应用数学和力学, 第 20 卷 第 9 期(1999 年 9 月) 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 09_0969_08

广义混合拟变分不等式解的存在性及算法*

罗春林

(康定师范专科学校 数学系, 四川康定 626001)

(一协平推荐)

摘要: 应用辅助变分不等式技巧研究一类广义混合拟变分不等式解的存在性和迭代算法• 所得到的结果回答了 Noor 提出的公开问题, 改进和推广了一些较近的已知结果•

关键词: 广义混合拟变分不等式; 强单调; Lipschitz 连续; Hausdorff 度量
中图分类号: O177.91; O178 文献标识码: A

1 问题的提出

设 H 是实 Hilbert 空间, $\|\cdot\|$ 和 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 分别表示 H 的范数和内积• K 是 H 中的闭凸子集, 设 $f: H \to H$ 是单值映射• 古典的变分不等式问题 ($\mathrm{VIP}(f, K)$) 是求 $\hat{x} \in K$, 使得

$$\langle f(\hat{x}), y - \hat{x}\rangle \geqslant 0 \qquad (\forall y \in K), \tag{1}$$

如果 K 依赖于解 $\hat{x}$, 那么问题(1) 就叫做拟变分不等式问题 ($\mathrm{QVIP}(f, K(x))$)• 更明确地, 给定一个集值映射 $K: H \to 2^H$, $\mathrm{QVIP}(f, K(x))$ 是求 $\hat{x} \in K(\hat{x})$ 使得

$$\langle f(\hat{x}), y - \hat{x}\rangle \geqslant 0 \qquad (\forall y \in K(\hat{x})), \tag{2}$$

M. A. Noor[1] 和 K. I. Noor[2] 和 M. A. Noor[3] 应用投影技巧分别研究了问题(1) 和(2) , 并给出了相应的求近似解的算法•

设 $b(\cdot,\ \cdot): H \times H \to R$ 是非可微的满足一些适当条件的泛函• 混合变分不等式问题 ($\mathrm{MVIP}(f,\ b, K)$) 是求 $\hat{x} \in K$ 使得

$$\langle f(\hat{x}), y - \hat{x}\rangle \geqslant b(\hat{x}, \hat{x}) - b(\hat{x},\ y) \qquad (\forall y \in K), \tag{3}$$

由于投影方法不能用于(3) 类混合变分不等式, 见 Noor[1, 4]• 因此, Noor[1, 4] 和 Glowinski, Lions 和 Tremolieres[5] 发展了辅助变分不等式技巧来研究混合变分不等式解的存在性和算法• 并且 Noor[1,4,6,7], Glowinski, Lions 和 Tremilieres[5] 和 Cohen[8] 应用这一技巧成功地研究了几类变分不等式•

Noor[1] 指出, 推广辅助问题原理到拟变分不等式是一公开问题, 更明确地, 这个问题是求 $\hat{x} \in K(\hat{x})$, 使得

$$\langle f(\hat{x}), y - \hat{x}\rangle \geqslant b(\hat{x}, \hat{x}) - b(\hat{x},\ y) \qquad (\forall y \in K(\hat{x})), \tag{4}$$

把它叫做混合拟变分不等式问题 ($\mathrm{MQVIP}(f,\ b, K(x))$)•

---

* 收稿日期: 1998_07_02; 修订日期: 1999_03_20
基金项目: 四川省教委自然科学基金资助项目
作者简介: 罗春林(1965~) , 副教授, 副系主任, 主研方向: 变分不等式, 已发表论文 7 篇.

本文应用辅助变分不等式技巧, 研究一类以(4) 为特殊情况的广义混合拟变不等式 (GMQVIP$(T, A, b, K(x))$)• 设 $T, A: \mathrm{H} \to 2^{\mathrm{H}}$ 是两个集值映射, $K: \mathrm{H} \to 2^{\mathrm{H}}$ 是取值为非空闭凸值的集值映射, GMVIP$(T, A, b, K(x))$ 是求 $\hat{x} \in K(\hat{x})$, $\hat{u} \in T(\hat{x})$ 和 $\hat{v} \in A(\hat{x})$ 使得

$$\langle \hat{u} - \hat{v}, y - \hat{x} \rangle \geqslant b(\hat{x}, \hat{x}) - b(\hat{x}, y) \qquad (\forall y \in K(\hat{x})), \tag{5}$$

