文章编号: 1000_0887(1999)08_0822_07

线性微分方程的微分算子级数解法*

柯红路[1], 谢和熙[2]

(1. 重庆建筑大学 应用泛系研究所, 重庆 400045; 2. 重庆交通学院, 重庆 400074)

(吴学谋推荐)

摘要: 介绍了微分算子级数法及其求解线性常微分方程通解、特解的原理、方法和实例• 这个方法和其它解法的差别, 在于不借助其它学科知识的启示, 直接通过方程中微分算子的运算求出方程的特解或通解•

关 键 词: 线性微分方程; 微分算子级数法; 通解; 特解
中图分类号: O175.3　文献标识码: A

1 微分算子、逆算子及其性质

1.1 微分算子与逆算子

设 n 阶线性常微分方程为

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \tag{1}$$

其中 $a_i \in \mathbf{R}\ (i = 0, 1, \cdots, n)$• 令 $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \cdots, \mathrm{D}^n = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$, 于是方程(1) 简写为

$$\mathrm{P}(\mathrm{D})y = f(x), \tag{2}$$

其中

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}) = a_0\mathrm{D}^n + a_1\mathrm{D}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathrm{D} + a_n• \tag{3}$$

P(D) 称为微分方程(2) 关于微分算子元素 D 的微分算子多项式, 令

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}) = 0, \tag{4}$$

称为方程(2) 的算子特征方程, 简称特征方程, 其解称为方程的特征根•

将 $\dfrac{1}{\mathrm{P}(\mathrm{D})}$ 记为 $\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{D})$, 称为算子 P(D) 的逆算子• 特别是 P(D) = D 时, $\dfrac{1}{\mathrm{P}(\mathrm{D})} = \dfrac{1}{\mathrm{D}} = \int[\quad]\mathrm{d}x$, 这个不定积分不加任意常数•

1.2 逆算子的性质[1]

结论 1 若 $\mathrm{P}(\mathrm{D}) = \sum_{i=0}^{n} a_i\mathrm{D}^{n-i}$, $a_i \in \mathbf{R}\ (i = 0, 1, \cdots, n)$, 其根记为 $\lambda_j \in \mathbf{Z}\ (j = 1, 2, \cdots, n)$, 则

(i) $$\mathrm{P}(\mathrm{D}) = a_0(\mathrm{D} - \lambda_1)\cdots(\mathrm{D} - \lambda_n), \tag{5}$$

(ii) $$\frac{1}{\mathrm{P}(\mathrm{D})} = \mathrm{P}^{-1}(\mathrm{D}) = \frac{A_1}{D - \lambda_1} + \cdots + \frac{A_n}{D - \lambda_n}, \tag{6}$$

---

* 收稿日期: 1998_04_02; 修订日期: 1999_01_25
作者简介: 柯红路(1938~), 男, 研究员, 重庆建筑大学应用泛系研究所常务副所长.

$A_j \in \mathbf{Z}\,(j = 1, 2, \cdots, n)$ 为待定系数(但不必具体求出)•

在算子特征方程(4)中，视D为变元，由代数基本定理，在复数域 $\mathbf{Z}$ 中关于D的 n 次方程存在 n 个根(L 重按 L 个根计)•　不妨将这 n 个根记为 $\lambda_j \in \mathbf{Z}\,(j = 1, 2, \cdots, n)$，从而可得(5)式•　进而有 $\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{D})$ 的分解式(6)：

$$\frac{1}{\mathrm{P}(\mathrm{D})} = \frac{1}{a_0(\mathrm{D}-\lambda_1)\cdots(\mathrm{D}-\lambda_n)} = \frac{A_1}{\mathrm{D}-\lambda_1} + \cdots + \frac{A_n}{\mathrm{D}-\lambda_n},$$

其中 $A_j \in \mathbf{Z}\,(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是待定系数•　(6)式右端称为逆算子 $\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{D})$ 的部分分式•

证毕•

结论2　设

(a) $\mathrm{P}(\mathrm{D}) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \mathrm{D}^{n-i}$，其中 $a_i \in \mathbf{R}\,(i = 0, 1, \cdots, n)$；

(b) $|\mathrm{D}| < 1$ 和 $|d| = \min\left\{1, |a_n| \Big/ \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|\right\}$，

