

文章编号: 1000\_0887(1999)08\_0867\_08

# Poisson 比为 $1/2$ 材料中球形空穴突变和球形空穴萌生的分岔问题研究\*

金 明, 黄克服, 武际可

(北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871)

(黄永念推荐)

摘要: 研究 Poisson 比为  $1/2$  的 Hooke 材料中, 空穴的突变和萌生现象。求解一个球对称几何非线性弹性力学的移动边界(moving boundary)问题, 空穴为球形, 远离空穴处为三向均匀拉伸应力状态, 在当前构形上列控制方程; 在当前构形边界上列边界条件。找到了这个自由边界问题的封闭解并得到空穴半径趋于零时的叉型分岔解。计算结果显示, 在位移\_载荷曲线上存在一个切分岔型分岔点(或鞍结点型分岔点、极值型分岔点), 这个分岔点说明在外力作用下空穴会发生突变, 即突然“长大”; 当球腔半径趋于零时, 这个切分岔转化为叉型分岔(或分枝型分岔), 这个叉型分岔可以解释实心球中的空穴萌生现象。

关键词: 移动边界; 切分岔; 叉型分岔; 空穴萌生

中图分类号: O322 文献标识码: A

## 引 言

近年来人们对材料中空穴突变和萌生现象的研究, 为探讨材料破坏的力学机制开辟了一个新的研究方向。而以非线性弹性力学结合非线性分岔理论研究这一问题成为其中的一个重要分支, 并获得许多进展。

1959 年 Gent 和 Lindley<sup>[1]</sup>首次在实验室中发现了橡胶材料中空穴萌生现象。他们用均匀密实的橡胶材料做拉伸试验时发现, 当载荷达到某一临界值时可以听到试件内部的爆裂声(an audible popping), 试验结束后将试件切开, 会观察到截面上出现一些空穴。

1982 年 Ball<sup>[2]</sup>提出超弹性材料空穴萌生的基本理论, 找到了一类存在分岔解的储能函数, 并给出空穴萌生载荷的表达形式。随后, 一批超弹性材料的空穴分岔问题得到解决。其中, 球形空穴萌生问题的论文最多。C. O. Horgan 等<sup>[3]</sup>得到 Blatz\_Ko 材料球形空穴萌生问题分岔解, 它是一个封闭解; M. M. Carrol<sup>[4]</sup>得到 Varga 材料球腔问题分岔解, 也是一个封闭解形式; Hao Tian\_Hu<sup>[5]</sup>证实了 C. O. Horgan 在文献[3]中的结果; C. O. Horgan<sup>[6]</sup>针对球形空穴萌生问题, 证明了在一定条件下推广的 Varga 材料分岔解的表达式; 尚新春等<sup>[7]</sup>得到修正 Blatz\_Ko

\* 收稿日期: 1998\_01\_14; 修订日期: 1999\_02\_08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672001, 19990510); 国家教委博士点基金资助项目; 大连理工大学结构工程国家重点实验室基金资助项目

作者简介: 金明(1963~), 男, 讲师, 博士。

Ko 材料球形空穴萌生问题的两个新的解析解。M.S. Chou\_Wang<sup>[8]</sup> 得到一类不可压缩超弹性材料球形空穴萌生问题分岔解, 这些材料包括 neo\_Hookean、Mooney\_Rivlin、Rivlin\_Saunders 和 power\_law type 4 种材料。C. O. Horgan 等<sup>[9]</sup> 和 D. A. Polignone<sup>[10]</sup> 讨论了各向异性材料中球形空穴萌生问题。

Hou Hang\_sheng<sup>[11]</sup> 研究了球对称载荷下轴对称扁球形空腔形成的可能性。

上述研究均以 Ball<sup>[2]</sup> 的理论为基础, 侧重于超弹性材料的空穴分岔问题。本文研究线弹性材料球对称问题的球形空穴突变和球形空穴萌生现象。在当前构形上列控制方程, 材料的本构关系为 Hooke 定律, 采用考虑大位移的几何非线性关系; 在当前的当前构形的边界上列边界条件。

### 1 数学模型

考虑如下几何非线性弹性力学的移动边界(moving boundary) 问题。一个中心带球形空穴的球体, 见图 1, 设在初始构形上, 球体半径为 1, 空穴半径为  $a \in (0, 1)$ ; 在当前构形上, 空穴表面受均布拉力  $p_1$ , 球体外表面受均布拉力  $p_2$ ,  $p_1, p_2$  均为未知量。

