

文章编号: 1000-0887(1999) 10-1025-08

# 采用新方法研究非局部理论中 I<sub>1</sub> 型 裂纹的断裂问题\*

周振功, 王 彪

(哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001)

摘要: 采用新的方法研究非局部理论中 I<sub>1</sub> 型裂纹的断裂问题, 进而确定裂纹尖端的应力状态, 这种方法就是 Schmid 方法。所得结果比艾林根研究同样问题的结果准确和更加合理, 克服了艾林根研究同样问题时遇到的数学困难。与经典弹性解相比, 裂纹尖端不再出现物理意义上不合理的应力奇异性, 并能够解释宏观裂纹与微观裂纹的力学问题。

关键词: 非局部理论; Schmid 方法; 对偶积分方程

中图分类号: O345.19 文献标识码: A

## 引 言

在文章[1, 2, 3]中, Eringen 利用非局部理论分别研究 I、II、III 型裂纹问题, 所得结果表明裂纹尖端并不存在应力奇异性, 解决了长期存在于力学研究中的一个基本问题。在文章[4, 5]中, 利用非局部理论分别研究了单裂纹和多裂纹的动态问题。在文章[6, 7]中, 利用非局部理论研究了弹性波在弹性材料板中的传播问题。这就使我们可以利用在物理意义上合理的最大应力假设来研究断裂问题, 并且非局理论将有助于我们更好地对复合材料进行分析研究。然而, Eringen<sup>[1, 2, 3]</sup>的结果并不准确, 在裂纹尖端出现不合理的应力振荡性<sup>[1]</sup>, 采用的迭代法对于大晶格参数情况, 迭代误差也较大。因此, Eringen 所采用的迭代法<sup>[1]</sup>不适用于解决这种问题。而 Eringen 在文[2, 3]中所采用的求解对偶积分方程的方法也不是合理的, 原因是在文[2, 3]中的第二类对偶积分方程的积分核是发散的。

由于以上的原因, 本文采用新的方法利用非局部理论研究 Eringen 在文献[1]中研究的同样问题, 经过富里叶变换可以把问题的求解转化为对偶积分方程的求解。在求解对偶积分方程时, 用雅可比多项式和 Schmid 方法把裂纹的表面位移展开成级数形式。这种方法与 Eringen 在文献[1, 2, 3]中采用的方法完全不同, 但能够克服 Eringen 在文献[1, 2, 3]中遇到的数学问题, 结果也比 Eringen 在文献[1]中的结果准确合理, 这也是本文的研究目的。如我们预料裂纹尖端应力不再有奇异性, 显示了裂纹尖端应力场的本来面目。结果表明: 裂纹尖端的应力场不仅与裂纹长度有关, 而且与材料的原子晶格参数有关。而经曲弹性力学解的应力强度因子仅与裂纹长度有关, 与材料的性质无关。

\* 收稿日期: 1998\_07\_02;

基金项目: 国家优秀青年研究基金资助项目(19725209)

作者简介: 周振功(1963~), 男, 教授。

## 1 非局部弹性理论的基本方程

对于均匀、各向同性的弹性物体,非局部弹性理论的线性方程为<sup>[2]</sup>:

$$\tau_{kl,k} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_{kl} = \int_V [\lambda'(|X' - X|) e_{rr}(X') \delta_{kl} + 2\mu'(|X' - X|) e_{kl}(X')] dV', \quad (2)$$

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}). \quad (3)$$

这里应力本构方程(2)与经典弹性理论应力本构方程不同之处是应力本构方程(2)中某点  $X$  的应力  $\tau_{kl}(X)$  与物体中各点的应变  $e_{kl}(X')$  都有关。对于均匀、各向同性物体有两个与距离  $|X' - X|$  有关的材料参数  $\lambda'(|X' - X|)$  和  $\mu'(|X' - X|)$ 。方程(2)中的积分是在表面积  $\partial V$  所包围的体积上进行的。在本文中材料参数  $\lambda'(|X' - X|)$  和  $\mu'(|X' - X|)$  利用文献[8,9]中假设的形式,即:

$$(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu) \alpha(|X' - X|), \quad (4)$$

$$\alpha(|X' - X|) = \alpha_0 \exp[-(\beta/a)^2 (X' - X)(X' - X)], \quad (5)$$

这里  $\beta$  是一个常数,  $a$  是材料的晶格参数,与材料的性质有关。 $\lambda$  和  $\mu$  是 Lamé 常数,  $\alpha_0$  由如下方程确定

$$\int_V \alpha(|X' - X|) dV(X') = 1. \quad (6)$$

在本文研究中,非局部弹性模量由方程(4)和(5)给出。对于二维问题,把方程(5)代入方程(6)可得:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} (\beta/a)^2. \quad (7)$$