则

$$(\,\mathrm{i}\,)\quad \left|\frac{a_0\mathrm{D}^n + \cdots + a_{n-1}\mathrm{D}}{a_n}\right| < 1; \tag{7}$$

$$(\,\mathrm{ii}\,)\quad \mathrm{P}^{-1}(\mathrm{D}) = \frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{a_0\mathrm{D}^n + \cdots + a_{n-1}\mathrm{D}}{a_n}\right)^k• \tag{8}$$

证明　(ⅰ) 由假设(b)，因 $|\mathrm{D}| < 1$，不妨设 $|\mathrm{D}| < |d|$，显然有 $|\mathrm{D}|^k < |\mathrm{D}|\,(k = 2, \cdots, n)$，从而 a_0、$a_n \neq 0$ 时有

$$\left|\frac{a_0\mathrm{D}^n + \cdots + a_{n-1}\mathrm{D}}{a_n}\right| \leqslant \frac{1}{|a_n|}\left[|a_0||\mathrm{D}|^n + \cdots + |a_{n-1}||\mathrm{D}|\right] <$$

$$\frac{|\mathrm{D}|}{|a_n|}\left[|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|\right] = \frac{|\mathrm{D}|}{|a_n|}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|•$$

此式当 $|\mathrm{D}| < |d|$ 时，由(b)有

$$|\mathrm{D}|\frac{1}{|a_n|}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k| < \left(|a_n| \Big/ \sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right)\frac{1}{|a_k|}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k| = 1,$$

即是(7)式

$$\left|\frac{a_0\mathrm{D}^n + \cdots + a_{n-1}\mathrm{D}}{a_n}\right| < 1$$

成立•　证毕•

(ⅱ) 因为 $\dfrac{1}{1-Z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} Z^k \quad (|Z| < 1)$，

今用

$$\frac{1}{a_n}(a_0\mathrm{D}^n + \cdots + a_{n-1}\mathrm{D})$$

代替上式中的 Z，根据(7)式，逆算子 $\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{D})$ 可展成如下的无穷级数：

$$\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{D}) = 1 \Big/ a_n\left[\frac{1}{a_n}(a_0\mathrm{D}^n + \cdots + a_{n-1}\mathrm{D}) + 1\right] =$$

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{a_0\mathrm{D}^n + \cdots + a_{n-1}\mathrm{D}}{a_n}\right)^k•$$

即(8) 式成立• 证毕•

特别

(ⅰ) 当 $P(D)= D-\lambda$ 时, $P^{-1}(D)=\dfrac{1}{D-\lambda}=-\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{D^k}{\lambda^{k+1}}$; (7a)

(ⅱ) 当 $j<n$ 时, $P_j(D)=a_0D^j+\cdots+a_{j-1}D+a_j$, 又当 $|D|<1$ 时,

$$P^{-1}(D)=\frac{1}{a_j}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{a_0D^j+\cdots+a_{j-1}D}{a_j}\right)^k• \tag{7b}$$

(8) 式右端称为微分算子元素 D 所成的无穷级数, 简称微分算子级数•

1.3 逆算子的运算公式

(ⅰ) $\dfrac{1}{P(D)}e^{\lambda x}=\dfrac{1}{P(\lambda)}e^{\lambda x}$, $P(\lambda)\neq 0$, 当 $P(\lambda)=0$ 时, 再用下面公式(ⅱ) 求解;

(ⅱ) $\dfrac{1}{P(D)}e^{\lambda x}v(x)=e^{\lambda x}\dfrac{1}{P(D+\lambda)}v(x)$, (称位移性定理) 当 $v(x)\in P_m(x)$, (m 正整数), $\dfrac{1}{P(D+\lambda)}v(x)$ 可用结论 2 的微分算子级数进行计算;

(ⅲ) $\dfrac{1}{P(D^2)}\begin{Bmatrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{Bmatrix}=\dfrac{1}{P(-\alpha^2)}\begin{Bmatrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{Bmatrix}$, $(P(-\alpha^2)\neq 0)$•

当 $P(-\alpha^2)=0$ 时设

$$P(D^2)=(D^2+\alpha^2)^LQ(D^2),$$

其中 $Q(-\alpha^2)\neq 0$, L 为自然数, 从而(用 Re, Im 分别记为复数的实、虚部)

$$\frac{1}{P(D^2)}\begin{Bmatrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{Bmatrix}=\frac{1}{Q(-\alpha^2)}\frac{1}{(D^2+\alpha^2)^L}\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\ e^{i\alpha x}\\ \mathrm{Im}\ e^{i\alpha x}\end{Bmatrix},$$

