应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 10_1040_05

具有时滞的 Hopfield 型神经网络的平稳周期振荡*

黄先开

(北京商学院 数学教研室, 北京 100037)

(樊大钧推荐)

摘要: 研究一类具有周期输入的时滞 Hopfield 型神经网络

$$\dot{u}_i(t) = -b_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} T_{ij}(t) f(u(t-\tau)) + I_i(t)$$

的周期振荡, 利用重合度和 V_泛函的方法, 得到了该网络存在唯一稳定周期振荡的条件•

关 键 词: 时滞; 神经网络; 周期振荡; 重合度
中图分类号: O175.8 文献标识码: A

引 言

近年来, 随着神经网络技术的广泛应用, 围绕神经网络的结构与特性的研究也受到越来越多的重视[1~3], 其中 Hopfield 型网络由于较好地模拟了生态系统, 一直是国内外研究较多的模型之一• 一般 Hopfield 连续网络可用如下数学模型描述

$$\dot{u}_i(t) = -b_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} T_{ij} f(u_i(t)), \tag{1}$$

其中 $b_i > 0$, T_{ij} 为常数($i, j = 1, 2, \cdots, n$) , $f(u_i)$ 为连续的非线性激励函数• T_{ij} 模拟神经元之间互连的突触特性, 从实际背景看, 由于网络的老化和更新, T_{ij} 一般不是常数, 而是随时间变化的函数• f 的转换作用也不是瞬时完成的, 而是具有一定的滞后• 考虑到生态系统环境周期性的变化或干扰以及人工网络相对有规则的输入控制, 本文研究更一般的 Hopfield 型人工神经网络

$$\dot{u}_i(t) = -b_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} T_{ij}(t) f(u(t-\tau)) + I_i(t), \tag{2}$$

其中 $\tau > 0$ 为时滞, $T_{ij}(t)$、$I_i(t)$ 为连续的 T 周期函数, $f_i(u_i)$ 为连续函数($i, j = 1, 2, \cdots, n$) •

为了叙述方便起见, 令

$$\boldsymbol{u} = (u_1(t), \cdots, u_n(t))^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{I}(t) = (I_1(t), \cdots, I_n(t))^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t-\tau)) = (f_1(u_1(t-\tau)), \cdots, f_n(u_n(t-\tau)))^{\mathrm{T}},$$

* 收稿日期: 1998_09_01
作者简介: 黄先开(1964~) , 男, 副教授, 博士, 北京商学院基础部主任.

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}(t)=\begin{bmatrix} T_{11}(t) & T_{12}(t) & \cdots & T_{1n}(t) \\ T_{21}(t) & T_{22}(t) & \cdots & T_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{n1}(t) & T_{n2}(t) & \cdots & T_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

则模型(2)可改写为

$$\dot{\boldsymbol{u}}=-\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t-\tau))+\boldsymbol{I}(t)\cdot \tag{3}$$

1　引　　理

考虑 Banach 空间 X 中的算子方程

$$\mathrm{L}x=\lambda Nx \qquad \lambda\in[0,1],$$

这里, L: Dom L $\cap X\to X$ 是线性算子, $\lambda\in[0,1]$ 为参数· 令 P, Q 为两个投影算子:

$$\mathrm{P}:\mathrm{Dom\,L}\cap X\to \mathrm{Ker\,L},\quad \mathrm{Q}: X\to X/\mathrm{Im\,L},$$

则有如下引理:

引理[4]　假设 X 为 Banach 空间, L 是指标为零的 Fredholm 算子, N: $\Omega\to X$ 在 Ω 上 L 紧, 其中 Ω 为 X 中的有界开集· 进一步假设

(a) $\mathrm{L}\boldsymbol{u}\neq\lambda N\boldsymbol{u}$, $\forall\lambda\in(0,1)$, $\forall\boldsymbol{u}\in\partial\Omega\cap\mathrm{Dom\,L}$,

(b) $\mathrm{Q}N\boldsymbol{u}\neq 0$, $\forall\boldsymbol{u}\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker\,L}$,