其中 $b: \mathrm{H} \times \mathrm{H} \to R$ 是非可微的, 并满足下面性质:

i) $b(x, y)$ 关于第一个变量是线性的,

ii) $b(x, y)$ 关于第二个变量是凸的,

iii) $b(x, y)$ 是有界的, 即存在一个常数 $\gamma > 0$, 使

$$b(x, y) \leqslant \gamma \| x \| \| y \| \qquad (\forall x, y \in \mathrm{H}),$$

iv) $b(x, y) - b(x, z) \leqslant b(x, y - z) \qquad (\forall x, y, z \in \mathrm{H})$,

特殊情况

1) 显然, 问题(1) ~ (4) 都是(5) 的特殊情况•

2) 如果 $b(x, y) \equiv 0$, $\forall x, y \in \mathrm{H}$, T 和 A 都是单值映射, 那么(5) 简化为 SNQVIP$(T, A, K(x))$ 已被 Siddiqi 和 Ansari[9] 考虑•

3) 如果 $b(x, y) \equiv 0 (\forall x, y \in \mathrm{H})$, 则问题(5) 简化为 GSNQVIP$(T, A, K(x))$ 已被 Ding[10] 考虑•

在许多重要应用中, $K(x)$ 具有形式

$$K(x) = m(x) + K, \tag{6}$$

其中 $m: \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ 是单值映射•

2 预备知识

我们用 $C(\mathrm{H})$ 表示H 中所有非空紧集族, 对任意 $A, B \in C(\mathrm{H})$, 定义 $H: C(\mathrm{H}) \to [0, \infty)$ 为

$$H(A, B) = \max\left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(A, y) \right\},$$

其中 $d(x, B) = \inf_{y \in B} \| x - y \|$• 那么 $(C(\mathrm{H}), H)$ 是完备距离空间, H 是 $C(\mathrm{H})$ 上的 Hausdorff 度量•

定义 2.1 一集值映射 $T: \mathrm{H} \to C(\mathrm{H})$ 叫做

1) α_强单调, 如果存在常数 $\alpha > 0$, 使得

$$\langle u - v, x - y \rangle \geqslant \alpha \| x - y \|^2 \qquad (\forall x, y \in H, u \in T(x), v \in T(y)),$$

2) β_$\underline{H}$_Lipschitz 连续, 如果存在常数 $\beta \geqslant 0$, 使得

$$H(T(x), T(y)) \leqslant \beta \| x - y \| \qquad (\forall x, y \in \mathrm{H}),$$

3) β_$\underline{H}$_压缩映射, 如果 T 是 β_$\underline{H}$_Lipschitz 连续的, 而且 $\beta < 1$•

注 2.1 如果 T 是单值映射, 那么定义 2.1 简化为单值映射的强单调、Lipschitz 连续和压缩映射定义•

引理 2.1[11] 设 (X, d) 是完备度量空间, $F: X \to C(X)$ 是 θ_$\underline{H}$_压缩映射, 那么 F 有不动点•

辅助问题 GMQVIP$(T, A, b, K(x))$ 的辅助问题是对任意固定的 $x \in H$, $u \in T(x)$ 和 $v \in A(x)$, 寻求唯一解 $\omega \in \omega(x, u, v) \in K(x)$ 使得

$$\langle \omega, y-\omega\rangle \geqslant \langle x, y-\omega\rangle-\rho\langle u-v, y-\omega\rangle+ \rho b(x, \omega)-\rho b(x, y) \qquad (\forall y \in K(x)), \tag{7}$$

其中 $\rho>0$ 是常数•

注 2.2 对任意固定的 $x \in H$, $u \in T(x)$ 和 $v \in A(x)$, 设 b 满足条件 ii)~ iv), 那么(7) 有唯一解 $\omega \in \omega(x, u, v) \in K(x)$ 而且 ω 是泛函 $J(y)$ 的极小点• $J(y)$ 定义为

$$J(y)=\frac{1}{2}\langle y, y\rangle+j\langle y\rangle \qquad (\forall y \in K(x)), \tag{8}$$

