

文章编号: 1000_0887(1999)08_0809_06

弹性直杆中一类动力屈曲问题的渐近解^{*}

韩 强¹, 张善元², 杨桂通²

(1. 华南理工大学 交通学院 力学系, 广州 510641; 2. 太原工业大学 应用力学研究所, 太原 030024)

摘要: 对于弹性杆受刚性块轴向撞击的动力屈曲问题而言, 由于轴向载荷形式较为复杂, 问题将归结为关于非线性偏微分方程组解的讨论, 至今仍未能得到一个理论上的解析解, 为此, 讨论了有限长理想弹性直杆的此类动力屈曲问题, 采用小参数的摄动展开和变分法, 成功地得到了这一问题的一个理论上的近似解, 并给出了相应的算例, 从中得到了一些有益的结论。

关键词: 动力屈曲; 摄动法; 屈曲模态

中图分类号: O347. 2; O313. 4 文献标识码: A

引 言

直杆动力屈曲问题的研究已有悠久的历史, 作为最常用的结构单元, 其屈曲问题一直受到人们的广泛重视。然而对这一问题的研究从数值分析方面看, 大都采用有限差分法, 在理论分析方法上, 一般不考虑轴向惯性的影响, 也不计及剪切变形、转动惯性和大挠度效应, 而是假设直杆具有某种形式的初缺陷, 然后讨论杆中这些初缺陷在冲击载荷作用下被激发的行为。最常采用的方法是放大函数法, 然而放大函数法本身存在着一些固有的不足, 同时, 由于决定屈曲特性的是结构本身, 而不是初缺陷是否存在, 因此研究无初缺陷杆的动力屈曲问题, 对于我们更准确地理解结构的冲击特性具有重要的意义。

对于弹性杆受刚性块轴向撞击的动力屈曲问题而言, 由于轴向载荷形式较为复杂, 问题将归结为关于非线性偏微分方程组解的讨论, 至今仍未能得到一个理论上的解析解。为此, Hayashi 等^[1-3]曾采用了有限差分法, 分别对 Bernoulli-Euler 梁及 Timoshenko 梁做了低速和高速撞击的数值分析。对同一类似问题, Ari-Gur^[4]也于 1982 年进行了有限差分计算, 借助于动态放大因子 DLF 的概念, 提出了一个动力屈曲准则, 这一准则显然吸取了 B_R 运动准则的主要思想。

本文讨论了长为 L 的理想弹性直杆的此类动力屈曲问题, 采用小参数的摄动展开和变分法, 试图给出这一问题的一个理论上的渐近解。

1 基本方程的推导

如图 1 所示, 考虑长为 L 的理想弹性直杆, 二端固定, 在杆一端一质量为 M 的刚性块以速度 V 撞击杆端, 计及横向和轴向惯性效应, 假定杆在应力波传播的初期发生屈曲, 即认为杆屈

* 收稿日期: 1997_07_05;

基金项目: 国家自然科学基金资助课题(19672039), 山西省自然科学基金资助课题(971004)

作者简介: 韩强(1963~), 男, 教授, 博士, 发表论文 40 余篇

曲时应力波在杆的另一端尚未发生反射,且刚性块和杆的冲击端保持接触,在此前提下讨论屈曲时各有关参量的相互关系。

其中: ρ 为材料密度; E 为弹性模量; G 为剪切模量; A 为杆的横截面积。

杆变形后横截面仍为平面,如图 2 所示。

以 $u(x, t)$ 、 $W(x, t)$ 、 $\phi(x, t)$ 分别表示轴向位移、横向挠度和横截面转动角,则有:

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z\phi(x, t) + \frac{1}{2} \int_x^t \phi^2(x, t) dx, \quad (1)$$

