

文章编号: 1000-0887(1999)09-0919-09

动力系统实测数据的 Lyapunov 指数的矩阵算法*

马军海¹, 陈予恕², 刘曾荣³

(1 天津财经学院 管理系, 天津 300222; 2 天津大学 力学系, 天津 300072;
3 上海大学 数学系, 上海 201800)

摘要: Lyapunov 指数 l 是定量描述混沌吸引子的重要指标, 自从 1985 年 Wolf 提出 Lyapunov 指数 l 的轨线算法以来, 如何准确、快速地计算正的、最大的 Lyapunov 指数 l_{\max} 便成为人们关注的问题, 虽有不少成功计算的报导, 但一般并不公开交流。在 Zuo Bingwu 理论算法的基础上, 给出了 Lyapunov 指数 l 的具体的矩阵算法, 并与 Wolf 的算法进行了比较, 计算结果表明: 算法能快速、准确地计算 (主要是正的、最大的) Lyapunov 指数 l_{\max} 。并对 Lyapunov 指数 l 的大小所反应的吸引子的特性进行了分析, 并得出了相应的结论。

关键词: 非线性混沌时序; Lyapunov 指数 l ; 矩阵算法

中图分类号: O175.14; O241.81 文献标识码: A

引言

混沌是非线性系统所产生的复杂的不规则行为, 这种不规则现象在大自然中是普遍存在的。给定一个现实的不规则时序观察, 那么要问这种不规则性是随机的, 还是系统内部非线性机制引起的确定性输出? 首先应该对之进行判别, 如果是随机序列就应该采用统计学的方法加以研究, 如果序列是低自由度的确定性混沌, 那么系统必定是存在非线性机制的耗散系统。

自组织现象产生于耗散非线性动力学系统之中, 其有效自由度数少于系统实际自由度数, 系统的状态被吸引到相空间中一个低维的超曲面上, 曲面的维数反映了自组织系统的有效自由度数, 一个表面上复杂的运动实际上可能仅仅是混沌态的低维运动。而本质随机行为, 有效自由度数较高, 没有自组织现象。区分低维的不规则行为和本质随机行为, 度量其不规则性的复杂程度, 是定量研究混沌的重要问题。Lyapunov 指数 l 是定量描述混沌吸引子的重要指标, 自从 1985 年 Wolf^[1] 提出 Lyapunov 指数 l 的轨线算法以来, 如何准确、快速地计算正的、最大的 Lyapunov 指数 l_{\max} 便成为人们关注的问题^[2-8], 虽有不少成功计算的报导, 但一般并不公开交流。本文在 Zuo Bingwu^[9] 理论算法的基础上, 给出了 Lyapunov 指数 l 的具体的矩阵算法, 并与 Wolf 的算法进行了比较, 计算结果表明: 本文的算法能快速、准确地计算 (主要是正的、最大的) Lyapunov 指数 l_{\max} 。本文并对 Lyapunov 指数 l 的大小所反应的吸引子的特性进行了分析, 并

* 收稿日期: 1997_05_10 ; 修订日期: 1999_03_05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19672043)

作者简介: 马军海, 男, (1964~), 博士(后), 副教授。自 1996 年来在《应用数学和力学》等刊物上发表论文十多篇, 主要研究方向: 复杂非线性动力系统 (尤其是混沌时序重构) 及其工程应用。

得出了相应的结论•

1 Lyapunov 指数的矩阵计算方法

假定我们得到的时间序列经过数据的预处理,初步剔除数据中各种各样的噪声后,得到的时序为: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ 然后将其嵌入到 M 维空间中,定义嵌入向量 x_i 为:

$$x_i = (x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau}) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n - m + 1) \bullet \quad (1)$$

定义 x_i 和 x_j 的距离为最大值范数(其等价于 2 范数, 3 范数, ..., n 范数)•

$$\text{即: } \|X_j - X_i\| = \max_{0 \leq a \leq m-1} \{ |x_{j+a} - x_{i+a}| \} \bullet \quad (2)$$

适当选择半径 r 则 x_j 便在以 x_i 为圆心, 半径为 r 的 d (时序的维数) 维球内• 即:

$$\|X_j - X_i\| \leq r \bullet \quad (3)$$

$$Y_i(m) = (x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau}) = (y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3}, \dots, y_{i,m}) \bullet \quad (4)$$

