) - (\epsilon_{11}p^2 + \epsilon_{22}q^2)\Phi(z) = e_{31}(p^2 + q^2)W, \quad (23)$$

得通解:

$$\Phi(z) = C_1e^{az} + C_2e^{-az} - \frac{e_{31}(p^2 + q^2)}{\epsilon_{11}p^2 + \epsilon_{22}q^2}W, \quad a = \sqrt{\frac{\epsilon_{11}p^2 + \epsilon_{22}q^2}{\epsilon_{33}}}, \quad (24)$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \left[C_1e^{az} + C_2e^{-az} - \frac{e_{31}(p^2 + q^2)}{\epsilon_{11}p^2 + \epsilon_{22}q^2}W \right] \sin(px)\sin(qy)e^{i\omega^*t}. \quad (25)$$

如果板作自由振动, 则电场应满足边界条件

1) 如果开路(压电层作感知片), 则 $D_3 = 0$ (因自由电荷密度等于 0);

2) 如果闭路(压电层做作动片), 则 $\Phi = 0$ 。

由电场边界条件可确定 C_1, C_2 , 首先分析开路情况

$$D_3 = e_{31} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial v_1}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \epsilon_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (26)$$

将(19)式代入得:

$$a\epsilon_{33}(C_1e^a - C_2e^{-a}) + e_{31}(pU_1 + qV_1) - e_{31}z(p^2 + q^2)W = 0. \quad (27)$$

对压电板, 当 $z = \pm h_1/2, D_3 = 0$,

求解得:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{e_{31}(pU_1 + qV_1)}{a\epsilon_{33}(e^{ah_1/2} + e^{-ah_1/2})} + \frac{e_{31}h_1(p^2 + q^2)W}{2a\epsilon_{33}(e^{ah_1/2} - e^{-ah_1/2})}, \\ C_2 &= \frac{e_{31}(pU_1 + qV_1)}{a\epsilon_{33}(e^{ah_1/2} + e^{-ah_1/2})} + \frac{e_{31}h_1(p^2 + q^2)W}{2a\epsilon_{33}(e^{ah_1/2} - e^{-ah_1/2})}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

闭路情况下, 当 $z = \pm h_1/2, \Phi = 0$,

代入得:

$$C_1 = C_2 = \frac{e_{31}(p^2 + q^2)}{(\epsilon_{11}p^2 + \epsilon_{22}q^2)(e^{ah_1/2} - e^{-ah_1/2})}W. \quad (29)$$

将(25)式代入(17)式得

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] dz &= (C_1 - C_2)(e^{ah_1/2} - e^{-ah_1/2})p \cos(px) \sin(qy) e^{i\omega^*t}, \\ \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] dz &= (C_1 - C_2)(e^{ah_1/2} - e^{-ah_1/2})q \sin(px) \cos(qy) e^{i\omega^*t}; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] dz &= -(C_1 + C_2) \left[\left[\frac{h_1}{2} - \frac{1}{a} \right] e^{ah_1/2} + \left[\frac{h_1}{2} + \frac{1}{a} \right] e^{-ah_1/2} \right] p^2 \sin px \sin qy e^{i\omega^*t}, \\ \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] dz &= -(C_1 + C_2) \left[\left[\frac{h_1}{2} - \frac{1}{a} \right] e^{ah_1/2} + \left[\frac{h_1}{2} + \frac{1}{a} \right] e^{-ah_1/2} \right] q^2 \sin px \sin qy e^{i\omega^*t}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

将 C_1, C_2 的表达式代入(30)、(31) 并将(19) 代入(17) 式, 就可得到开路和闭路情况下, 简支层合板自由振动的运动方程。

开路情况下简支层合板自由振动的运动方程:

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \left[-A_{11}^1 p^2 - A_{66}^1 q^2 + \frac{G_2^*}{h_2} \right] U_1 - (A_{12}^1 + A_{66}^1) pq V_1 - \frac{G_2^*}{h_2} U_3 - \frac{G_2^* hp}{h_2} W \right\} \times \\ & \cos(px) \sin(qy) e^{i\omega^* t} = C_{11} (p^2 U_1 + pq V_1) \cos(px) \sin(qy) e^{i\omega^* t}, \\ & \left\{ - (A_{12}^1 + A_{66}^1) pq U_1 + \left[-A_{66}^1 p^2 - A_{22}^1 q^2 + \frac{G_2^*}{h_2} \right] V_1 - \frac{G_2^*}{h_2} V_3 - \frac{G_2^* hq}{h_2} W \right\} \times \\ & \sin(px) \cos(qy) e^{i\omega^* t} = C_{11} (pq U_1 + q^2 V_1) \sin(px) \cos(qy) e^{i\omega^* t}, \\ & \left\{ -\frac{G_2^*}{h_2} U_1 + \left[-A_{11}^3 p^2 - A_{66}^3 q^2 + \frac{G_2^*}{h_2} \right] U_3 - (A_{12}^3 + A_{66}^3) pq V_3 + \frac{G_2^* hp}{h_2} W \right\} \times \\ & \cos(px) \sin(qy) e^{i\omega^* t} = 0, \\ & \left\{ -\frac{G_2^*}{h_2} V_1 - (A_{12}^3 + A_{66}^3) pq U_3 + \left[-A_{66}^3 p^2 - A_{22}^3 q^2 + \frac{G_2^*}{h_2} \right] V_3 + \frac{G_2^* hq}{h_2} W \right\} \times \\ & \sin(px) \cos(qy) e^{i\omega^* t} = 0, \\ & \left\{ -\frac{G_2^* hp}{h_2} U_1 - \frac{G_2^* hq}{h_2} V_1 + \frac{G_2^* hp}{h_2} U_3 + \frac{G_2^* hq}{h_2} V_3 - [(D_{11}^1 + D_{11}^3) p^4 + (D_{22}^1 + D_{11}^3) p^4 + \right. \\ & \left. D_{11} p^2 q^2 + \frac{G_2^* h^2}{h_2} (p^2 + q^2)] W \right\} \sin(px) \cos(qy) e^{i\omega^* t} = \\ & [(p^2 + q^2) C_{22} - \rho(\omega^*)^2] W \sin(px) \cos(qy) e^{i\omega^* t}, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

其中:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{2e_{31}^2 (e^{ah_1/2} - e^{-ah_1/2})}{a\epsilon_{33} (e^{ah_1/2} + e^{-ah_1/2})}, \quad D_1 = 2(D_{12}^1 + 2D_{66}^1 + D_{12}^3 + 2D_{66}^3), \\ C_{22} &= \frac{e_{31}^2 h_1 (p^2 + q^2)}{a\epsilon_{33} (e^{ah_1/2} - e^{-ah_1/2})} \left[\left(\frac{h_1}{2} - \frac{1}{a} \right) e^{ah_1/2} + \left(\frac{h_1}{2} + \frac{1}{a} \right) e^{-ah_1/2} \right]. \end{aligned}$$

由方程(32)有非零解的条件, 可得开路情况下, 板的自由振动复频率特征方程为:

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & F_{45} \\ F_{51} & F_{52} & F_{53} & F_{54} & F_{55} - \rho(\omega^*)^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (33)$$

因 F_{11}, \dots, F_{55} 的表达式较烦, 这里省略。

将上式按第 5 行展开得:

$$(\omega^*)^2 = \frac{1}{\rho F_5} (-F_{51} F_1 + F_{52} F_2 - F_{53} F_3 + F_{54} F_4 - F_{55} F_5), \quad (34)$$

其中, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 为对应的伴随矩阵。

则结构的自然频率和损失因子为:

$$\omega = \sqrt{\text{Re}(\omega^*)^2}, \quad \eta = \text{Im}(\omega^*)^2 / \text{Re}(\omega^*)^2. \quad (35)$$