其中 $j(y)=\rho\langle u-v, y\rangle+b(x, y)-\langle x, y\rangle$• 事实上, 因为 $b\langle\cdot, \cdot\rangle$ 满足条件 iii) 和 iv), 易知 $b\langle\cdot, \cdot\rangle$ 也满足

$$|b(x, y)-b(x, z)| \leqslant \gamma\|x\|\|y-z\| \qquad (\forall y, z \in H),$$

所以, $b(x, y)$ 关于第二变量是连续的, 进而 $J(y)$ 在 $K(x)$ 上是下半连续的• 因为 $b\langle\cdot, \cdot\rangle$ 满足条件 ii), 所以 $j(y)$ 是凸泛函, 进而 $J(y)$ 是 $K(x)$ 上的严格凸泛函• 由[12] 中定理 1.4.8, 存在 $h \in H$ 和 $r \in R$, 使得

$$J(y) \geqslant \frac{1}{2}\|y\|^2+\langle h, y\rangle+r=\frac{1}{2}\|y+h\|^2+r-\frac{1}{2}\|h\|^2 •$$

因为 $J(y) \to +\infty$, 当 $\|y\| \to +\infty$, 由[12] 中定理 1.7.8, $J(y)$ 有唯一极小点 $\omega=\omega(x, u, v) \in K(x)$, 再由[12] 中命题 1.3.3 知 ω 是问题(7) 的解•

注 2.3 如果 $T=f$ 是单值映射, $A(x) \equiv 0$, $\forall x \in H$, 那么问题(7) 简化为 MQVIP$(f, b, K(x))$ 的辅助问题: 对任意固定的 $x \in H$, 存在唯一 $\omega=\omega(x) \in K(x)$, 使得

$$\langle \omega, y-\omega\rangle \geqslant \langle x, y-\omega\rangle-\rho\langle f(x), y-\omega\rangle+\rho b(x, \omega)- \rho b(x, y) \qquad (\forall y \in K(x)) • \tag{9}$$

现在, 我们定义一集值映射 $F: H \to 2^H$ 为

$$F(X)=\bigcup_{u \in T(x)} \bigcup_{v \in A(x)} \omega(x, u, v), \tag{10}$$

其中 $\omega=\omega(x, u, v)$ 是对固定的 $x \in H$, $u \in T(x)$ 和 $v \in A(x)$ 辅助问题(7) 的解• 显然对任意 $x \in H$, $F(x) \subset K(x)$•

定理 2.1 GMQVIP$(T, A, b, K(x))$(5) 有解 $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v})$ 当且仅当 $\hat{x}$ 是映射 F 的不动点•

证明 设 $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v})$ 是 GMQVIP$(T, A, b, K(x))$(5) 的一个解, 那么有 $\hat{x} \in K(\hat{x})$, $\hat{u} \in T(\hat{x})$ 和 $v \in A(\hat{x})$, 使得

$$\langle \hat{u}-\hat{v}, y-\hat{x}\rangle \geqslant b(\hat{x}, \hat{x})-b(\hat{x}, y) \qquad (\forall y \in K(x)),$$

所以对任意给定的 $\rho>0$, 我们有

$$\langle \hat{x}, y-\hat{x}\rangle \geqslant \langle \hat{x}, y-\hat{x}\rangle-\rho\langle \hat{u}-\hat{v}, y-\hat{x}\rangle+\rho b(\hat{x}, \hat{x})- \rho\beta(\hat{x}, y) \qquad (\forall y \in K(\hat{x})), \tag{11}$$

即, 对固定的 $\hat{x} \in H$, $\hat{u} \in T(\hat{x})$ 和 $v \in A(\hat{x})$, $\hat{x}$ 是不等式(2.1) 的解• 因此, $\hat{x}=\hat{x}(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v})$ 是 F 的不动点•

现在, 设 $\hat{x}$ 是集值映射 F 的不动点• 由 F 的定义, 存在 $\hat{u} \in T(\hat{x})$ 和 $v \in A(\hat{x})$ 使得对固定的 $\hat{x} \in H$, $\hat{u} \in T(\hat{x})$ 和 $v \in A(\hat{x})$, $\hat{x}$ 是不等式(7) 的解, 所以不等式(11) 成立• 我们得到