把方程(4)和(5)代入方程(2)可得:

$$\tau_{kl}(X) = \int_V \alpha(|X' - X|) \sigma_{kl}(X') dV(X'), \quad (8)$$

这里

$$\sigma_{ij}(X') = \lambda e_{rr}(X') \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(X') = \lambda u_{r,r}(X') \delta_{ij} + \mu [u_{i,j}(X') + u_{j,i}(X')]. \quad (9)$$

方程(9)是经典虎克定律的表达式。利用格林-高斯定理把方程(9)代入到方程(1)可产生:

$$\int_V \alpha(|X' - X|) \sigma_{kl,k}(X') dV(X') - \int_{\partial V} \alpha(|X' - X|) \sigma_{kl}(X') da_k(X') = 0. \quad (10)$$

## 2 裂纹模型

设一无限大弹性平板内有一长度为  $2l$  的裂纹,当裂纹表面受均匀法向应力  $\tau_{yy} = \tau_0$  作用时(如图1所示),对平面应变情况方程(10)可以转化为如下形式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(|x' - x|, |y' - y|) \sigma_{ij,k}(x', y') dx' dy' - 2\mu \int_{-l}^l \alpha(|x' - x|, 0) \mathbf{[e_{\bar{x}}(x', 0)]} dx' = 0, \quad (11)$$

这里粗体括号表示裂纹线上的间断函数。

利用文献[1]中的方法可得

$$\{e_{2j}(x, 0)\} = 0, \quad (\text{对所有的 } x) \quad j = 1, 2 \quad (12)$$

方程(11)经富里叶变换后可得

$$-is\sigma_{ij} + d\sigma_{2j}/dy = 0, \quad j = 1, 2 \quad (13)$$

这里富里叶变换形式为

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx \quad (14)$$

与文献[1]一样,本文所研究问题的边界条件如下(对于  $y = 0$ ):

$$\tau_{xx}(x, 0) = 0, \quad \tau_{yy}(x, 0) = \tau_0, \quad |x| < l, \quad (15)$$

$$\tau_{xx}(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad |x| \geq l \quad (16)$$

另外还需附加条件

$$u = v = 0, \quad \text{当 } (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty \quad (17)$$

至此问题就归结为求解方程(13)同时满足边界条件(15~17)的解。方程(13)正是二维的 Navier 方程经富里叶变换后的形式,可以表示为:

$$\mu u_{,yy} - (\lambda + 2\mu) s^2 u - is(\lambda + \mu) v_{,y} = 0, \quad (18)$$

$$-is(\lambda + \mu) u_{,y} + (\lambda + 2\mu) v_{,yy} - s^2 \mu v = 0 \quad (19)$$

由于对称性,只用考虑第一象限的问题就可以了,因此方程(18)、(19)满足条件(17)的一般解可表示为:

$$u = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s^{-1} \left[ sA(s) + \left[ sy - \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right] B(s) \right] \exp(-sy) \sin(xs) ds, \quad (20)$$

$$v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [A(s) + yB(s)] \exp(-sy) \cos(sx) ds, \quad (21)$$

未知函数  $A(s)$  和  $B(s)$  可以通过边界条件(15)和(16)来确定,利用方程(9)可得( $y \geq 0$ ):

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{4\mu}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -sA(s) + \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} - sy \right] B(s) \right] \exp(-sy) \sin(sx) ds \quad (22)$$

利用条件(15)和(16)得:

$$B(s) = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} sA(s) \quad (23)$$

由于对称性,位移可表示为如下形式

$$u = \frac{2(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)} \int_0^{\infty} A(s) \left[ \frac{\mu}{\lambda + \mu} - sy \right] \exp(-sy) \sin(sx) ds, \quad (24)$$

$$v = \frac{2(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)} \int_0^{\infty} A(s) \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} + sy \right] \exp(-sy) \cos(sx) ds \quad (25)$$