这是一个球对称问题。以球心为坐标原点, 在当前构形上, 建立球坐标系, 坐标  $(r, \theta, \phi)$ 。设  $r$  方向位移  $u$ 、应变  $\epsilon_r$ 、Cauchy 应力  $\sigma_r$ ;  $\theta$  方向应变为  $\epsilon_\theta$ , Cauchy 应力为  $\sigma_\theta$ ;  $\phi$  方向应变为  $\epsilon_\phi$ , Cauchy 应力为  $\sigma_\phi$ 。考虑到  $\epsilon_\phi = \epsilon_\theta, \sigma_\phi = \sigma_\theta$  以及 Poisson 比为 1/2, 当前构形上的 Almansi 应变、Hooke 定律、平衡方程和当前构形上的边界条件分别为:

$$\epsilon_r = u' - \frac{1}{2}(u')^2, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{r}\right)^2; \quad (1)$$

$$\epsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \sigma_\theta), \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{2E}(\sigma_\theta - \sigma_r); \quad (2)$$

$$\dot{\sigma}_r + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0; \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} r = a + u_a: \sigma_r &= p_1, \\ r = 1 + u_1: \sigma_r &= p_2, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

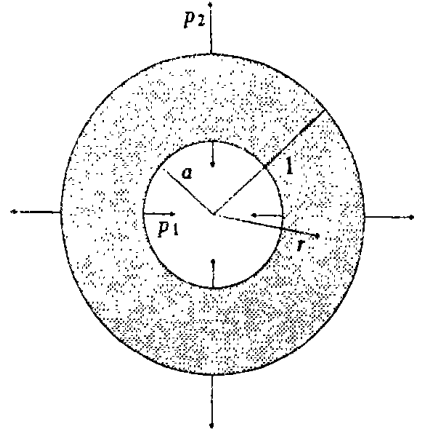


图 1 中心带球形空穴的球体

式中  $( )' = d( )/dr, E$  为弹性模量,  $u_a, u_1$  分别为空穴表面位移和球体外表面位移, 并且,  $u_a, u_1$  为未知量。

方程(1)、(2)、(3) 为当前构形上的几何非线性弹性力学方程组, (4) 式为当前构形边界上的边界条件。对球形空穴问题  $p_1 = 0$ , 设  $p_2 = p$ 。研究球形空穴的突变就是要确定  $u_a$  和  $p$  之间的关系, 考察  $u_a$  如何依赖于  $p$  而变化, 找出  $dp/du_a = 0$  的条件, 这个条件就是空穴突变的条件; 研究球形空穴的萌生就是要确定当球腔半径  $a \rightarrow 0$  时,  $u_a$  和  $p$  之间的关系, 找出从  $u_a = 0$  到  $u_a > 0$  这一瞬间的  $p$ , 这个  $p$  就是空穴萌生的临界载荷。

### 2 封闭解

在(1)、(2) 式中消去应力、应变, 保留位移, 得

$$-\frac{1}{2}(u')^2 + u' - \frac{1}{r^2}u^2 + \frac{2}{r}u = 0, \quad u \in (0, +\infty) \quad (5)$$

由(5)式

$$u' = 1 \pm \sqrt{1 + 2\left[-\frac{u^2}{r^2} + 2\frac{u}{r}\right]} \quad (6)$$

设  $u/r = v$ , 则(6)式化为:

$$\frac{dr}{r} = \frac{dv}{1 - v \pm \sqrt{3} \sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{2}}{3}(1 - v)\right]^2}} \quad (7)$$

引入参数  $\beta$ :

$$\beta = \alpha \pm \arccos\left[\frac{\sqrt{2}}{3}(1 - v)\right], \quad \beta \in [-\pi + \alpha, \pi + \alpha], \quad \beta \neq 0, \pi$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$$

则(7)式的积分为

$$r = c \frac{e^{\sqrt{2}\beta/3}}{|\sin \beta|^{1/3}}, \quad u = c \left[1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \cos(\beta - \alpha)\right] \frac{e^{\sqrt{2}\beta/3}}{|\sin \beta|^{1/3}} \quad (8)$$