其中: $c^2 = E/\rho$ 为应力纵波波速, $u_0(x, t)$ 为整个横截面的压缩位移, $z\phi(x, t)$ 为横截面转动造成的轴向位移, $\frac{1}{2} \int_x^t \phi^2(x, t) dx$ 为横向弯曲引起的轴向位移,且由图易知:

$$y = \frac{\partial W}{\partial x} - \phi. \quad (2)$$

杆横截面上内力素分别为轴力 $N(x, t)$ 、剪力 $Q(x, t)$ 和弯矩 $M(x, t)$, 其中:

$$N(x, t) = \iint_A \sigma dA = E \iint_A u'(x, z, t) dA, \quad (3)$$

$$Q(x, t) = KG \iint_A y(x, t) dA, \quad (4)$$

$$M(x, t) = \iint_A \sigma_z dA = E \iint_A u'(x, z, t) z dA. \quad (5)$$

(4) 式中 K 为与横截面形状有关的剪切变形系数,将(1)、(2)二式代入(3)~(5)有:

$$N(x, t) = EA \left[u'_0(x, t) - \frac{1}{2} \phi^2(x, t) \right] = EA u'(x, t), \quad (6)$$

其中: $u(x, t) = u(x, 0, t)$;

$$Q(x, t) = KGA [W'(x, t) - \phi(x, t)]; \quad (7)$$

$$M(x, t) = -EI\phi'(x, t), \quad (8)$$

其中 I 为杆横截面的惯性矩。

在小变形的前提下,取 $\sin \phi \approx \phi$, $\cos \phi \approx 1$, 并且计及轴向、横向和转动惯性,由图 2 中杆的变形单元,可得杆的动力方程:

$$\rho A \ddot{u} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial(Q\phi)}{\partial x}, \quad \rho A \ddot{W} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial(N\phi)}{\partial x}, \quad \rho A \ddot{\phi} = -\frac{\partial M}{\partial x} + Q. \quad (9)$$

将动力方程化为以位移表示的形式,且注意到

$$\iint_A z dA = 0, \quad \iint_A z^2 dA = I,$$

有:

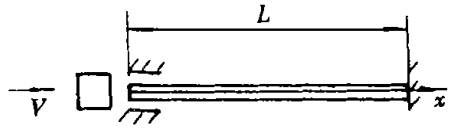


图 1 理想弹性直杆

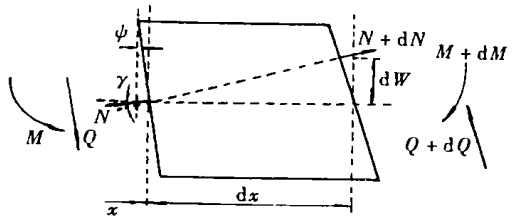


图 2 杆的变形单元

$$\begin{cases} \ddot{u} = \frac{E}{\rho} u'' - \frac{KG}{\rho} [(W' - \phi)\phi]', \\ \dot{W} = \frac{E}{\rho} (u'\phi)' + \frac{KG}{\rho} (W'' - \phi'), \\ \dot{\phi} = \frac{E}{\rho} \phi'' + \frac{KGA}{I\rho} (W' - \phi). \end{cases} \quad (10)$$

对方程(10)进行量纲一化,量纲为一的参数取为:

$$r^2 = \frac{I}{A}, \quad x = \frac{x}{l_0}, \quad t = \frac{ct}{l_0}, \quad u = \frac{u}{l_0}, \quad W = \frac{W}{l_0}, \quad l_0 = \frac{M}{\rho A},$$

则方程的量纲一的形式为:

$$\begin{cases} \ddot{u} - u'' = -a^2 [(W' - \phi)\phi]', \\ \dot{W} - (u'\phi)' = a^2 (W'' - \phi'), \\ W' - \phi = \varepsilon a^{-2} (\ddot{\phi} - \phi''). \end{cases} \quad (11)$$

其中: $a^2 = KG/E$, $\varepsilon = (r/l_0)^2$. 方程(11)应满足初始条件和相应的边界条件:

$$\begin{cases} u(0, 0) = 0, \quad \dot{u}(0, 0) = V = V/c, \\ W(0, t) = W(L, t) = \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, \quad W(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

其中 $L = L/l_0$, 对冲击体 M , 其量纲一化的动力方程为:

$$[\ddot{u} - u']|_{x=0} = 0. \quad (13)$$

因此, 锤杆类动力屈曲问题可归结为关于非线性偏微分方程组(11)在相应的初、边界条件下解的讨论.