同理可得闭路情况下简支层合板自由振动的运动微分方程和相应的复频率特征方程, 这里省略。

3 计算实例和分析

例1 为验证本文方法及计算程序的正确性,首先选 Conor D. Johnson(1982)^[11] 给出的一个实例。该例是一对称的各向同性板,中间夹有粘弹材料组成的被动阻尼结构,其结构参数为: $a = 0.3048 \text{ m}$, $b = 0.3480 \text{ m}$, $h_1 = h_3 = 0.762 \text{ mm}$, $h_2 = 0.254 \text{ mm}$, $E_1 = E_3 = 6.89 \times 10^{10} \text{ Pa}$, $\rho_1 = \rho_3 = 2.74 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 0.999 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\nu_1 = \nu_3 = 0.3$, $\eta_2 = 0.5$, $G_2 = 0.896 \times 10^6 \text{ Pa}$ 。

表1给出了本文的计算结果与原文给出的计算结果,可以看出本文得到的解与原文给出的解吻合得很好。

表1 本文结果与其他计算结果的比较

模态 m, n	原文的理论解 ^[11]		原文的有限元解 ^[11]		本文解析解	
	频率 ω/Hz	损失因子 η	频率 ω/Hz	损失因子 η	频率 ω/Hz	损失因子 η
1, 1	60.3	0.190	57.4	0.176	60.2	0.190
1, 2	115.4	0.203	113.2	0.188	115.2	0.203
2, 1	130.6	0.199	129.3	0.188	130.4	0.199
2, 2	178.7	0.181	179.3	0.153	178.4	0.181
1, 3	195.7	0.174	196.0	0.153	195.4	0.174

例2 基体选用铝,其弹性模量 $E_3 = 70 \text{ GPa}$, $\rho_3 = 1.104 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\nu_3 = 0.33$, $G^* = 0.896(1 + 0.5i) \text{ MPa}$ 。压电材料选用 PZT_5H, $E_1 = 49 \text{ GPa}$, $\rho_1 = 7.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\nu_1 = 0.3$, $e_{31} = e_{32} = -6.5 \text{ C/m}^2$, $\epsilon_{11} = \epsilon_{12} = 1.503 \times 10^{-8} \text{ F/m}$, $\epsilon_{33} = 1.3 \times 10^{-8} \text{ F/m}$ 。粘弹材料同上例。所研究的板的尺寸为,长度 $a = 0.3 \text{ m}$,宽度 $b = 0.4 \text{ m}$,各层厚度分别为, $h_1 = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}$, $h_2 = 2.0 \times 10^{-3} \text{ m}$, $h_3 = 3.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ 。

表2给出了不考虑压电影响和考虑正、逆向压电效应(开路和闭路情况下)结构的自然频率和损失因子。表3给出了压电层厚度是 $h_1 = 3 \text{ mm}$,结构其他条件不变时,结构的自然频率和损失因子。

表2 结构的自然频率和损失因子

模态 m, n	无压电影响		有压电影响			
	频率 ω/Hz	损失因子 η	频率 ω/Hz (开路)	损失因子 η (开路)	频率 ω/Hz (闭路)	损失因子 η (闭路)
1, 1	113.3	8.41×10^{-2}	113.4	8.44×10^{-2}	122.8	7.17×10^{-2}
1, 2	224.6	4.72×10^{-2}	224.8	4.73×10^{-2}	239.0	4.17×10^{-2}
1, 3	409.4	2.73×10^{-2}	409.7	2.73×10^{-2}	429.8	2.47×10^{-2}
2, 1	310.9	3.52×10^{-2}	311.1	3.52×10^{-2}	328.3	3.16×10^{-2}
2, 2	421.8	2.65×10^{-2}	422.1	2.65×10^{-2}	442.4	2.41×10^{-2}
2, 3	606.4	1.88×10^{-2}	606.9	1.87×10^{-2}	631.6	1.73×10^{-2}
3, 3	934.7	1.23×10^{-2}	934.4	1.23×10^{-2}	966.4	1.15×10^{-2}