$(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v})$ 是 GMQVIP$(T, A, b, K(x))$ 的解。

3 主要结果

算 3.1 设 $K(x): \mathrm{H} \to 2^{\mathrm{H}}$ 是具有非空闭凸值的集值映射, $T, A: \mathrm{H} \to C(\mathrm{H})$ 是两个集值映射, $b(\cdot, \cdot)$ 满足条件 ii)~ iv)。

①对任意给定的 $x_0 \in \mathrm{H}$, 选择 $u_0 \in T(x_0)$ 和 $v_0 \in A(x_0)$, 令 $\omega_0 = \omega_0(x_0, u_0, v_0) \in F(x_0) \subset K(x_0)$ 表示辅助问题(7) 的解。

②对 $n \geqslant 1$, 设 $x_n = \omega_{n-1}$。因为 $T(x_n) \in C(\mathrm{H})$ 和 $A(x_n) \in C(\mathrm{H})$, 由Nadler[13], 存在 $u_n \in T(x_n)$ 和 $v_n \in A(x_n)$, 使得

$$\left.\begin{aligned} \| u_n - u_{n-1} \| &\leqslant \tilde{H}(T(x_n), T(x_{n-1})), \\ \| v_n - v_{n-1} \| &\leqslant \tilde{H}(A(x_n), A(x_{n-1}))\cdot \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

令 $\omega_n = \omega_n(x_n, u_n, v_n) \in F(x_n) \subset K(x_n)$ 表示辅助问题(7) 的解。

③对给定的 $\varepsilon > 0$, 如果 $\| x_n - \omega_n \| < \varepsilon$, 停止, 否则, 重做 ②。

注 3.1 1) 如果 $T = f$ 是单值映射, $A(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathrm{H}$, $m(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathrm{H}$, 那么算法 3.1 间化为 Noor[1] 的算法 3.1。

2) 如果 $T = f$, $A(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathrm{H}$, 我们就得到求 MQVIP$(f, b, K(x))$ 近似解的算法 3.2。

算法 3.2 ①对任意给定的 $x_0 \in \mathrm{H}$, 设 $\omega_0 = \omega(x_0)$ 表示辅助问题(9) 的解。

②对 $n \geqslant 1$, 设 $x_n = \omega_{n-1}$, $\omega_n = \omega_n(x_n)$ 表示辅助问题(9) 的解。

③对给定的 $\varepsilon > 0$, 如果 $\| x_n - \omega_n \| < \varepsilon$, 停止; 否则, 重做 ②。

定理 3.1 设 K 是 H 的非空闭凸子集, $K(x)$ 具有(6) 的形式。设 $T: \mathrm{H} \to C(\mathrm{H})$ 是 α_强单调和 β_$\tilde{H}$_Lipschitz 连续的, $A: \mathrm{H} \to C(\mathrm{H})$ 是 λ_$\tilde{H}$_Lipschitz 连续的, $m: \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ 是 μ_Lipschitz 连续的而且 $b(\cdot, \cdot)$ 满足性质 i)~ iv), 假设存在常数 $\rho > 0$, 使得

$$\left.\begin{aligned} &\mu < \frac{1}{2}, \quad k = \alpha + (1 - 2\mu)(\lambda + \gamma) > 0, \\ &k^2 > 4\mu(1 - \mu)[\beta^2 - (\lambda + \gamma)^2], \\ &\left| \rho - \frac{k}{\beta^2 - (\lambda + \gamma)^2} \right| < \frac{\sqrt{k^2 - 4\mu(1 - \mu)[\beta^2 - (\lambda + \gamma)^2]}}{\beta^2 - (\lambda + \gamma)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

那么 1) GMQVIP$(T, A, b, K(x))$ 有解。

2) 由算法 3.1 定义的迭代序列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 分别强收敛于 $\hat{x}$, $\hat{u}$ 和 $\hat{v}$, 而且 $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v})$ 是 GMQVIP$(T, A, b, K(x))$ 的一个解。