2 屈曲模态的确定

(11)式是一个非线性偏微分方程组, 无法得到其精确解, 然而我们注意到: $\varepsilon = (r/l_0)^2$, 在一般情况下, $0 < \varepsilon \ll 1$, 为此, 取:

$$\begin{cases} u(x, t) = u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t) + o(\varepsilon^2), \\ W(x, t) = W_0(x, t) + \varepsilon W_1(x, t) + o(\varepsilon^2), \\ \phi(x, t) = \phi_0(x, t) + \varepsilon \phi_1(x, t) + o(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (14)$$

将 u 、 W 、 ϕ 依小参数 ε 摄动展开, 代入方程组(11)在零阶近似的意义上, (11)第一、三式化为:

$$\dot{W}_0 - \phi_0 = 0, \quad \ddot{u}_0 - u_0'' = 0. \quad (15)$$

将 u_0 、 W_0 、 ϕ_0 仍用 u 、 W 、 ϕ 表示, 则方程组(11)可变为:

$$\ddot{u} - u'' = 0, \quad \dot{W} - [u'W'']' = \varepsilon(\dot{W} - W''), \quad \phi = W'. \quad (16)$$

其初、边界条件仍为(12)所示.

对于方程式(16)第一式, 取 $u = f(x - t)$, 结合(12)式不难求得:

$$u(x, t) = \begin{cases} V[1 - e^{-(x-t)}] & (0 \leq x \leq t), \\ 0 & (t < x \leq L). \end{cases} \quad (17)$$

将(17)式代入式(16)第二式, 可得:

$$\dot{W} + Ve^{-t}(e^x W')' - \varepsilon(\dot{W} - W'') = 0 \quad (18)$$

或

$$\int_0^L [\ddot{W} + V e^{-t} (e^x W')' - \varepsilon (\ddot{W} - W'')] \delta W dx = 0 \quad (19)$$

取

$$W(x, t) = \sum_n T_n(t) \left[1 - \cos \frac{2n\pi}{L} x \right], \quad (20)$$

不难验证, 所给位移模式满足了杆二端固支的边界条件, 代入式(19) 进行相应的变分运算可化为:

$$\int_0^L \left\{ \sum_n \dot{T}_n \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{L} x \right) + V e^{-t} \sum_n \left(e^x \frac{2n\pi}{L} \sin \frac{2n\pi}{L} x \right)' T_n - \varepsilon \left[\sum_n \dot{T}_n \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 \cos \frac{2n\pi}{L} x + \sum_n T_n \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^4 \cos \frac{2n\pi}{L} x \right] \right\} \cdot \sum_n \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{L} x \right) \delta T_n dx = 0 \quad (21)$$

也即:

$$\int_0^L \left\{ \sum_m \sum_n \dot{T}_n \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{L} x \right) \left[1 - \cos \frac{2m\pi}{L} x \right] \delta T_m + V e^{-t} \sum_m \sum_n \left(e^x \frac{2n\pi}{L} \sin \frac{2n\pi}{L} x \right)' T_n \times \left[1 - \cos \frac{2m\pi}{L} x \right] \delta T_m - \varepsilon \left[\sum_m \sum_n \dot{T}_n \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 \cos \frac{2n\pi}{L} x \left[1 - \cos \frac{2m\pi}{L} x \right] \delta T_m + \sum_m \sum_n T_n \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^4 \cos \frac{2n\pi}{L} x \left[1 - \cos \frac{2m\pi}{L} x \right] \delta T_m \right] \right\} dx = 0 \quad (22)$$