根据嵌入定理^[10], $Y_i(m)$ 和 $Y_{i+\tau}(m)$ 之间存在一个映射 g , 满足:

$$Y_{i+\tau}(m) = g(Y_i(m)) \bullet \quad (5)$$

$$\text{从式(4)和式(6)可得: } \begin{cases} y_{i+\tau,1} = y_{i,2}, \\ y_{i+\tau,2} = y_{i,3}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_{i+\tau,m-1} = y_{i,m}, \\ y_{i+\tau,m} = \phi(y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,m}) \bullet \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{对于式(1)即为: } T_i(x_j - x_i) = (x_{j+m} - x_{i+m}) \bullet \quad (7)$$

嵌入坐标映射 g 的雅可比矩阵为:

$$T_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{m-1} & a_m \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ 满足:

$$\sum_{i=1}^{N-m} \left[x_{i+m} - \left(\sum_{j=1}^m a_j x_{i+(j-1)\tau} \right) \right]^2 = \text{Minimum} = f(a_1, a_2, \dots, a_m), \quad (9)$$

S. Ellner^[2] 证明了时序的 Lyapunov 指数 l 只与其最少的嵌入维数(不妨设为 q) 有关, 此时(8)式的 T_i , 我们将其写成

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_N \bullet$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-q+1}^0 & a_{m-q+2}^0 & \dots & a_m^0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$A_1 A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-q+1}^0 & a_{m-q+2}^0 & \dots & a_m^0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{m-q+1}^0 & b_{m-q+2}^0 & \dots & b_m^0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

这里:

$$b_{m-q+1}^0 = a_{m-q+1}^0 a_1^m, \quad b_{m-q+2}^0 = a_{m-q+1}^1 + a_{m-q+2}^0 2a_m^1, \quad \dots,$$

$$b_m^0 = a_{m-1}^1 + a_m^0 a_m^1,$$

$$B = A_N A_{N-1} \dots A_1 A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & C_{1, m-q+1} & C_{1, m-q+2} & \dots & C_{1, m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{2, m-q+1} & C_{2, m-q+2} & \dots & C_{2, m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{m-q, m-q+1} & C_{m-q, m-q+2} & \dots & C_{m-q, m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{m-q+1, m-q+1} & C_{m-q+1, m-q+2} & \dots & C_{m-q+1, m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{m-1, m-q+1} & C_{m-1, m-q+2} & \dots & C_{m-1, m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{m, m-q+1} & C_{m, m-q+2} & \dots & C_{m, m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & D(q) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{1, m-q+1} & C_{1, m-q+2} & \dots & C_{1, m} \\ C_{2, m-q+1} & C_{2, m-q+2} & \dots & C_{2, m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m-q, m-q+1} & C_{m-q, m-q+2} & \dots & C_{m-q, m} \end{bmatrix},$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} C_{m-q+1, m-q+1} & C_{m-q+1, m-q+2} & \dots & C_{m-q+1, m} \\ C_{m-q+2, m-q+1} & C_{m-q+2, m-q+2} & \dots & C_{m-q+2, m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m, m-q+1} & C_{m, m-q+2} & \dots & C_{m, m} \end{bmatrix}.$$

矩阵 B 的特征值为 λ 即

$$|N - B| = 0, \quad X^{m-q} \text{DeT}[N - D(q)] = 0, \quad (13)$$

矩阵 B 的特征值可分为两部分, $m - q$ 个等于 0, 剩余 q 个即为矩阵 $D(q)$ 之特征值. 不妨

令为: $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_q| > |\lambda_{q+1}| = \dots = |\lambda_m| = 0,$

其对应的 m 个特征向量为: $e_1, e_2, \dots, e_m,$

则向量 Y_0 可写为: $Y_0 = a_1 e_1 + \dots + a_q e_q + \dots + a_m e_m, \quad (14)$

则 $BY_0 = a_1 \lambda_1 e_1 + a_2 \lambda_2 e_2 + \dots + a_q \lambda_q e_q. \quad (15)$

最大的 Lyapunov 指数为:

$$l_{\max} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \log \| \mathbf{B} \mathbf{Y}_0 \| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \log [a_1^2 \lambda_1^2 + \dots + a_q^2 \lambda_q^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