再用逆算子公式(ⅱ) 求其结果[2,3]•

2 线性微分方程的微分算子级数解法

2.1 非齐次方程的通解[2,3]

(ⅰ) 非齐次线性方程(2) 的通解 y 等于它的一个特解y 与对应齐次方程

$$P(D)y=0 \tag{9}$$

的通解 Y 之和即$y=Y+y$;

(ⅱ) 当 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 时, 设方程(2) 右端$f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 对应的特解分别记为 y_1 及 y_2, 则方程(2) 的特解$y=y_1+y_2$, 用微分算子级数法可同时求出 y_1、y_2• 于是方程(2) 的通解

$$y=Y+y_1+y_2•$$

一般: 若 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)$ 时, 设方程(2) 右端 $f_i(x)$ 对应的特解为 y_i, 则方程(2) 的通解

$$y=Y+\sum_{i=1}^{n}y_i•$$

2.2 齐次方程的通解[2,3,4]

由齐次方程(9), 令 $P(D)=0$, 即

$$a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n=0, \tag{10}$$

得方程(2)也是(9)的特征方程 $P(D)=0$• 看结论 1 的(5)式,记 $P(D)=0$ 的 n 个根为 $D=\lambda_i\in\mathbf{Z}\ (i=1,2,\cdots,n)$($L$ 重根按 L 个根计),于是有分解式:

$$P(D)=a_0(D-\lambda_1)\cdots(D-\lambda_n),$$

即(5)式•

再由结论 1 的(6)式得方程(9)的通解:

$$Y=\frac{1}{P(D)}\cdot 0=P^{-1}(D)\cdot 0=\frac{A_1}{D-\lambda_1}\cdot 0+\cdots+\frac{A_n}{D-\lambda_n}\cdot 0=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{D-\lambda_i}\cdot 0,$$

由逆算子运算公式(ii)

$$Y=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{D-\lambda_i}e^{\lambda_i x}(e^{-\lambda_i x}\cdot 0)\overset{\text{位移性}}{=}\sum_{i=1}^{n}e^{\lambda_i x}\frac{A_i}{D}\cdot 0=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i x},\tag{11}$$

其中 $c_i=A_i d_i$,而 $d_i=\dfrac{1}{D}\cdot 0$•

讨论 1

(i) 当 λ 为(4)式的单根时,则(9)式的通解中有一项 $ce^{\lambda x}$• 当 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为(10)的 n 个相异实根时,则(11)式为(9)的通解;

(ii) 当(10)式有复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ 时,推演(11)式的类似方法,可得方程(9)的通解中的两个实解 $e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$,即两项;

(iii) 当 λ 为(10)式的 L 重根时,则方程(9)的通解中有 L 项: $e^{\lambda x}(c_1+c_2x+\cdots+c_Lx^{L-1})$;

(iv) 当 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ 为方程(10)的 L 重根时,则(9)式通解中有 $2L$ 项:

$$e^{\alpha x}[(c_1+c_2x+\cdots+c_Lx^{L-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_Lx^{L-1})\sin\beta x]•$$

讨论 2

根据上述讨论当 $n=2$ 时,可把齐次方程的通解表示式具体写出来• 相应的方程(9)式改写为:

$$(D^2+PD+q)y=0,\tag{9a}$$

相应的算子特征方程是

$$D^2+PD+q=0•\tag{4a}$$

特征方程(4a)的根 λ 不同,则方程(9a)的通解 Y 的形式也不相同,现分列于下:

1) (4a)有相异实根: $\lambda_1\neq\lambda_2$,则 $Y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$;

2) (4a)有相等实根, $\lambda_1=\lambda_2$,则 $Y=e^{\lambda_1 x}(c_1+c_2x)$;

3) (4a)有一对共轭复根,设 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$,则(9a)的通解:

$$Y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)•$$

2.3 非齐次线性方程的特解[5,3,4]