利用三角函数的正交性, 并结合变分 δT_m 的任意性, 可得方程(23) 式:

$$L \left[1 + \left(\frac{2m\pi}{L} \right)^2 \varepsilon \right] \dot{T}_m + \left(\frac{2m\pi}{L} \right)^2 \left[\left(\frac{2m\pi}{L} \right)^2 \varepsilon L - V e^{-t} (e^L - 1) \right] T_m + 2 \sum_{n=1}^m L \dot{T}_n = 0, \quad (23)$$

其中 $m = 1, 2, \dots$, (23) 是由 m 个方程构成的变系数常微分方程组。

当杆端冲击速度较低时, 杆的动力屈曲模态为低阶模态, 为此, 在式(23) 中取 $m = 1$, 此时, 式(23) 化为:

$$L \left[3 + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \varepsilon \right] \dot{T} + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \left[\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \varepsilon L - V e^{-t} (e^L - 1) \right] T = 0 \quad (24)$$

做变量代换 $\tau = 1 - e^{-t}$ 代入(24) 式, 并考虑到 $0 < \varepsilon \ll 1$, 略去方程中第二项内含小参数 ε 的项, 但保留高阶导数中含 ε 的项, 则有式:

$$(1 - \tau) \frac{d^2 T}{d\tau^2} - \frac{dT}{d\tau} - \lambda^2 T = 0, \quad (25)$$

其中

$$\lambda^2 = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (e^L - 1) V \left[3 + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \varepsilon \right] > 0.$$

在对方程(25) 进行求解之前, 首先来讨论解的性质, 为此, 取变量代换 $T(\tau) = \alpha / \sqrt{1 - \tau}$ 代入式(25), 有:

$$\ddot{\alpha} + \frac{1 - 4\lambda^2(1 - \tau)}{(1 - \tau)^2} \alpha = 0 \quad (26)$$

由此式不难看出, 由于 $\lambda^2 > 0$, $(1 - \tau) > 0$, 它对应的是一个发散型的解, 确实表征着杆的屈曲。为求解(2) 式取 $\tau^* = 2\lambda \sqrt{1 - \tau}$, 式(25) 化为:

$$\frac{d^2 T}{d\tau^{*2}} + \frac{1}{\tau^*} \frac{dT}{d\tau^*} - T = 0 \quad (26)'$$

此为零阶虚宗量的 Bessel 方程, 其解是:

$$T(\tau) = A_1 I_0(2\lambda \sqrt{1-\tau}) + A_2 K_0(2\lambda \sqrt{1-\tau}), \quad (27)$$

其中 I_0, K_0 为零阶变型的 Bessel 函数, 故此, 屈曲模态可用下式表示:

$$W(x, t) = \left[1 - \cos \frac{2\pi}{L} x \right] [A_1 I_0(2\lambda e^{-t/2}) + A_2 K_0(2\lambda e^{-t/2})] \cdot \quad (28)$$

3 临界冲击参量的确定

在屈曲模态波形(28)式中, 仍有一常数尚未确定, 其值事实上就反映了屈曲发生时各临界冲击参量的相互关系. 为确定常数 λ 的取值, 将方程(24) 改写为如下形式:

$$\dot{T} + [\alpha^2 - \lambda^2 e^{-t}] T = 0 \quad (0 \leq t \leq L), \quad (29)$$

其中 $\alpha^2 = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 \varepsilon \left[3 + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \varepsilon \right]$.

在应力波未反射之前 ($0 \leq t \leq L$), 杆发生屈曲, 意味着方程对应的解为发散型, 这是因为周期性振荡表征的并非屈曲运动, 由此可得发生屈曲的临界条件为:

$$\alpha^2 = \lambda^2 e^{-L} \quad (30)$$

或

$$V = \frac{4cQ\pi^2}{ML[1 - e^{-\rho L/M}]} \cdot \quad (31)$$

由上述分析不难得到以下一些主要结论:

发生屈曲的临界条件为(31)式, 同时由(30)式知:

$$\lambda = \alpha e^{L/2}, \quad (32)$$

故此屈曲模态波形可由式(27)求得:

$$T(t) = A_1 I_0(2\alpha e^{(L-t)/2}) + A_2 K_0(2\alpha e^{(L-t)/2}) \cdot \quad (33)$$