证明 1) 第一步, 我们证明由(10) 定义的映射是紧值的。事实上, 固定 $x \in \mathrm{H}$, 选择任意 $(u_1, v_1) \in T(x) \times A(x)$ 和 $(u_2, v_2) \in T(x) \times A(x)$。因为 $b\langle\cdot, \cdot\rangle$ 满足条件 ii)~ iv), 我们得到 $\omega_1 = \omega_1(x, u_1, v_1)$ 和 $\omega_2 = \omega_2(x, u_2, v_2)$ 满足 $\omega_1, \omega_2 \in F(x)$ 和

$$\begin{aligned} \langle \omega_1, y - \omega_1 \rangle \geqslant{} & \langle x, y - \omega_1 \rangle - \rho\langle u_1 - v_1, y - \omega_1 \rangle + \\ & \rho b(x, \omega_1) - \rho b(x, y) \qquad (\forall y \in K(x)), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \langle \omega_2, y - \omega_2 \rangle \geqslant{} & \langle x, y - \omega_2 \rangle - \rho\langle u_2 - v_2, y - \omega_2 \rangle + \\ & \rho b(x, \omega_2) - \rho b(x, y) \qquad (\forall y \in K(x)), \end{aligned} \tag{15}$$

其中常数 $\rho > 0$。在(14) 中取 $y = \omega_2$ 和在(15) 中取 $y = \omega_1$, 把所得的不等式相加, 有

$$\langle \omega_1 - \omega_2, \omega_1 - \omega_2 \rangle \leqslant -\rho\langle u_1 - u_2 - (v_1 - v_2), \omega_1 - \omega_2 \rangle \leqslant$$
$$\rho(\| u_1 - u_2 \| + \| v_1 - v_2 \|) \| \omega_1 - \omega_2 \|,$$

即:

$$\| \omega_1 - \omega_2 \| \leqslant \rho(\| u_1 - u_2 \| + \| v_1 - v_2 \|)\cdot$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon/2\rho$, 当 $\| u_1 - u_2 \| < \delta$ 和 $\| v_1 - v_2 \| < \delta$ 时有 $\| \omega_1 - \omega_2 \| < \varepsilon$, 所以 $\omega(x, u, v)$ 关于 $(u, v) \in T(x) \times A(x)$ 连续, 因为 $T(x) \in C(\mathrm{H})$ 和 $A(x) \in C(\mathrm{H})$, 由 Tychnoff 定理, 有 $T(x) \times A(x_0) \in C(\mathrm{H} \times \mathrm{H})$, 所以 $F(x) \in C(\mathrm{H})$, 即 $F(x)$ 是紧值映射·

第二步, 如果 $F: \mathrm{H} \to C(\mathrm{H})$ 是 $\theta_H_$压缩映射, 由引理 2.1 和定理 2.1 可得 GMQVIP$(T, A, b, k(x))$ 有解·

现在, 我们只须证明 F 是压缩映射, 对任意 $x_1, x_2 \in \mathrm{H}$, 选取任意 $\omega_1 = \omega_1(x_1, u_1, v_1) \in F(x_1) \subset K(x_1)$, 其中 $u_1 \in T(x_1)$ 和 $v_1 \in A(x_1)$, 有

$$\langle \omega_1, y - \omega_1 \rangle \geqslant \langle x_1, y - \omega_1 \rangle - \rho\langle u_1 - v_1, y - \omega_1 \rangle +$$
$$\rho b(x_1, \omega_1) - \rho b(x_1, y), \ \forall y \in K(x_1)\cdot \tag{16}$$

因为 $T(x_2) \in C(\mathrm{H})$ 和 $A(x_1) \in C(\mathrm{H})$, 由 Nadler[13], 存在 $u_2 \in T(x_2)$ 和 $v_2 \in A(x_2)$, 使得

$$\| u_1 - u_2 \| \leqslant H(T(x_1), T(x_2)), \ \| v_1 - v_2 \| \leqslant H(A(x_1), A(x_2))\cdot \tag{17}$$

设 ω_2 是关于 x_2, u_2 和 v_2 的问题(2.1) 的解, 即 $\omega_2 = \omega_2(x_2, u_2, v_2) \in F(x_2) \subset K(x_2)$ 满足

$$\langle \omega_2, y - \omega_2 \rangle \geqslant \langle x_2, y - \omega_2 \rangle - \rho\langle u_2 - v_2, y - \omega_2 \rangle +$$
$$\rho b(x_2, \omega_2) - \rho b(x_2, y), \ \forall y \in K(x_2), \tag{18}$$