表 3 不同压电层厚度结构的自然频率和损失因子($h_1 = 3 \text{ mm}$)

模态 m, n	无压电影响		有压电影响			
	频率 ω/Hz	损失因子 η	频率 ω/Hz (开路)	损失因子 η (开路)	频率 ω/Hz (闭路)	损失因子 η (闭路)
1, 1	98.4	8.41×10^{-2}	99.4	8.40×10^{-2}	137.6	4.37×10^{-2}
1, 2	195.1	4.65×10^{-2}	197.2	4.56×10^{-2}	256.6	2.69×10^{-2}
1, 3	355.9	2.64×10^{-2}	360.0	2.58×10^{-2}	444.3	1.69×10^{-2}
2, 1	270.1	3.43×10^{-2}	273.2	3.36×10^{-2}	345.2	2.10×10^{-2}
2, 2	366.6	2.57×10^{-2}	370.8	2.51×10^{-2}	456.6	1.65×10^{-2}
2, 3	527.3	1.81×10^{-2}	533.5	1.77×10^{-2}	638.2	1.23×10^{-2}
3, 3	812.9	1.18×10^{-2}	822.6	1.16×10^{-2}	954.3	0.86×10^{-2}

从表 3 中可以看出, 正压电效应对结构自然频率和损失因子的影响很小(小于 1%), 可以忽略。逆电效应对结构自然频率和损失因子的影响较大; 当压电层的厚度增加时, 压电效应的影响逐渐增大。从图 5 中可以看出, 压电效应对低阶模态频率和损失因子影响较大, 随着模态的增加压电效应对频率和损失因子影响逐渐减小。

例 3 压电材料和粘弹材料同例 2, 基体选用碳纤维复合材料层合板(T300/5208), 纤维铺设为 $[0_4/90_4]_s$, 其厚度为 $h_3 = 2 \text{ mm}$, 密度为 $\rho_3 = 1.579 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 其正则化刚度阵为:

$$A_3^* = \begin{bmatrix} 96.08 & 2.90 & 0 \\ 2.90 & 96.08 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix} \text{ GPa},$$

$$D_3^* = \begin{bmatrix} 160.4 & 2.90 & 0 \\ 2.90 & 37.8 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix} \text{ GPa} \cdot$$

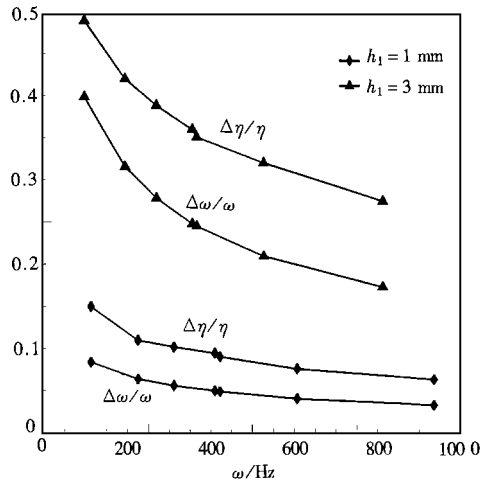


图 5 压电效应对频率和损失因子的影响

表 4 复合材料层合板的自然频率和损失因子

模态 m, n	无压电影响		有压电影响			
	频率 ω/Hz	损失因子 η	频率 ω/Hz (开路)	损失因子 η (开路)	频率 ω/Hz (闭路)	损失因子 η (闭路)
1, 1	71.6	0.160	71.7	0.160	85.9	0.111
1, 2	108.8	0.154	109.1	0.154	136.5	9.80×10^{-2}
1, 3	179.1	0.110	179.8	0.109	220.2	7.13×10^{-2}
2, 1	224.2	5.22×10^{-2}	224.5	5.20×10^{-2}	248.0	4.25×10^{-2}
2, 2	246.7	5.96×10^{-2}	247.2	5.96×10^{-2}	280.9	4.60×10^{-2}
2, 3	295.9	6.08×10^{-2}	296.8	6.04×10^{-2}	345.2	4.47×10^{-2}
3, 3	536.0	2.90×10^{-2}	537.2	2.89×10^{-2}	590.2	2.39×10^{-2}