结合初始条件(12), 有:

$$A_1 I_0(2\alpha e^{L/2}) + A_2 K_0(2\alpha e^{L/2}) = 0 \cdot \quad (34)$$

由此, 模态波形是:

$$W(x, t) = \left[1 - \cos \frac{2\pi}{L} x \right] [K_0(2\alpha e^{-L/2}) I_0(2\alpha e^{-(L-t)/2}) - I_0(2\alpha e^{-L/2}) K_0(2\alpha e^{(L-t)/2})] \cdot \quad (35)$$

下面就一矩形截面铝合金杆为例进行了数值计算, 材料为 LY12 铝合金, 横截面尺寸为 $3.85 \times 10.10 \text{ mm}^2$, 杆长 $L = 300 \text{ mm}$, $\rho = 2.78 \times 10^{-3} \text{ g/mm}^3$, $c = 5.08 \times 10^6 \text{ mm/s}$, 图3即为临界屈曲曲线.

由此不难看出当 $M \rightarrow 0$ 时, $V \rightarrow \infty$, 而 $M \rightarrow \infty$ 时, $V \rightarrow 0$ 这与我们的直观想象是相同的. 同时图3的 $V_{cr} \sim M_{cr}$ 曲线反映了此类动力屈曲问题的这样一个特点, 即对某一长度的杆, 杆的临界屈曲质量可分为对临界冲击速度的敏感区和不敏感区, 在敏感区, 冲击速度的微小变化都将导致杆的临界屈曲质量产生一个巨大的差异.

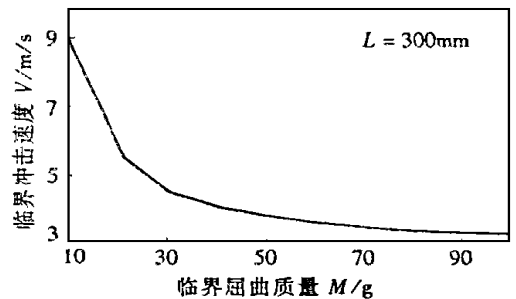


图 3

[参 考 文 献]

- [1] Hayashi T, Sano Y. Dynamic buckling of elastic bars[J]. Bulletin of JAME, 1972, **15**(88): 1167~1175.
- [2] Hayashi T, Sano Y. Dynamic buckling of elastic bars, 2nd Report[J]. Bulletin of JAME, 1972, **15**(88): 1175~1184.
- [3] Hayashi T, Sano Y, Asai O. Dynamic buckling of elastic bars, 3rd Report[J]. Bulletin of JAME, 1972, **15**(89): 1333~1338.
- [4] Ari_Gur J, Weller T, Singer J. Experimental and theoretical studies of columns under axial impact [J]. Int J Solids Structures, 1982, **18**(7): 619~641.
- [5] 韩强. 几种结构的动力屈曲、分叉和混沌运动研究[D]. (博士学位论文). 太原: 太原工业大学, 1996.

The Asymptotic Solution of a Dynamic Buckling Problem in Elastic Columns

Han Qiang¹, Zhang Shanyuan², Yang Guitong²

(1. Department of Mechanics, College of Traffic and Communications,
South China University of Technology, Guangzhou 510641, P R China;

2. Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, P R China)

Abstract: For the dynamic buckling of an elastic column, which is subjected to a longitudinal impact by a rigid body, the form of the axial load is very complicated. The problem may be reduced to discuss the solution of nonlinear partial differential equations. So far, a theoretical solution may not be obtained. In this paper, this dynamic buckling problem of an ideal elastic column with finite length is discussed. By the perturbation method with a small parameter and the variational method, a solution of this problem is given. Finally, numerical computation is carried out, from this, some beneficial conclusions are obtained.

Key words: dynamic buckling; perturbation method; buckling mode