利用条件(9)和(23)可得( $y \geq 0$ ):

$$\sigma_{yy}(x, y) = -\frac{4(\lambda + \mu)\mu}{\pi(\lambda + 2\mu)} \int_0^{\infty} sA(s) (1 + sy) \exp(-sy) \cos(sx) ds \quad (26)$$

根据方程(8)应力场可以表示为如下形式:

$$\tau_{yy}(x, y) = \int_0^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_y(x', y') [\alpha(|x' - x|, |y' - y|) + \alpha(|x' - x|, |y' + y|)] dx' \quad (27)$$

函数  $\alpha$  取(5)形式,根据文献[2]和边界条件可得如下形式的对偶积分方程:

$$\int_0^{\infty} sA(s) k(\xi) \cos(sx) ds = -\frac{\pi\tau_0(\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)}, \quad |x| < l, \quad (28)$$

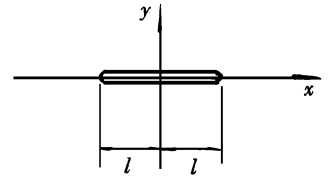


图1 裂纹的几何形式

$$\int_0^{\infty} A(s) \cos(sx) ds = 0, \quad l \leq |x|, \quad (29)$$

$$k(\xi) = [1 - \Phi(\xi)] [1 + 2\xi^2] - \frac{\xi}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2), \quad (30)$$

这里  $\varepsilon = \frac{a}{2\beta}$ ,  $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$  (31)

由此可见唯一与经典弹性理论不同的是在非局部弹性理论考虑了影响函数  $k(\varepsilon)$ 。对于  $a = 0$ , 从而  $k(\varepsilon) = 1$ , 这样对偶积分方程(28)和(29)将转回到经典弹性理论中的偶积分方程。为了确定未知函数  $A(s)$  就必须求解对偶积分方程(28)和(29)。

### 3 对偶积分方程的解

当然对偶积分方程(28)和(29)可以变换为一个具有不连续核的一阶积分方程。众所周知一阶积分方程的解是一个不适定问题, 即一个小的数值扰动就能引起解的很大变化。在文献[1]中 Eringen 采用的迭代法求解的结果不精确。因为一维问题的应力解在裂纹尖端附近有振荡性, 迭代法误差随晶格参数的增长而增大, 这也增加了求解这类问题的难度。为了克服这种数学上的困难, 采用 Schmidt 方法<sup>[10]</sup>来求解对偶积分方程。位移  $v$  可以被展开成如下级数形式:

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_{2n-2}^{(1/2, 1/2)} \left( \frac{x}{l} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right)^{1/2}, \quad \text{当 } 0 \leq |x| \leq l, \quad (32)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad \text{当 } l \leq |x|, \quad (33)$$

这里  $a_n$  是要确定的未知系数,  $P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$  是雅可比多项式<sup>[11]</sup>。方程(32)经富里叶变换后的形式为<sup>[12]</sup>:

$$A(s) = v(s, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n B_n J_{2n-1}(ls) s^{-1}, \quad (34)$$

这里  $B_n = 2\sqrt{\pi}(-1)^{n-1} \frac{\Gamma(2n-1/2)}{(2n-2)!}$ , (35)

$\Gamma(x)$  和  $J_n(x)$  分别是伽马函数和贝塞尔函数。

把方程(34)分别代入方程(28)和(29), 方程(29)经富里叶变换后将自动满足, 对于  $x \leq l$  的情况, 方程(28)将简化为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n B_n \int_0^{\infty} k(\varepsilon) J_{2n-1}(sl) \cos(sx) ds = -\frac{\pi \tau_0 (\lambda + 2\mu)}{4\mu (\lambda + \mu)}. \quad (36)$$

对于大的  $\xi = \varepsilon$ , 方程(36)中的积分函数是一个指数衰减函数, 因此方程(36)中的半无限积分可以利用菲龙<sup>[13]</sup>积分方法进行数值计算。这样未知系数  $a_n$  可以利用 Schmidt 方法<sup>[10]</sup>对方程(28)的求解而获得。方程(36)可以简写为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n E_n(x) = U(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (37)$$