其中 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_q$ 由式(9) 算出, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_q$ 由式(13) 算出, τ 为时间间隔。在实际计算中, 根据 Paper[4] 中的方法可直接算出时序的维数 d ,

$$\text{取 } q = [d] + 1 \quad (q \text{ 便为某一时序的最少嵌入维数}) \quad (17)$$

图 1 给出了 Lyapunov 指数 l 的矩阵算法程序框图。

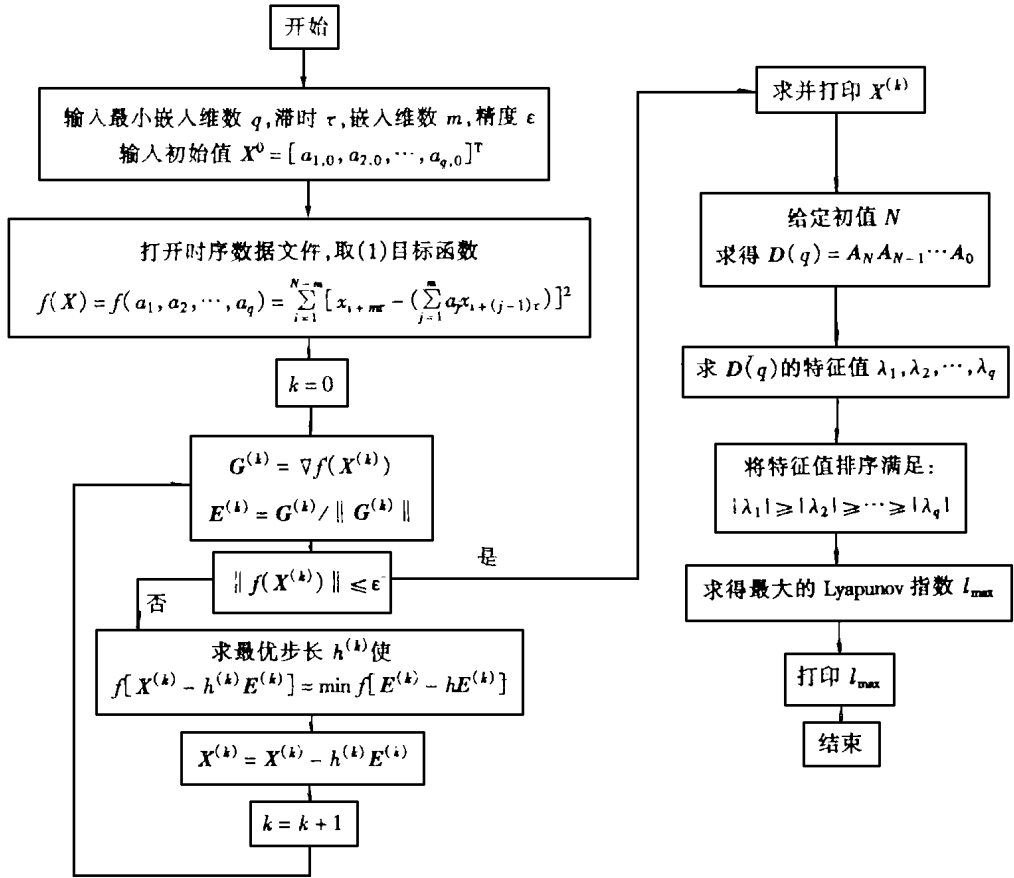


图 1

2 计算结果

取如下 3 组数据用 Wolf 的轨线算法及本文的矩阵算法分别计算各组数据的 Lyapunov 指数 l , 并比较不同算法 Lyapunov 指数 l 的计算结果的差异, 然后再讨论嵌入维数、点数及时滞 τ 对 Lyapunov 指数 l 计算结果的影响, (本文也对 Logistic map $\lambda = 4$ 标准混沌的情况进行了研究, 得到了与下述 3 组数据相似的结论)。

$$\text{第 1 组 对 Hennon map} \begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases}$$

取 $a = 1.4, b = 0.3$ 标准混沌的情况, 前 1000 点作为暂态点去掉, 把后 10000 点作为第 1 组原始数据点。其 x_n, x_{n+1} 如图 2; 其点数与最大的 Lyapunov 指数 l_{\max} 之间的关系图如图 3。