方程(2)中, $a_0\neq 0$、$a_n\neq 0$, $f(x)\in C^{\infty}$ 时,由非齐次方程(2),移动微分算子 $P(D)$ 得特解:

$$y=\frac{1}{P(D)}f(x)•$$

(i) 当 $f(x)=P_m(x)$, $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式且

$$\left|\frac{1}{a_n}(a_0D^n+\cdots+a_{n-1}D)\right|<1$$

时,

$$y=\frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{a_0D^n+\cdots+a_{n-1}D}{a_n}\right)^kP_m(x);$$

(ii) 当 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 时, 用逆算子位移性求 y;

(iii) 当 $f(x)\notin P_m(x)$ 时, 可视(2) 式右端的具体情况, 用逆算子公式(i)~(iii) 求方程(2) 的特解•

3 举 例

例 1 求微分方程 $y^{(4)}-y=x^6-3x^4$ 的通解•

解 将原方程写为算子形式方程:

$$(D^4-1)y=x^6-3x^4•$$

相应的算子特征方程: $D^4-1=(D^2-1)(D^2+1)=0$, 得特征根, $D_{1,2}=\pm1$; $D_{3,4}=\pm i$, 由"讨论 1" 得对应齐次微分方程的通解:

$$Y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x•$$

由原方程得特解:

$$y=\frac{1}{D^4-1}(x^6-3x^4)=-\sum_{k=0}^{\infty}(D^4)^k(x^6-3x^4)\overset{k=0,1}{=}$$

$$-[x^6-3x^4+(360x^2-72)]=$$

$$-x^6+3x^4-360x^2+72•$$

故原方程的通解:

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x-x^6+3x^4-360x^2+72•$$

例 2 设微分方程 $y''+2y'+y=x^2e^x$ 试求其通解•

解 原方程写为算子形式方程:

$$(D^2+2D+1)y=x^2e^x,$$

相应的算子特征方程为: $D^2+2D+1=(D+1)^2=0$, 得特征根, $D_{1,2}=-1$, 由"讨论 2" 相应的齐次方程的通解:

$$Y=e^{-x}(c_1+c_2x)•$$

由原方程得特解:

$$y=\frac{1}{(D+1)^2}x^2e^x\overset{\text{位移性}}{=}e^x\frac{1}{(D+1+1)^2}x^2=e^x\frac{1}{D^2+4D+4}x^2=$$

$$\frac{1}{4}e^x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{D^2+4D}{4}\right)^kx^2\overset{k=0,1,2}{=}$$

$$\frac{1}{4}e^x\left(x^2-2x+\frac{3}{2}\right)•$$

故原方程的通解为:

$$y=e^{-x}(c_1+c_2x)+\frac{1}{4}e^x\left(x^2-2x+\frac{3}{2}\right)•$$

例 3 求微分方程 $y''-2y'+10y=x^2e^x\sin 3x$ 的通解•

解 原方程写为微分算子形式:

$$(D^2-2D+10)y=x^2\,\mathrm{Im}\,e^{(1+3i)x},$$

其中 Im 表示取复数的虚部•

相应的算子特征方程: $D^2-2D+10=0$, 得特征根, $D_{1,2}=1\pm3i$, 由"讨论 2" 对应齐次方

程的通解为:

$$Y = e^{x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x),$$

再由算子方程得特解:

$$y = \frac{1}{D^2 - 2D + 10}\mathrm{Im}\,x^2 e^{(1+3i)x} = \frac{1}{[D-(1+3i)][D-(1-3i)]}\mathrm{Im}\,x^2 e^{(1+3i)x} \overset{\text{位移性}}{=}$$

$$\mathrm{Im}\,e^{(1+3i)x}\frac{1}{D[D+(1+3i)-(1-3i)]}x^2 =$$

$$\mathrm{Im}\,e^{(1+3i)x}\frac{1}{D(D+6i)}x^2 = \mathrm{Im}\,e^{(1+3i)x}\frac{1}{6iD}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{D}{6i}\right)^k x^2 =$$

$$\mathrm{Im}\,e^{(1+3i)x}\frac{1}{6D}\left[-\left(x^2 - \frac{1}{18}\right)i + \frac{x}{3}\right] =$$

$$\frac{1}{6}\mathrm{Im}\,e^{x}(\cos 3x + i\sin 3x)\left[-\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x}{18}\right)i + \frac{x^2}{6}\right] =$$

$$-\frac{1}{6}e^{x}\left[\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x}{18}\right)\cos 3x - \frac{1}{6}x^2\sin 3x\right].$$

故原方程的通解:

$$y = e^{x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x) - \frac{1}{6}e^{x}\left[\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{x}{18}\right)\cos 3x - \frac{1}{6}x^2\sin 3x\right].$$

例 4　设微分方程 $y'' + y = x + \cos x + e^{2x}$, 求其通解.