这里  $E_n(x)$  和  $U(x)$  是已知函数, 而  $a_n$  是要确定的未知系数。

函数序列  $P_n(x)$  满足如下正交条件并且由已知函数  $E_n(x)$  构造出来

$$\int_0^l P_m(x) P_n(x) dx = N_n \delta_{mn}, \quad N_n = \int_0^l P_n^2(x) dx, \quad (38)$$

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{M_{in}}{M_{nn}} E_i(x), \quad (39)$$

这里  $M_{in}$  是矩阵  $D_n$  的元素  $d_{in}$  的余因子, 矩阵  $D_n$  定义为如下形式

$$D_n = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \cdots & d_{2n} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \cdots & d_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \cdots & d_{nm} \end{bmatrix}, \quad d_{ij} = \int_0^l E_i(x) E_j(x) dx \quad (40)$$

利用方程(37)~(39)可得

$$a_n = \sum_{j=n}^{\infty} q_j \frac{M_{ij}}{M_{jj}}, \quad (41)$$

$$q_j = \frac{1}{N_j} \int_0^l U(x) P_j(x) dx \quad (42)$$

#### 4 数值计算与结果

为了检查计算的准确性,  $\sum_{n=1}^{10} a_n E_n(x)$  和  $U(x)$  对于  $a/2bl = 0.0005$  情况下的值在表1中给出, 系数  $a_n$  对于  $a/2bl = 0.0005$  变化情况在表2中给出。

表1  $\sum_{n=1}^{10} a_n E_n(x) \sqrt{\frac{\pi \tau_0 (\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)}}$  和  $U(x) \sqrt{\frac{\pi \tau_0 (\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)}}$  对于  $a/2bl = 0.0005$  下的函数值的变化情况

$x/l$	$\sum_{n=1}^{10} a_n E_n(x) \sqrt{\frac{\pi \tau_0 (\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)}}$	$U(x) \sqrt{\frac{\pi \tau_0 (\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)}}$
0.55	- 0.100 309 E+ 01	- 1.0
0.60	- 0.100 531 E+ 01	- 1.0
0.75	- 0.995 341 E+ 00	- 1.0
0.80	- 0.100 439 E+ 01	- 1.0
0.90	- 0.996 281 E+ 00	- 1.0
0.95	- 0.102 530 E+ 01	- 1.0
0.96	- 0.102 805 E+ 01	- 1.0
0.97	- 0.102 363 E+ 01	- 1.0
0.98	- 0.998 501 E+ 00	- 1.0
0.99	- 0.869 906 E+ 00	- 1.0

由以上结果和从文献[14, 15]可以看出, 如果选取方程(37)中的无限级数的前10项就能满足本问题的精度要求, 可见 Schmidt 方法在本问题中的应用是可行的, 同时随着方程(32)中的级数项数的增加应力将保持稳定。当系数  $a_n$  获得后(这里我们取级数的前10项), 整个应力场就可以获得。然而对于断裂力学来说重要的是沿着裂纹线上的应力  $\tau_{yy}$  的获得, 对于  $y = 0$  时的应力  $\tau_{yy}$  可以由如下方程给出

$$\tau_{yy} = - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n B_n \int_0^{\infty} k(\xi) J_{2n-1}(sl) \cos(sx) ds \quad (43)$$

表 2 系数  $a_n \sqrt{\frac{\pi \tau_0 (\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)}}$  对于  $a/2\beta_l = 0.0005$  情况下变化情况

$n$	$a_n \sqrt{\frac{\pi \tau_0 (\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)}}$	$n$	$a_n \sqrt{\frac{\pi \tau_0 (\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)}}$
1	- 0.318 698 E+ 00	6	- 0.132 851 E- 03
2	- 0.127 109 E- 01	7	- 0.570 583 E- 04
3	0.708 155 E- 02	8	- 0.981 545 E- 04
4	0.174 376 E- 02	9	- 0.106 541 E- 04
5	0.127 016 E- 02	10	- 0.582 841 E- 05