表 1 第 1 组数据 Henon map 的 Lyapunov 指数 l

N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
896	0.436 2	0.142 3	- 0.399 1	- 0.423 9	- 0.784 9	- 1.680 2
1 796	0.431 7	0.143 7	- 0.311 4	- 0.432 9	- 0.798 8	- 1.673
2 696	0.421 6	0.145 2	- 0.324 7	- 0.466 5	- 0.780 5	- 1.682
3 596	0.433 3	0.139 6	- 0.369	- 0.466 5	- 0.765 5	- 1.655
4 496	0.426 8	0.136 5	- 0.369	- 0.450 7	- 0.765 5	- 1.655
5 396	0.428 7	0.137 7	- 0.361	- 0.482 1	- 0.801	- 1.610
6 296	0.423 3	0.142 2	- 0.352	- 0.472 9	- 0.858	- 1.609
7 196	0.423 1	0.140 1	- 0.348	- 0.466 4	- 0.822 5	- 1.664
8 096	0.421 7	0.140 8	- 0.349 5	- 0.454 6	- 0.819 4	- 1.692
8 996	0.422 3	0.143 9	- 0.344	- 0.425 6	- 0.822	- 1.606
9 896	0.421 2	0.142	- 0.340	- 0.417 3	- 0.817	- 1.674
9 988	0.421 7	0.141 0	- 0.342	- 0.419 0	- 0.812	- 1.606 1

计算过程中取 $\max N = 10000$, 嵌入维数 $m = 6^*$

表 2 [5] 给出的第 1 组数据 Henon map 的 Lyapunov 指数 l 的计算结果

M	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
2	0.444 9	- 1.609				
3	0.440 7	- 0.893	- 1.653			
4	0.441 9	- 0.307	- 0.804	- 1.625		
5	0.463 1	- 0.049	- 0.389	- 0.760 7	- 1.635	
6	0.464 6	0.143 9	- 0.227	- 0.424 6	- 0.871 5	- 1.645

计算过程中取 $\max N = 10000$, 嵌入维数 $M = 6^*$

文献[5]中称 M 的情况下正确的 Lyapunov 指数 l 的值为 $\lambda_4 = 0.408, \lambda_2 = - 1.62$

表 3 第 2 组数据 (a) 组实验数据的 Lyapunov 指数 l

N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
896	0.149 9	0.042 9	- 0.000 2	- 0.022	- 0.186	- 1.059
1 796	0.149 8	0.057 3	- 0.001 6	- 0.022	- 0.204	- 1.180
2 696	0.150 1	0.050 8	- 0.001 9	- 0.024 0	- 0.198	- 1.204
3 596	0.150 0	0.048 1	- 0.000 8	- 0.028	- 0.175	- 1.128
4 496	0.150 1	0.051 6	- 0.001 1	- 0.027 5	- 0.163	- 1.145
5 396	0.150 0	0.052 1	- 0.000 3	- 0.03	- 0.165	- 1.089
6 296	0.149 9	0.050 4	- 0.000 9	- 0.035	- 0.165	- 1.069
7 196	0.149 2	0.050 7	- 0.001 4	- 0.034 4	- 0.191	- 1.170 4
8 096	0.148 6	0.049 6	- 0.000 8	- 0.036	- 0.181	- 1.177
8 996	0.148 6	0.050 9	- 0.000 2	- 0.043	- 0.197	- 1.171 6
9 896	0.148 6	0.049 7	0.000 81	- 0.044	- 0.191	- 1.148 2
9 988	0.148 6	0.049 5	0.000 83	- 0.044	- 0.190	- 1.167 6

计算过程中取 $\max N = 10000$, 嵌入维数 $m = 6^*$

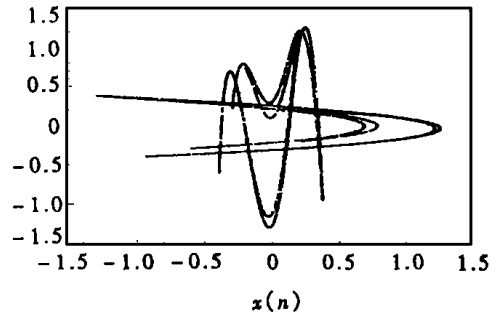
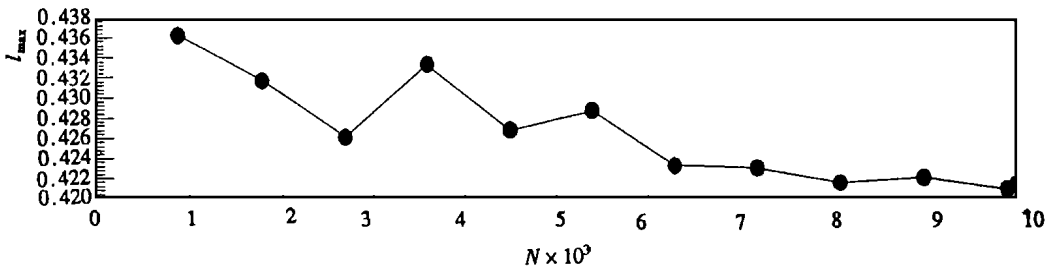
表 4 第 3 组数据的(b) 组实验数据的 Lyapunov 指数