(c) $\deg\{\mathrm{Q}N\boldsymbol{u},\Omega\cap\mathrm{Ker\,L},0\}\neq 0$,

则 $\mathrm{L}x=Nx$ 在 Ω 中至少有一解·

设 $X=\left\{\boldsymbol{u}(t)\in C(R,R^n),\ \boldsymbol{u}(t+T)=\boldsymbol{u}(t)\right\}$, 定义其模为 $\|\boldsymbol{u}\|=\max\limits_{[0,T]}|\boldsymbol{u}(t)|$, 则 X 在这个模及通常内积下成为 Banach 空间· 又令

$$\mathrm{L}\boldsymbol{u}=\dot{\boldsymbol{u}}(t),\quad N\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t-\tau))+\boldsymbol{I}(t),$$

投影算子 P, Q 分别取为

$$\mathrm{P}\boldsymbol{u}=\mathrm{Q}\boldsymbol{u}=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{u}(t)\,\mathrm{d}t,\qquad \boldsymbol{u}(t)\in X,$$

易证, L 是指标为零的 Fredholm 算子, N 在 Ω 上 L 紧, 其中 Ω 为 X 中的有界开集· 对应算子方程

$$\mathrm{L}\boldsymbol{u}=\lambda N\boldsymbol{u}\qquad \lambda\in[0,1],$$

有

$$\dot{\boldsymbol{u}}=\lambda(-\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t-\tau))+\boldsymbol{I}(t))\qquad \lambda\in[0,1],$$

当 $\lambda=1$ 时, 上式即为要研究的方程(3)·

2　主 要 结 果

记 $k=\max\limits_{[0,T]}\|\boldsymbol{T}(t)\|$, $\|\boldsymbol{T}(t)\|$ 为矩阵 $\boldsymbol{T}(t)$ 的模, $l=\max\limits_{[0,T]}|\boldsymbol{I}(t)|$· 则有

定理 1　假设存在常数 $b>0$, 及 $c>0$, $d>0$ 且 $kc<b$, 满足

1) $|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u})|\leqslant c|\boldsymbol{u}|+d \qquad \forall\boldsymbol{u}\in R^n$,

2) $\boldsymbol{B}\geqslant b\boldsymbol{I}$,

则方程(3)至少存在一个 T 周期解·

证明　考虑算子方程

$$\mathrm{L}\boldsymbol{u} = \lambda N\boldsymbol{u} \qquad \lambda \in (0,1),$$

即
$$\dot{\boldsymbol{u}} = \lambda(-\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t-\tau)) + \boldsymbol{I}(t)) \qquad \lambda \in (0,1). \tag{4}$$

设 $\boldsymbol{u}(t)$ 是(4) 任一 T 周期解, 下面证明 $\boldsymbol{u}(t)$ 关于 λ 一致有界. (4) 式两边同乘以 $\boldsymbol{u}(t)$, 并从 0 到 T 积分得

$$0 = \int_0^T \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}t = -\lambda\int_0^T \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\mathrm{d}t + \int_0^T \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t-\tau))\mathrm{d}t + \lambda\int_0^T \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}(t)\mathrm{d}s,$$

于是有

$$\begin{aligned} b\int_0^T |\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}t \leqslant{}& \int_0^T |\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t-\tau))|\mathrm{d}t + \int_0^T |\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}(t)|\mathrm{d}t \leqslant \\ & k\int_0^T |\boldsymbol{u}|(c|\boldsymbol{u}(t-\tau)| + d)\mathrm{d}t + l\int_0^T |\boldsymbol{u}|\mathrm{d}t = \\ & kc\int_0^T |\boldsymbol{u}(t)||\boldsymbol{u}(t-\tau)|\mathrm{d}t + (kd+l)\int_0^T |\boldsymbol{u}|\mathrm{d}t \leqslant \\ & kc\left(\int_0^T |\boldsymbol{u}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^T |\boldsymbol{u}(t-\tau)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \\ & (kd+l)\left(\int_0^T |\boldsymbol{u}(t)|\mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{u}(t-\tau)$ 的周期性知,

$$\int_0^T |\boldsymbol{u}(t-\tau)|\mathrm{d}t = \int_0^T |\boldsymbol{u}(t)|\mathrm{d}t,$$

从而

$$\begin{aligned} b\int_0^T |\boldsymbol{u}(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant{}& kc\int_0^T |\boldsymbol{u}(t)|^2\mathrm{d}t + (kd+l)\sqrt{T}\left(\int_0^T |\boldsymbol{u}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \times \\ & (b-kc)\int_0^T |\boldsymbol{u}(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \\ & (kd+l)\sqrt{T}\left(\int_0^T |\boldsymbol{u}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \times \\ & \int_0^T |\boldsymbol{u}(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{kd+l}{b-kc}\right)^2 T = R_1. \end{aligned} \tag{5}$$