对于  $x = l$  处, 当  $\varepsilon = 0$  时将出现经典奇异应力。然而只要  $\varepsilon \neq 0$ , 方程(43) 中的无穷级数和半无限积分都是收敛的, 从而所表示的应力也是有限的。从结果可知, 当  $0 < x < l, y = 0$  时应力  $\tau_{xy} / \tau_0$  非常趋近于单位 1。而对于  $x > l$ , 应力  $\tau_{xy} / \tau_0$  将从一个在  $x = l$  处的有限值逐渐减小到  $x = \infty$  处的零值。由于  $\varepsilon/l > 100$  表示裂纹长度小于  $10^{-6}$  cm, 而这么小的裂纹代表的是与原子间量级相同的裂纹, 这么小的裂纹并不是本文研究的目的, 本文研究的裂纹一般都大于这个量级。对于泊松比  $\nu = 2.9$  的情况, 给出了应力的数值结果。由于积分函数是指数衰减, 因此半无限积分可以利用菲龙和辛普生方法<sup>[13]</sup> 获得数值结果。本文的结果在图 2 ~ 7 给出。通过分析, 可以得出如下结论:

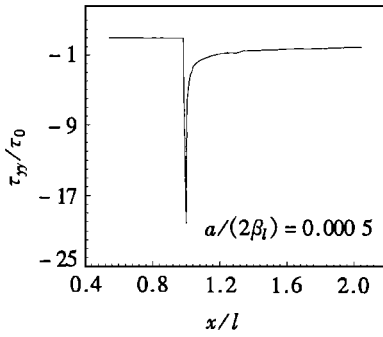


图 2 沿裂纹面方向上的应力场

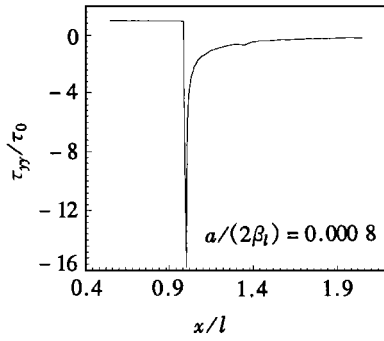


图 3 沿裂纹面方向上的应力场

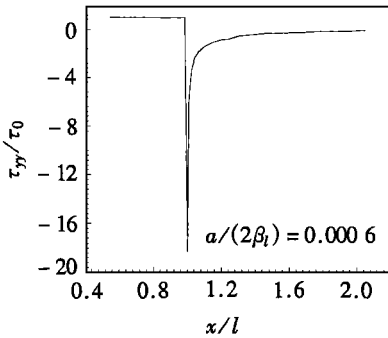


图 4 沿裂纹面方向上的应力场

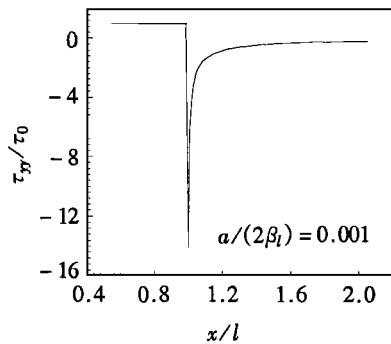


图 5 沿裂纹面方向上的应力场

(i) 本文的研究方法能够克服 Eringen 在文献 [1, 2, 3] 中遇到的数学困难, 结果比 Eringen 在文献 [1] 中的结果要准确, 方法也比 Eringen<sup>[1,2,3]</sup> 的方法合理。

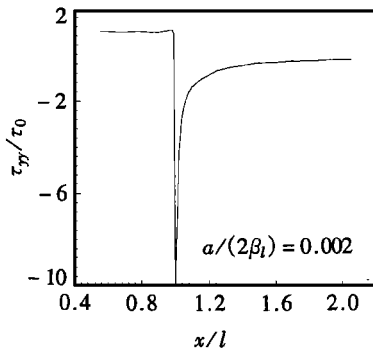


图 6 沿裂纹面方向上的应力场

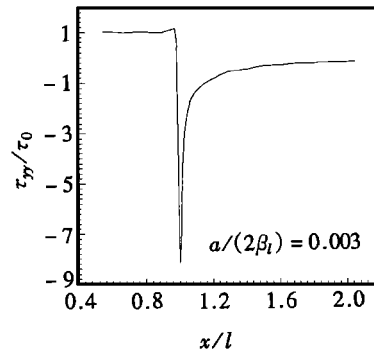


图 7 沿裂纹面方向上的应力场

(ii) 应力场在裂纹尖端不再有奇异性发生。应力场的最大值不是在裂纹尖端发生, 而是出现在稍微离裂纹尖端一段距离的地方, 这一结论与 Eringen 在文献 [16] 中的结论相符, 出现应力最大值的点与裂纹尖端的距离非常小。与经典弹性理论解相比, 本文中的应力场当远离裂纹尖端时收敛于经典弹性理论解的应力场。