表4给出了不考虑压电影响和考虑正、逆向压电效应(开路和闭路情况下)结构的自然频率和损失因子。压电效应对结构自然频率和损失因子的影响规律与例2相似。

4 结 论

本文给出了压电类智能材料和高粘弹性材料作主被动约束层情况下有限长非对称层合板的自由振动控制方程。得到了简支边界条件下,压电层在正、逆向压电效应两种情况下,电势沿压电层厚度方向的实际分布,给出了相应的运动控制方程;首次给出了这两种情况下简支层合板结构的自然频率和损失因子的解析解。并分析了正逆向压电效应对自然频率和损失因子的影响。当压电层做感知片时,压电效应对结构自然频率和损失因子的影响可以忽略。当压电层做作动片时,压电效应对结构自然频率和损失因子的影响较大;当压电层的厚度增加时,压电效应的影响逐渐增大。压电效应对低阶模态频率和损失因子影响较大,随着模态的增加压电效应对频率和损失因子影响逐渐减小。

[参 考 文 献]

- [1] Baz A, Ro J. Partial treatment of flexible beams with active constrained layer damping[A] . Conference of Engineering Sciences Society [C] . Charlottesville, VA: ASME_AMD, 1993, 61~ 80.
- [2] Shen I Y. Bending vibration control of composite and isotropic plates through intelligent constrained layer treatments[J] . Smart Mater Struct , 1994, 3(3) : 340~ 355.
- [3] Mead D J, Markus S. The forced vibration of a three layer damped sandwich beam arbitrary boundary conditions[J] . J Sound and Vibration , 1969, 10(2) : 163~ 175.
- [4] Ditaranto R A. Theory of the vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite length beams[J] . ASME J Applied Mechanics , 1965, 32: 881~ 886.
- [5] Shen I Y. Hybrid damping through intelligent constrained layer treatments[J] . ASME J Vibration and Acoustics , 1994, 116: 341~ 349.
- [6] Baz A. Boundary control of beams using active constrained layer damping[J] . ASME J Vibration and Acoustics , 1997, 119: 166~ 172.
- [7] Shen I Y. A variation formulation, a work-energy relation and damping mechanisms of active constrained layer treatments[J] . ASME J Vibration and Acoustics , 1997, 119: 192~ 199.
- [8] Baz A, Ro J. Optimum design and control of active constrained layer damping[J] . Trans ASME , Special 50th Anniversary Design Issue, 1995, 117: 135~ 144.
- [9] Vasundara V V, Vijay K V. Closed loop finite element modeling of active/ passive damping in structural vibration control[J] . J Smart Mater Struct , 1996, 5(5) : 685~ 694.
- [10] 田晓耕, 沈亚鹏. 主动约束阻尼结构的数值分析方法[J] . 计算力学学报, 1998, 15(4) : 423~ 428.
- [11] Johnson Conor D, Kienholz D A. Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers[J] . AIAA J , 1982, 20(9) : 1280~ 1284.

Vibration and Damping Analysis of a Composite Plate With Active and Passive Damping Layer

Gao Jianxin, Shen Yapeng

(Civil College , Xi' an Jiaotong University , Xi' an 710049, P R China)

Abstract: The equations of motion and boundary conditions governing the vibration of nonsymmetric composite plates with active and passive dampings layer are derived. The analytical solution is first obtained for frequencies and loss factors of the plates with active constrained layer damping treatments. The distributions of electric potential across the thickness of piezoelectric layer and relevant governing equations are obtained when the direct and inverse piezoelectric effects are considered. The influence of the direct and inverse piezoelectric effects on the frequencies and loss factors are investigated.

Key words: active constrain; free vibration; loss factor