式中,  $c > 0$  为积分常数。

设在当前构形上, 空穴表面、球体外表面上  $\beta$  分别取  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ , 则(8)式化为

$$\left. \begin{aligned} a + u_a &= c \frac{e^{\sqrt{2}\beta_1/3}}{|\sin \beta_1|^{1/3}}, \\ u_a &= c \left[1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \cos(\beta_1 - \alpha)\right] \frac{e^{\sqrt{2}\beta_1/3}}{|\sin \beta_1|^{1/3}}, \\ 1 + u_1 &= c \frac{e^{\sqrt{2}\beta_2/3}}{|\sin \beta_2|^{1/3}}, \\ u_1 &= c \left[1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \cos(\beta_2 - \alpha)\right] \frac{e^{\sqrt{2}\beta_2/3}}{|\sin \beta_2|^{1/3}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

消去  $u_a$ 、 $u_1$ , (9)式化为

$$\left. \begin{aligned} |\sin \beta_1| - \left(\frac{c}{a}\right)^3 \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} \cos(\beta_1 - \alpha) \right\}^3 \exp(\sqrt{2}\beta_1) &= 0, \\ |\sin \beta_2| - \left(\frac{c}{1}\right)^3 \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} \cos(\beta_2 - \alpha) \right\}^3 \exp(\sqrt{2}\beta_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

给定  $c > 0$ , 由(10)式确定  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 。考虑到(7)式右端项中被积函数在  $(\beta_1, \beta_2)$  上的连续性,  $(\beta_1, \beta_2)$  属于下列3个区间:  $[-\pi + \alpha, 0)$ 、 $(0, \pi)$ 、 $(\pi, \pi + \alpha]$ 。

将(2)式中第二式代入(3)式, 并考虑(1)式中第二式, 得

$$\frac{Q}{E} = 4 \int \frac{1}{r} \left[ \frac{u}{r} - \frac{u^2}{2r^2} \right] dr \quad (11)$$

将(8)式代入(11)式, 积分, 得

$$\frac{Q}{E} = \frac{\sqrt{2}}{2}\beta - \frac{5}{6}\sin^2\beta + \frac{\sqrt{2}}{12}\sin 2\beta + c_1 \quad (12)$$

式中  $c_1$  为积分常数。

将(12)式代入边界条件(4)式, 得

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}\beta - \frac{5}{6}\sin^2\beta + \frac{\sqrt{2}}{12}\sin 2\beta \Big|_{\beta_1}^{\beta_2}, \quad (13)$$

式中

$$\lambda = \frac{\sigma_r}{E} \Big|_{r=a+u_a}^{r=1+u_1} = \frac{p_2 - p_1}{E}.$$

综上所述, 我们得到自由边界问题(1)、(2)、(3)、(4)的封闭解。就是说, 给定  $c > 0$ , 由以  $\beta$  为参数的参数方程(8) 式确定  $u = u(r)$ ; 将  $u(r)$  代入(1)、(11) 式得  $\varepsilon(r)$ 、 $\varepsilon_\theta(r)$ 、 $\sigma_r(r)$ ; 由(10) 式确定  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ , 将  $\beta_1$ 、 $\beta_2$  代入(9) 式得  $u_a$ 、 $u_1$ ; 将  $\sigma_r(r)$  代入(4) 式得  $p_1$ 、 $p_2$ 。显然, 由(13) 式计算  $\lambda$  更为方便。

### 3 切分岔和空穴突变

对球形空穴问题,  $p_1 = 0$ 、 $p_2 = p$ ,  $\lambda = p/E$ 。对不同大小的球腔, 图5 给出  $u_a$ - $\lambda$  曲线, 从图5 可以看出, 每条曲线上存在一个切分岔型分岔点  $dp/du_a$  (或鞍结点型分岔点、极值型分岔点), 在这个分岔点, 载荷不变, 而空穴处于临界状态, 突然“长大”; 当载荷达到这个分岔点时, 空穴由稳定状态转化为不稳定状态, 发生突变。所以, 分岔点的载荷是临界载荷。

### 4 叉型分岔和空穴萌生

现考察  $a \rightarrow 0$  时,  $u_a$  和  $p$  之间的关系。

这时移动边界问题(1)、(2)、(3)、(4) 除存在平凡解

$$u = 0, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = 0, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = p$$

外, 还存在一个分岔解。分岔解确定如下:

首先, 确定分岔点位置。当  $a \rightarrow 0$ , 由(10) 式第一式, 得

$$\cos(\beta_1 - \alpha) = 0.$$

因为  $\beta_1 \in [-\pi + \alpha, \pi + \alpha]$ ,

所以  $\beta_1 = \pm \frac{\pi}{2} + \alpha$ 。

又令  $c \rightarrow 0$ , 由(10) 式第二式, 得

$$|\sin\beta_2|^{1/3} = 0,$$

因为  $\beta_2 \in [-\pi + \alpha, \pi + \alpha]$ ,

所以  $\beta_2 = 0, \pi$ 。

考虑到(7) 式右端项中的被积函数在开区间  $(\beta_1, \beta_2)$  上连续,  $(\beta_1, \beta_2)$  可能有下列3 种情况:  $(\pi/2 + \alpha, 0)$ 、 $(\pi/2 + \alpha, \pi)$ 、 $(-\pi/2 + \alpha, 0)$ 。讨论如下:

若  $(\beta_1, \beta_2) = (\pi/2 + \alpha, 0)$ , 则(13) 式化为

$$\lambda = \frac{8 - 3\sqrt{2}(\pi + 2\alpha)}{12} < 0,$$

不合题意。

若  $(\beta_1, \beta_2) = (\pi/2 + \alpha, \pi)$ , 则(9) 式第四式化为  $u_1 = -2 < 0$ , 不合题意。

若  $(\beta_1, \beta_2) = (-\pi/2 + \alpha, 0)$ , 则(9)、(13) 式化为

$$\lambda = \frac{8 + 3\sqrt{2}\pi - 6\sqrt{2}\alpha}{12} \approx 1.34, u_a = 0, u_1 = 0, \quad (14)$$

这种情况是合理的。

所以只有  $(\beta_1, \beta_2) = (-\pi/2 + \alpha, 0)$ , 符合题意。由(14) 式, 分岔点坐标为  $(u_a, \lambda) \approx (0, 1.34)$ 。

其次, 计算分岔曲线。令  $a \rightarrow 0, c > 0$ , 从以上讨论得知  $\beta_1 = -\pi/2 + \alpha$ ; 由(10) 式第二式确定  $\beta_2$  :

$$\left. \begin{aligned} |\sin\beta_2| - c^3 \left[ \sqrt{\frac{3}{2}} \cos(\beta_2 - \alpha) \right]^3 e^{\sqrt{2}\beta_2} &= 0, \\ c > 0, \beta_2 \in [-\pi + \alpha, 0]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

由(9) 式第二式和(13) 式, 得

$$\left. \begin{aligned} u_a &= c \frac{\exp\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right]}{|\cos\alpha|^{1/3}}, \\ \lambda &= \frac{\sqrt{2}}{2}\beta_2 - \frac{5}{6}\sin\beta_2 + \frac{\sqrt{2}}{12}\sin 2\beta_2 \Big|_{-\pi/2+\alpha}^{\beta_2}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(15)、(16) 式为分岔曲线方程。计算结果由图 6 给出, 从图 6 中可以看出分岔是叉型分岔, 并且分岔是向下的或是向左的(to the left, Ball<sup>[2]</sup>), 和 Ball<sup>[2]</sup> 关于 Cauchy traction 问题的论证结果一致。

设  $p_0$  为初始构形边界上的载荷,  $\lambda_0 = p_0/E$ , 则

$$\lambda_0 = (1 + u_1)^2 \lambda \quad (17)$$

考虑到(9) 式第三、四式, (17) 式可化为

$$\lambda_0 = \frac{2}{3\cos^2(\beta_2 - \alpha)} \lambda \quad (18)$$

由(18) 式, 可画出  $u_a-\lambda_0$  曲线, 如图 7 所示。图 7 中, 分岔是叉型分岔, 并且分岔是向上的或是向右的(to the right, Ball<sup>[2]</sup>), 和 Ball<sup>[2]</sup> 关于 dead\_load traction 问题的论证结果一致。这种向右的叉型分岔也和许多超弹性材料的计算结果一致<sup>[3][6][7][8][12]</sup>。

从图 6 可以看出, 点  $(u_a, \lambda) = (0, 0)$  到点

$$(u_a, \lambda) = \left( 0, \frac{8 + 3\sqrt{2}\pi - 6\sqrt{2}\alpha}{12} \right)$$

这段直线说明, 无论载荷如何变化, 实心球体是密实的, 没有空穴; 当

$$\lambda = \frac{8 + 3\sqrt{2}\pi - 6\sqrt{2}\alpha}{12}$$

时, 曲线沿着新解枝(15)、(16) 式“走”, 即沿图 6 中解枝 2“走”, 这时  $\lambda$  不变, 而  $u_a > 0$ , 说明在实心球体的球心处会“冒” 出一个“泡儿”, 即空穴萌生。