不等式(16) 和(18) 的两边分别加上 $\langle -m(x_1), y - \omega_1 \rangle$ 和$\langle -m(x_2), y - \omega_2 \rangle$, 再分别取 $y = \omega_2 - m(x_2) + m(x_1) \in K(x_1)$ 和 $\omega_1 - m(x_1) + m(x_2) \in K(x_2)$, 把所得的不等式相加, 并注意到 $b(\cdot, \cdot)$ 满足条件 i), iii) 和 iv), 我们得到

$$\begin{aligned}
&\langle \omega_1 - m(x_1) + m(x_2) - \omega_2, \omega_1 - m(x_1) + m(]s2) - \omega_2 \rangle \leqslant \\
&\quad \langle x_1 - m(x_1) + m(x_2) - x_2, \omega_1 - m(x_1) + m(x_2) - \omega_2 \rangle - \\
&\quad \rho\langle u_1 - u_2 - (v_1 - v_2), \omega_1 - m(x_1) + m(x_2) - \omega_2 \rangle + \\
&\quad \rho b(-x_1, \omega_1) - \rho b(-x_1, \omega_2 - m(x_2) + m(x_1)) - \\
&\quad \rho b(x_2, \omega_2) + \rho b(x_2, \omega_1 - m(x_1) + m(x_2)) \leqslant \\
&\quad \langle x_1 - m(x_1) + m(x_2) - x_2, \omega_1 - m(x_1) + m(x_2) - \omega_2 \rangle - \\
&\quad \rho\langle u_1 - u_2 - (v_1 - v_2), \omega_1 - m(x_1) + m(x_2) - \omega_2 \rangle + \\
&\quad \rho b(-x_1, \omega_1 - m(x_1) + m(x_2) - \omega_2) + \\
&\quad \rho b(x_2, \omega_1 - m(x_1) + m(x_2) - \omega_2) = \\
&\quad \langle x_1 - x_2 - \rho(u_1 - u_2) + \rho(v_1 - v_2) - (m(x_1) - m(x_2)), \\
&\quad \omega_1 - m(x_1) + m(x_2 - \omega_2 \rangle + \\
&\quad \rho b(x_2 - x_1, \omega_1 - m(x_1) + m(x_2) - \omega_2) \leqslant \\
&\quad (\| x_1 - x_2 - \rho(u_1 - u_2) \| + \| m(x_1) - m(x_2) \| + \rho \| v_1 - v_2 \| + \\
&\quad \rho\gamma \| x_1 - x_2 \|) \| \omega_1 - m(x_1 + m(x_2) - \omega_2 \|,
\end{aligned} \tag{19}$$

所以

$$\| \omega_1 - \omega_2 - (m(x_1) - m(x_2)) \| \leqslant \| m(x_1) - m(x_2) \| + \rho \| v_1 - v_2 \| +$$
$$\rho\gamma \| x_1 - x_2 \| + \| \rho(u_1 - u_2) - (x_1 - x_2) \|\cdot \tag{20}$$

由三角不等式可得

$$\|\omega_1-\omega_2\| \leqslant 2\|m(x_1)-m(x_2)\| + \rho\|v_1-v_2\| + \rho\gamma\|x_1-x_2\| + \|\rho(u_1-u_2)-(x_1-x_2)\| \cdot \tag{21}$$

因为 T, A 和 m 都是 Lipschitz 连续的而且 T 是强单调的· 由不等式(17) 并用应 Noor[3] 技巧, 有

$$\|m(x_1)-m(x_2)\| \leqslant \mu\|x_1-x_2\|,$$
$$\|v_1-v_2\| \leqslant H(A(x_1),A(x_2)) \leqslant \lambda\|x_1-x_2\|,$$
$$\|u_1-u_2\| \leqslant H(T(x_1),T(x_2)) \leqslant \beta\|x_1-x_2\|,$$
$$\|\rho(u_1-u_2)-(x_1-x_2)\| \leqslant \sqrt{1-2\alpha\beta+\beta^2\rho^2}$$