N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
896	0.0309	0.003	-0.019	-0.0278	-0.073	-1.196
1796	0.0308	0.0043	-0.019	-0.0289	-0.071	-0.2169
2696	0.0309	0.0047	-0.011	-0.0327	-0.070	-0.231
3596	0.0309	0.0088	-0.0102	-0.0347	-0.742	-0.237
4496	0.0309	0.078	-0.0105	-0.0333	-0.074	-0.233
5396	0.0306	0.0079	-0.0104	-0.0316	-0.073	-0.222
6296	0.0306	0.0064	-0.010	-0.0324	-0.069	-0.217
7196	0.0305	0.0055	-0.009	-0.0320	-0.067	-0.220
8096	0.0304	0.0051	-0.0094	-0.0327	-0.068	-0.221
8996	0.0305	0.0055	-0.009	-0.0317	-0.068	-0.217
9896	0.0305	0.0053	-0.008	-0.0318	-0.069	-0.217
9988	0.0305	0.0053	-0.008	-0.0321	-0.069	-0.218

计算过程中取 $\max N = 10000$, 嵌入维数 $m = 6$ 。

第 2 组 在天津大学非线性参数机械振动模型上得到 10000 点作为 (a) 组实验数据, 其时间历程图如图 4, 其 $x_n(x_{n+1} - x_n)$ 图如图 5; 其点数与最大的 Lyapunov 指数 l_{\max} 之间的关系图如图 6。

第 3 组 在天津大学非线性参数机械振动模型上得到 10000 点作为 (b) 组实验数据, 其时间历程图如图 7, 其 $x_n(x_{n+1} - x_n)$ 图如图 8; 其点数与最大的 Lyapunov 指数 l_{\max} 之间的关系图如图 9。

图 2 第 1 组数据点的 x_n, x_{n+1} 图图 3 第 1 组数据点数与最大的 Lyapunov 指数 l_{\max} 之间的关系图

3 结 论

1. 比较表 1(本文的算法)与表 2(文献[5]计算结果)可以发现本文的算法的最大 Lyapunov 指数 l_{\max} 与第 2 大 Lyapunov 指数 l 与文献[5] 的相差甚少, 其完全保留了用 Lyapunov 指数对数据混沌特征进行判定的本质特征。

2. 从表 3、表 4 中可以看出: 用本文算法得到的 6 个 Lyapunov 指数 l 中前 2 个为正的, 后 4

个大多数为负的, 说明此 2 组实验数据为混沌数据, 这与文献[6] 的结果是吻合的。

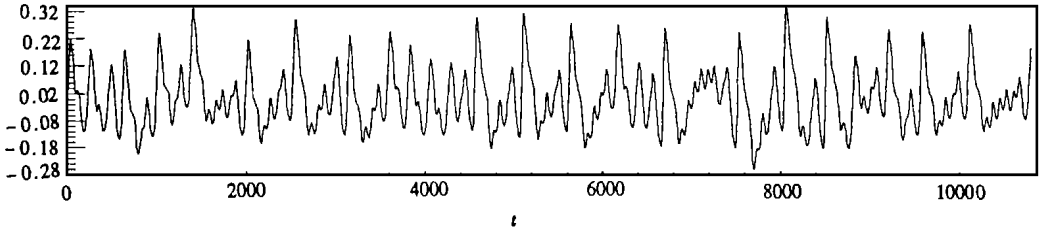


图 4 第 2 组实测经济混沌数据的时间历程图

3. 从计算结果中可以看出: 第 1~ 3 组数据的 Lyapunov 指数 l 为正的, 说明这 3 组数据都是非线性混沌数据, 这与文献[6] 通过相位随机化方法得到的结论是一致的。但两组实验数据的特性又是完全一致的, 第 2 组实验数据对应的 Lyapunov 指数 l 比第 3 组实验数据对应的 Lyapunov 指数 l 要大的多。说明第 2 组实验数据混沌的本质更强烈此。第 3 组实验数据对应的 Lyapunov 指数 l 虽然大于零, 但其非常接近于零, 说明第 3 组数据所在的系统对应着周期性的极限环或环面吸引子, 这