解　将原方程写为算子形式:

$$(D^2 + 1)y = x + \cos x + e^{2x}.$$

此方程相应的特征方程: $D^2 + 1 = 0$, 得特征根 $D_{1,2} = \pm i$, 由“讨论 2”得相应齐次方程的通解:

$$Y = c_1\cos x + c_2\sin x.$$

由算子方程移动微分算子得特解:

$$y = \frac{1}{D^2+1}(x + \mathrm{Re}\,e^{ix} + e^{2x}) =$$

$$\frac{1}{D^2+1}x + \frac{1}{D^2+1}\mathrm{Re}\,e^{ix} + \frac{1}{D^2+1}e^{2x} \overset{\text{逆算子运算公式(i)～(iii)}}{=}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(D^2)^k x + \mathrm{Re}\,e^{ix}\frac{1}{(D+i)^2+1}\cdot 1 + \frac{1}{2^2+1}e^{2x} =$$

$$x + \mathrm{Re}\,e^{ix}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D+2i}e^{0x}\right) + \frac{1}{5}e^{2x} =$$

$$x + \mathrm{Re}\,e^{ix}\frac{1}{D}\frac{1}{2i} + \frac{1}{5}e^{2x} =$$

$$x + \mathrm{Re}(\cos x + i\sin x)\left(-\frac{ix}{2}\right) + \frac{1}{5}e^{2x} =$$

$$x + \frac{1}{2}x\sin x + \frac{1}{5}e^{2x},$$

于是原方程的通解:

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + x + \frac{1}{2}x\sin x + \frac{1}{5}e^{2x}.$$

微分算子级数法的其它应用参见[6]、[7]、[8]、[9]、[10].

[参 考 文 献]

[1] 刘斯铁尔尼克 L A, 索波列夫 . 泛函分析概要[M]. 杨从仁译. 北京: 科学出版社, 1964, 102~110.

[2] 柯红路. 微分算子级数法及其在微分方程中的应用[J]. 渝州大学学报, 1998, **15**(3): 11~16.

[3] 柯红路. 微分算子级数法及常系数线性微分方程求解[M]. 重庆: 重庆建筑大学基础科学系, 1996.

[4] 曾蜀良. 求二阶线性微分方程特解的一个方法[J]. 内江教育学院学报(综合版), 1996, (2): 63~67.

[5] 柯红路, 唐钰其. 非齐次常微分方程特解的微分算子级数解法[J]. 重庆后勤工程学院学报, 1995, **11**(4): 56~60.

[6] 柯红路. 一类柯西问题的算子级数解法[J]. 重庆建工学院学报, 1989, **11**(3): 30~36.

[7] 柯红路. 用微分算子级数法计算广义积分[J]. 重庆建筑大学学报, 1996, **18**(1): 110~113.

[8] 曾蜀良, 柯红路. 线性微分方程组的微分算子级数解法[J]. 重庆建筑大学学报, 1996, **18**(3): 123~130.

[9] 柯红路. 随机向量数字特征的新算法[J]. 工科数学, 1997, **13**(1): 155~159.

[10] 谢和熙, 柯红路. 两类问题的微分算子级数解及其应用[J]. 重庆师范学院学报, 1997, **14**(1): 41~45.

Differentiator Series Solution of Linear Differential Ordinary Equation

Ke Honglu, Xie Hexi

(1. Applied Pansystems Institute, Chongqing University of Architecture and Engineering, Chongqing 400045, P R China;
2. Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing 400074, P R China)

Abstract: In this paper, the principle techinique of the differentiator method, and some examples using the method to obtain the general solution and special solution of the differential equation are introduced. The essential difference between this method and the others is that by this method special and general solutions can be obtained directly with the operations of the differentor in the differential equation and without the enlightenment of other scientific knowledge.

Key words: linear ordinary differential equation; differentiator series method; special solution; general solution