于是, 由(21), 我们得到

$$\|\omega_1-\omega_2\| \leqslant (2\mu+\rho(\gamma+\lambda)+\sqrt{1-2\alpha\beta+\beta^2\rho^2})\|x_1-x_2\| \cdot$$

令 $\theta = 2\mu+\rho(\gamma+\lambda)+\sqrt{1-2\alpha\rho+\beta^2\rho^2}$, 因为条件(13) 成立, 所以 $\theta < 1$ 而且有

$$\sup_{\omega\in F(x_1)} d(F(x_2),\omega) \leqslant \theta\|x_2-x_1\| \qquad (\forall x_1, x_2 \in \mathrm{H}),$$

由相同的论证, 我们能证明

$$\sup_{\omega\in F(x_2)} d(\omega, F(x_1)) \leqslant \theta\|x_2-x_1\| \qquad (\forall x_1, x_2 \in \mathrm{H}),$$

由 Hausdorff 度量的定义可得

$$H(F(x_2),F(x_1)) \leqslant \theta\|x_2-x_1\|, \qquad (\forall x_1, x_2 \in \mathrm{H}) \cdot$$

这就证明了 F 是 θ_H_压缩映射·

2) 由算法 3.1, 我们得到四个序列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 和 $\{\omega_n\}$, 并满足: 对 $n \geqslant 0$

$$\left.\begin{aligned} &u_n \in T(x_n), \quad v_n \in A(x_{\,}), \\ &x_{n+1} = \omega_n = \omega_n(x_n,u_n,v_n) \in F(x_n) \subset K(x_n), \\ &\|u_n-u_{n+1}\| \leqslant H(T(x_n),T(x_{n+1})), \\ &\|v_n-v_{n+1}\| \leqslant H(A(x_n),A(x_{n+1})), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\langle\omega_n, y-\omega_n\rangle \geqslant \langle x_n, y-\omega_n\rangle - \rho\langle u_n-v_n, y-\omega_n\rangle + \rho b(x_n,\omega_n) - \rho b(x_n,y), \ \forall y \in K(x_n) \cdot \tag{23}$$

因为(22) 和(23) 成立, 由与 1) 类似的证明可得, 对 $n \geqslant 1$

$$\|x_{n+1}-x_n\| = \|\omega_n-\omega_{n-1}\| \leqslant \theta\|x_n-x_{n-1}\|,$$

由此得到 $\{x_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 序列, 因此存在 $\hat{x} \in \mathrm{H}$, 使得 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\hat{x}$· 因为 T 是 β_H_Lipschitz 连续的且(22) 成立, 有

$$\|u_n-u_{n-1}\| \leqslant H(T(x_n),T(x_{n-1})) \leqslant \beta\|x_n-c_{n-1}\| \cdot$$

所以 $\{u_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 序列, 设 $\{u_n\}$ 强收敛于 $\hat{u}$· 由三角不等式可得

$$d(\hat{u},T(\hat{x})) \leqslant d(\hat{u},u_n) + H(u_n,T(x_n)) + H(T(x_n),T(\hat{x})) \leqslant d(\hat{u},\hat{u}_n) + \beta\|x_n-\hat{x}\| \to 0,$$

所以 $\hat{u} \in T(\hat{x})$· 由与上面类似的论证, 存在 $\hat{v}$ 使得 $\{v_n\}$ 强收敛于 $\hat{v}$ 而且 $\hat{v} \in A(\hat{x})$· 定义 $\omega = \omega(\hat{x},\hat{u},\hat{v}) \in F(\hat{x})$ 为:

$$\langle\omega, y-\omega\rangle \geqslant \langle\hat{x}, y-\omega\rangle - \rho\langle\hat{u}-\hat{v}, y-\omega\rangle + \rho b(\hat{x},\omega) - \rho b(\hat{x},y) \qquad (\forall y \in K(\hat{x})), \tag{24}$$

如果 $\omega = \hat{x}$, 由 $\rho > 0$, 那么 $(\hat{x},\hat{u},\hat{v})$ 是 GMQVIP$(T,A,b,K(x))$ 的解, 为此, 只须证明 $\omega_n =$