由(5) 知, 存在 $t_0 \in [0,T]$, 使得 $|\boldsymbol{u}(t_0)| \leqslant \sqrt{R_1/T}$, 于是

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\boldsymbol{u}}(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,T],$$

$$|\boldsymbol{u}(t)| \leqslant \sqrt{\frac{R_1}{T}} + \int_0^T |\dot{\boldsymbol{u}}(t)|\mathrm{d}t. \tag{6}$$

又由(4) 直接得

$$\begin{aligned} \int_0^T |\dot{\boldsymbol{u}}(t)|\mathrm{d}t \leqslant{}& \int_0^T |\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}|\mathrm{d}t + \int_0^T |\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t-\tau))|\mathrm{d}t + \int_0^T |\boldsymbol{I}(t)|\mathrm{d}t \leqslant \\ & \|\boldsymbol{B}\|\int_0^T |\boldsymbol{u}|\mathrm{d}t + k\int_0^T (c|\boldsymbol{u}(t-\tau)| + d)\mathrm{d}t + Tl \leqslant \\ & (\|\boldsymbol{B}\| + kc)\int_0^T |\boldsymbol{u}(t)|\mathrm{d}t + kdT + Tl \leqslant \\ & (\|\boldsymbol{B}\| + kc)\sqrt{T}\left(\int_0^T |\boldsymbol{u}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} + kdT + Tl \leqslant \end{aligned}$$

$$(\|\boldsymbol{B}\| + kc)\sqrt{TR_1} + kdT + Tl = R_2. \tag{7}$$

由(6)、(7)得

$$|\boldsymbol{u}(t)| \leqslant \sqrt{\frac{R_1}{T}} + \int_0^T |\dot{\boldsymbol{u}}(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{R_1}{T}} + R_2 = R_3. \tag{8}$$

令　$R_0 = \max\left\{R_3, \dfrac{kd + l}{b - kc}\right\}$, $\Omega = \left\{\boldsymbol{u}(t) \in X \mid \|\boldsymbol{u}\| < R_0\right\}$,

则当 $\boldsymbol{u} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker\,L}$ 时, 显然有 $\mathrm{L}\boldsymbol{u} \neq \lambda N\boldsymbol{u}$, $\lambda \in (0,1)$, 引理条件(a) 成立. 又对 $\forall \boldsymbol{u} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker\,L}$, 则 $\boldsymbol{u}$ 为常数, 即 $|\boldsymbol{u}| = R_0$, 且有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Q}N\boldsymbol{u}) &= -\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}(t) \leqslant \\
&\quad -b|\boldsymbol{u}|^2 + kc|\boldsymbol{u}|^2 + l|\boldsymbol{u}| \leqslant \\
&\quad -b|\boldsymbol{u}|^2 + kc|\boldsymbol{u}|^2 + (kd + l)|\boldsymbol{u}| < 0,
\end{aligned}$$

故当 $\boldsymbol{u} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker\,L}$ 时, $\mathrm{Q}N\boldsymbol{u} \neq 0$, 引理条件(b) 成立. 又令

$$F(\mu, \boldsymbol{u}) = -\mu\boldsymbol{u} + (1 - \mu)\mathrm{Q}N\boldsymbol{u},$$

则当 $\boldsymbol{u} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker\,L}$ 时, $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}F(\mu, \boldsymbol{u}) < 0$, 由同论不变性知,

$$\deg\left\{\mathrm{Q}N\boldsymbol{u}, \Omega \cap \mathrm{Ker\,L}, 0\right\} = \deg\left\{-\boldsymbol{u}, \Omega \cap \mathrm{Ker\,L}, 0\right\} \neq 0,$$

引理条件(c)成立. 因此, 由引理知, $\mathrm{L}\boldsymbol{u} = N\boldsymbol{u}$ 在X 中至少有一解, 即方程(3) 至少存在一个T 周期解.

定理 2　假设定理 1 的条件成立, 且设 $|f_i'(u_i)| \leqslant \sigma (i = 1, 2, \cdots, n)$, $k\sigma < b$, 则方程(3)的 T 周期解唯一且是渐近稳定的.