(iii) 当晶格参数趋于零时, 裂纹尖端的应力将趋于奇异。这就是经典弹性理论解的应力二分之一奇异性。

(iv) 如果  $a/\beta$  保持不变, 即材料的原子晶格参数不变, 裂纹尖端的应力集中将随着裂纹长度的增加而增加, 事实上实验表明小裂纹比大裂纹更具有阻抗裂纹断裂的能力。

(v) 本文的结果使宏观与微观断裂研究达到了同一。

(vi) 在裂纹尖端处有应力集中发生, 它们可以用以下形式表示:

$$\tau_{yy}(l, 0)/\tau_0 = c_2 \sqrt{2\beta_l/a}, \quad (44)$$

这里  $c_2$  大约为 0.315。

### [参 考 文 献]

- [1] Eringen A C, Speziale C G, Kim B S. Crack tip problem in non-local elasticity[J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1977, 25(5): 339.
- [2] Eringen A C. Linear crack subject to shear[J]. International Journal of Fracture, 1978, 14(4): 367 ~ 379.
- [3] Eringen A C. Linear crack subject to antiplane shear[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1979, 12(2): 211~ 219.
- [4] Zhou Zhengong, Han Jiecai, Du Shangyi. Investigation of the scattering of harmonic elastic waves by a finite crack using the non-local theory[J]. Mechanics Research Communications, 1998, 25(5): 519 ~ 528.
- [5] Zhou Zhengong, Wang Biao, Du Shangyi. Scattering of the anti-plane shear waves by a finite crack by using the non-local theory[J]. International Journal of Fracture, 1998, 91(4): 13~ 22.
- [6] Nowinski J L. On non-local aspects of the propagation of Love waves[J]. International Journal of Engineering Science, 1984, 22(4): 383~ 392.
- [7] Nowinski J L. On non-local theory of wave propagation in elastic plates[J]. ASME Journal Applied Mechanics, 1984, 51(3): 608~ 613.
- [8] Eringen A C. Continuum mechanics at the atomic scale[J]. Crystal Lattice Defects, 1977, 7(2): 109 ~ 130.
- [9] Eringen A C. Non-local elasticity and waves[A]. In: P Thoft Christensen Ed. Continuum Mechan-

- ics Aspects of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics [ C ] . Holland: Dordrecht, 1974, 81~ 105.
- [ 10 ] Morse P M, Feshbach H. Methods of Theoretical Physics [ M ] . Vol. 1. New York: McGraw\_Hill, 1958.
- [ 11 ] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integral, Series and Products [ M ] . New York: Academic Press, 1980.
- [ 12 ] Erdelyi A. Tables of Integral Transforms [ M ] . Vol. 1. New York: McGraw\_Hill, 1954.
- [ 13 ] Amemiya A, Taguchi T. Numerical Analysis and Fortran [ M ] . Tokyo: Maruzen, 1969.
- [ 14 ] Itou S. Three dimensional waves propagation in a cracked elastic solid [ J ] . ASME Journal of Applied Mechanics , 1978, **45**( 3 ) : 807~ 811.
- [ 15 ] Itou S. Three dimensional problem of a running crack [ J ] . International Journal of Engineering Science , 1979, **17**( 4 ) : 59~ 71.
- [ 16 ] Eringen A C. Interaction of a dislocation with a crack [ J ] . Journal of Applied Physics , 1983, **54**( 3 ) : 6811~ 6818.

## Investigation of a Griffith Crack Subject to Uniform Tension Using the Non\_Local Theory by a New Method

Zhou Zhengong, Wang Biao

( P O Box 2147, Center for Composite Materials, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P R China )

**Abstract:** Field equations of the non\_local elasticity are solved to determine the state of stress in a plate with a Griffith crack subject to uniform tension. Then a set of dual\_integral equations is solved using a new method, namely Schmidt' s method. This method is more exact and more reasonable than Eringen' s one for solving this kind of problem. Contrary to the solution of classical elasticity, it is found that no stress singularity is present at the crack tip. The significance of this result is that the fracture criteria are unified at both the macroscopic and the microscopic scales. The finite hoop stress at the crack tip depends on the crack length.

**Key words:** non\_local theory; Schmidt' s method; dual\_integral equation