$x_{n+1} \to \omega$• 因为不等式(23)和(24)成立，应用不等式(21)我们有，对 $n \geqslant 1$

$$\| \omega_n - \omega \| \leqslant 2 \| m(x_n) - m(\hat{x}) \| + \rho \| v_n - \hat{v} \| + \rho\gamma \| x_n - \hat{x} \| + \| \rho(u_n - \hat{u}) - (x_n - \hat{x}) \|,$$

因为 m 是 μ_Lipschitz 连续的，我们得到

$$\| \omega_n - \omega \| \leqslant (2\mu + \rho\gamma + 1) \| x_n - \hat{x} \| + \rho \| u_n - \hat{u} \| + \rho \| v_n - \hat{v} \| \to 0,$$

故 $\omega_n = x_{n+1} \to \omega$•

注 3.2 定理 3.1 推广了 Noor[1]的定理 3.1 和 Siddiqi 和 Ansari[9]的定理 3.1•

注 3.3 作为定理 3.1 的特殊情况，下面的推论 3.1 回答了 Noor[1, p.52]提出的公开问题•

推论 3.1 设 $K, K(x), m(x)$ 和 b 满足定理 3.1 中条件，$f: H \to H$ 是 α_强单调和 β_Lipschitz 连续的，假设存在常数 $\rho > 0$，使得

$$\left.\begin{aligned} &\mu < \frac{1}{2},\ k = \alpha - \gamma(1 - 2\mu) > 0, \\ &k^2 > 4\mu(1-\mu)[\beta^2 - \gamma^2], \\ &\left| \rho - \frac{k}{\beta^2 - \gamma^2} \right| < \frac{\sqrt{k^2 - 4\mu(1-\mu)[\beta^2 - \gamma^2]}}{\beta^2 - \gamma^2}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

那么 1) MQVIP$(t, b, K(x))$ 有解•

2) 由算法 3.2 定义的迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛 $\hat{x}$，且 $\hat{x}$ 是 MQVIP$(f, b, K(x))$ 的解•

证明 在定理 3.1 的证明中，令 $T = f$, $A(x) \equiv 0$, $(\forall x, y \in H)$，并注意到注 2.1, 2.3, 3.1 结论由定理 3.1 得到•

致谢：作者衷心感谢丁协平教授的有益的意见和建议•

[参 考 文 献]

[1] Noor M A. General algorithm for variational inequalities[J]. Math Japonica, 1993, **38**(1): 47~53.

[2] Noor M A, Noor K I. Iterative methods for variational inequalities[J]. Methods Oper Res, 1979, **31**: 455~463.

[3] Noor M A. An iterative scheme for a class of quasi_variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1985, **110**: 463~468.

[4] Noor M A. General nonlinear variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1987, **126**: 78~84.

[5] Glowinski R, Lions J L, Tremolieres R. Numerical Analysis of Variational Inequatities[M]. Amsterdam: North_Holland, 1981.

[6] Noor M A. Mixed variational inequalities[J]. Appl Math Lett, 1990, **3**(2): 73~75.

[7] Noor M A. An iterative algorithm for nonlinear variational inequalities[J]. Appl Math Lett, 1992, **5**(4): 11~14.

[8] Cohen G. Auxiliary problem extended to variational inequalities[J]. J Optim Theor Appl, 1988, **59**: 325~333.

[9] Siddiqi A H, Ansari Q H. Strongly nonlinear quasi_variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1990, **149**: 444~450.

[10] Ding Xieping. Generalized strongly nonlinear quasi_variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1993, **173**(2): 577~587.

[11] 张石生. 不动点理论及应用[M]. 重庆: 重庆出版社, 1984.
[12] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及应用[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1991.
[13] Nadler S B, Jr. Multi_valued contraction mapping[J], Pacific J Math, 1969, **30**: 475~ 488.

Existence and Iterative Algorithms of Solutions for Generalized Mixed Quasi_Variational Inequalities

Luo Chunlin
(Department of Mathematics, Kangding Teacher's College,
Kangding, Sichuan 626001, P R China)

Abstract: In this paper, by using the auxiliary technique of variational inequalities, the existence and iterative algorithms of solutions for a class of generalized mixed quasi_variational inequalities are studied. Our results answer the open problems mentioned by Noor, improve and generalize some recent known results.

Key words: generalized mixed quasi_variational inequalities; strongly monotone; Lipschitz continuous; Hausdorff metric