证明　设 $\boldsymbol{u}(t)$ 为(3) 的 T 周期解, $\boldsymbol{u}(t)$ 是(3) 的任一解, 则

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t - \tau)) + \boldsymbol{T}(t),$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t - \tau)) + \boldsymbol{T}(t).$$

令 $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}(t)$, 则

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{f}'(\xi)\boldsymbol{y}(t - \tau), \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{f}'(\xi) = (f_1'(\xi_1), f_2'(\xi_2), \cdots, f_n'(\xi_n))^{\mathrm{T}}$, 参照文[5] 中V 泛函的构造, 令

$$V(t) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{y}(t)|^2 + \frac{1}{2}\sigma k\int_{t-\tau}^{t} |\boldsymbol{y}(s)|^2\mathrm{d}s, \tag{10}$$

则

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t)|_{(9)} &= \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)(-\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{f}'(\xi)\boldsymbol{y}(t - \tau)) + \frac{1}{2}\sigma k|\boldsymbol{y}(t)|^2 - \\
&\quad \frac{1}{2}\sigma k|\boldsymbol{y}(t - \tau)|^2 \leqslant \\
&\quad -b|\boldsymbol{y}(t)|^2 + k\sigma|\boldsymbol{y}(t)||\boldsymbol{y}(t - \tau)| + \\
&\quad \frac{1}{2}k\sigma|\boldsymbol{y}(t)|^2 - \frac{1}{2}k\sigma|\boldsymbol{y}(t - \tau)|^2 \leqslant \\
&\quad -b|\boldsymbol{y}(t)|^2 + \frac{k\sigma}{2}(|\boldsymbol{y}(t)|^2 + |\boldsymbol{y}(t - \tau)|^2) + \\
&\quad \frac{1}{2}k\sigma|\boldsymbol{y}(t)|^2 - \frac{1}{2}k\sigma|\boldsymbol{y}(t - \tau)|^2 = \\
&\quad -(b - k\sigma)|\boldsymbol{y}(t)|^2.
\end{aligned}$$

按照文[5]类似的方法, 易证 $\lim\limits_{t \to +\infty}\boldsymbol{y}(t) = 0$, 故方程(3) 的 T 周期解唯一且是渐近稳定的.

对于方程(2),当时滞 $\tau=0$,且 $T_{ij}(t)=T_{ij}$ 为常数时,即对如下方程

$$c_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}T_{ij}h(u_j)-\frac{u_i}{R_i}+I_i(t)\qquad i=1,2,\cdots,n\cdot \tag{11}$$

利用前述定理,可得如下推论:

推论[3] 设 $c_i,R_i,T_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 均为实常数,且 $R_ic_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, $h(\cdot)$ 为 Sigmoid 函数, $I_i(t)$ 为连续的 T 周期函数,则

(a) 方程(11)存在 T 周期解;

(b) 当 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\frac{T_{ij}}{c_i}\right|\right\}<\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{1}{R_jc_j}\right\}$ 时,方程(11)存在唯一 T 周期解,且是全局吸引的·

[参 考 文 献]

[1] 廖晓昕. 非线性连续神经网络的稳定性[J]. 华中师范大学学报(自然版), 1992, **26**(1): 1~4.

[2] Forit M. On global asymptotic stability of a class of nonlinear systems arising in neural network theory [J]. Journal of Differential Equation, 1994, **113**(2): 246~264.

[3] 李铁成, 王铎. 一类带有周期输入的人工神经网络的渐近性质[J]. 高校应用数学学报, 1997, **12**(1): 25~28.

[4] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations[J]. Lecture Notes in Math. **567**, Berlin: Springer_Verlag, 1977.

[5] Wang Lian, Zhao Huaizhong. The stability of nonautonomous detard difference_differential equation [J]. Acta Mathematicae Sinica, New Series, 1992, **8**(4): 349~356.

On the Existence and Stability of Periodic Solutions for Hopfield Neural Network Equations With Delay

Huang Xiankai

(Beijing Institute of Business, Beijing 100037, P R China)

Abstract: Sufficient conditions are obtained for the existence, uniqueness and stability of T_periodic solutions for the Hopfield neural network equations with delay

$$\dot{u}_i(t)=-b_iu_i(t)+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}(t)f(u(t-\tau))+I_i(t).$$

Key words: delay; neural network; periodic oscillation; coincidence degree