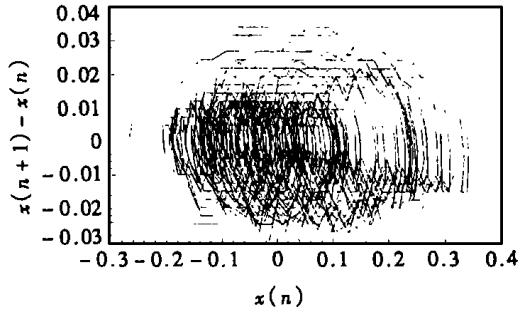


图 5 第 2 组数据点的 $x_{n+1} - x_n$ 图

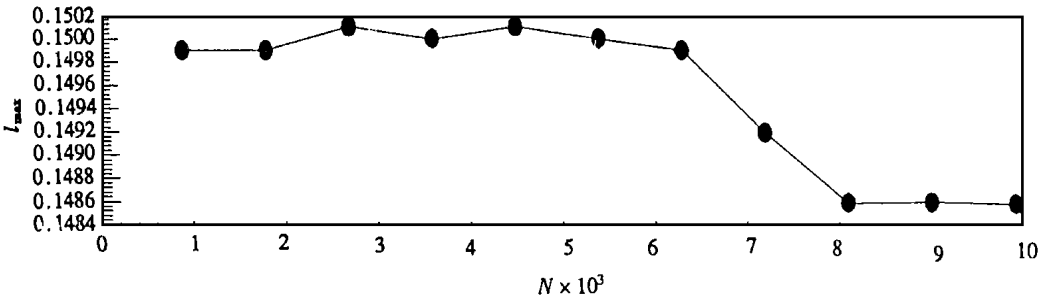


图 6 第 2 组数据点数与最大的 Lyapunov 指数 l_{max} 之间的关系图

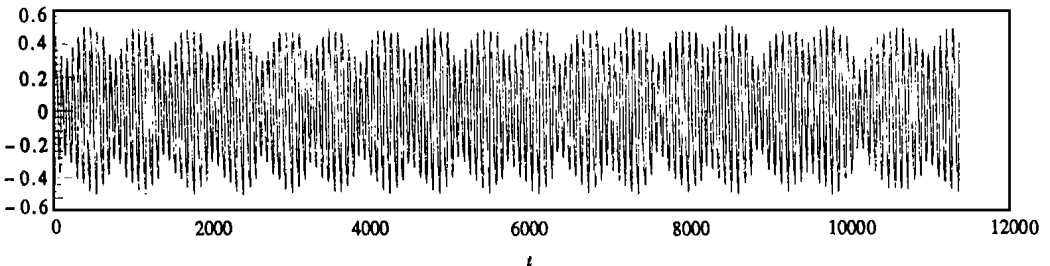


图 7 第 3 组数据的时间历程图

与其时间历程图 7; 相图 8 所给出的结果是一致的。

4. 从数据的点数与最大的 Lyapunov 指数 l_{max} 之间关系的各个图中可以看出计算序列长度为 10000 点, 基本可使计算的指数平稳下来, 且到了 8000 点以上最大的 Lyapunov 指数 l_{max} 是很平稳的。能比较如实客观地反映数据的混沌特性, 但计算时应注意如下几个问题:

a) 所取序列长度不能太短, 至少应 8000 点, 这样算出来的最大的 Lyapunov 指数 l_{\max} 才是可信的。

b) 时间间隔要适中, 特别是不能太长, 否则便可是导致吸引子整体结构上的折叠、突变等, 从而产生对 Lyapunov 指数的错误估计。

c) 嵌入维数取得要适中, 不能太大, 不考虑计算过程中的积累误差及数据中本身所含的噪声, 否则也会产生对 Lyapunov 指数 l 的不太准确的估计。

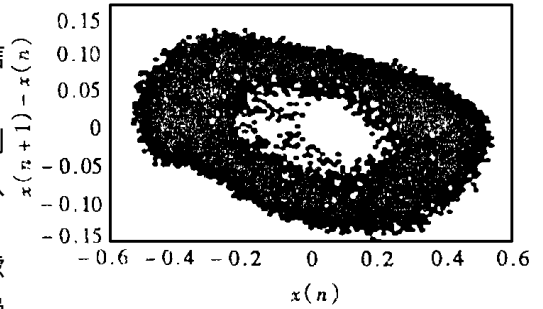


图 8 第 3 组数据点的 $x_n - (x_{n+1} - x_n)$ 图

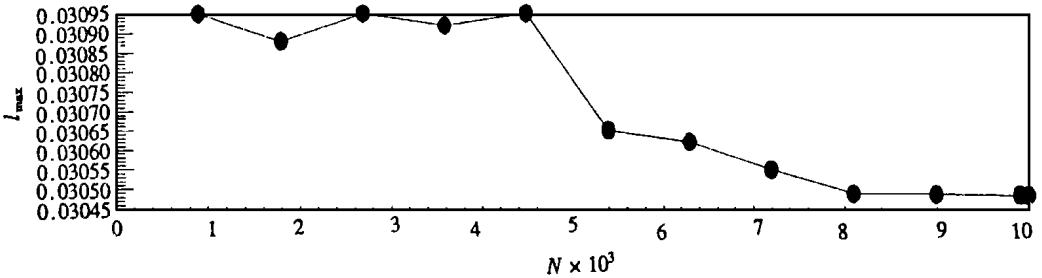


图 9 第 3 组数据点数与最大的 Lyapunov 指数 l_{\max} 之间的关系图

[参 考 文 献]

- [1] Wolf Alan, et al. Determining Lyapunov exponent from a timeseries[J]. Phys D, 1985, **16**: 285~ 317.
- [2] Ellner S. Convergence rates and data requirements for Jacobian_based estimates of Lyapunov exponents from data[J]. Phys Lett A, 1991, **153**: 357~ 363.
- [3] Reggie Brown, Paul Bryant. Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series[J]. Phys Rev A, 1991, **43**(6): 2787~ 2806.
- [4] Ramazan Gencay, et al. An algorithm for the N Lyapunov exponents of an N_dimensional unknown dynamical system[J]. Phys D, 1992, **59**: 142~ 157.
- [5] Yu Quanhe etc. Lyapunov exponents of the circle map in human hearts[J]. Phys Lett A, 1992, **170** (1): 29~ 32.
- [6] 马军海, 陈予恕. 高斯分布的随机数对动力系统实测数据判值影响的分析研究[J]. 非线性动力学学报, 1997, **4**(1): 25~ 33.
- [7] Shun Guanwu, et al. The Lyapunov exponent near the criticality of type V intermittency[J]. Phys Lett A, 1995, **197**(1): 287~ 292.
- [8] Holger Kantz. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent[J]. Phys Lett A, 1994, **185**(1): 77~ 87.
- [9] Zuo Binwu. Remark on metric analysis of reconstructed dynamics from chaotic timeseries[J]. Phys D, 1995, **85**: 485~ 495.
- [10] Nerenberg M A H. Correlation dimension and systematic geometric effects[J]. Phys Rev A, 1990, **42**: 7065~ 7674.

The Matrix Algorithm of Lyapunov Exponent for the Experimental Data Obtained in Dynamic Analysis

Ma Junhai¹, Chen Yushu², Liu Zengrong³

(1. Department of Economy and Management, Tianjin
finance University, Tianjin 300222, P R China;

2. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China;

3. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 201800, P R China)

Abstract: The Lyapunov exponent is important quantitative index for describing chaotic attractors. Since Wolf put up the trajectory algorithm to Lyapunov exponent in 1985, how to calculate the Lyapunov exponent with accuracy has become a very important question. Based on the theoretical algorithm of Zuo Binwu, the matrix algorithm of Lyapunov exponent is given, and the results with the results of Wolf's algorithm are compared. The calculating results validate that the matrix algorithm has sufficient accuracy, and the relationship between the character of attractor and the value of Lyapunov exponent are studied in this paper. The corresponding conclusions are given in this paper.

Key words: nonlinear chaotic timeseries; Lyapunov exponent; matrix algorithm