# 5 算 例

## 例 1 内压下弹性薄膜球的稳定性

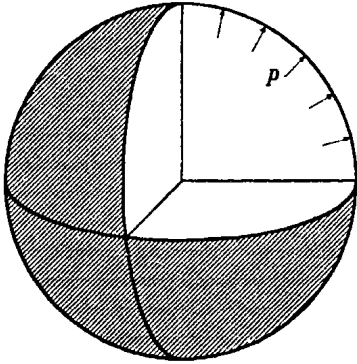


图 2 内压下的弹性薄膜球

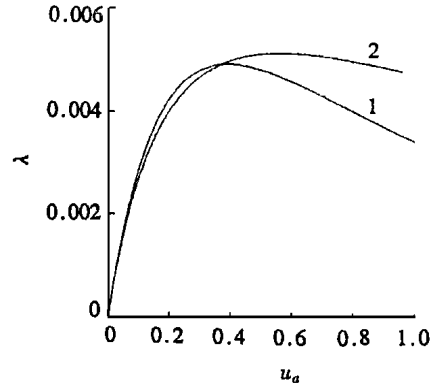


图 3  $u_a-\lambda$  曲线, 1 为文献 [13] 解, 2 为本文解

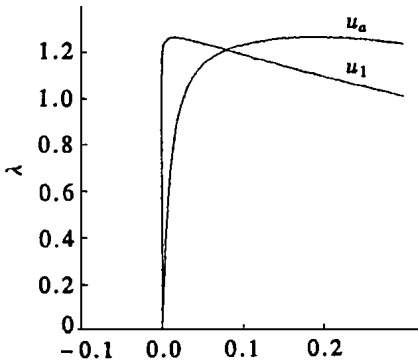


图 4  $a = 0.01$  时,  $u_a, u_1-\lambda$  曲线

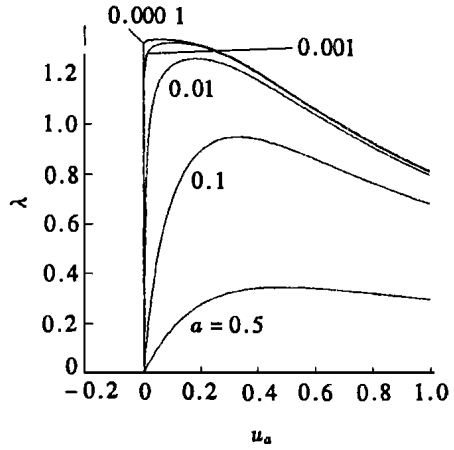


图 5  $a > 0$  时,  $u_a-\lambda$  曲线

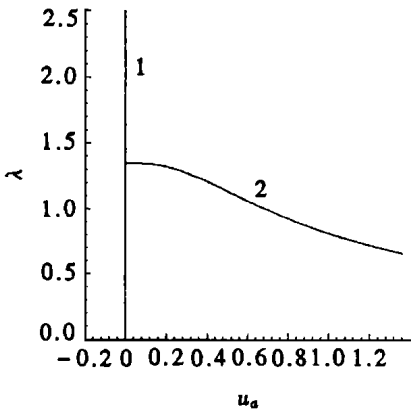


图 6  $u_a-\lambda$  曲线

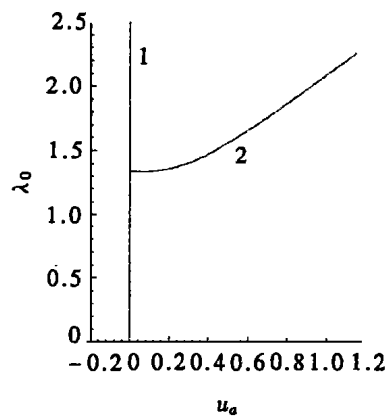


图 7  $u_a-\lambda_0$  曲线

图 2 为一内压作用下的弹性薄膜球,  $a = 0.99$ , 泊松比 1/2, 内压  $p$ , 参见文献[13], 显然  $p_2 = 0, p_1 = -p, \lambda = p/E$ . 计算结果见图 3.

### 例 2 球腔的切分岔(鞍结点分岔、极值型分岔)

一个中心带球形空穴的球体, 周围受均布拉力  $p$ , 见图 1. 显然  $\lambda = p/E$ , 图 4 表示  $a = 0.01$  时, 球体表面的径向位移  $u_1$ 、球腔表面的径向位移  $u_a$  和外载荷  $p$  的关系; 图 5 表示对不同大小的球腔,  $u_a$  和  $\lambda$  的关系.

### 例 3 叉型分岔和空穴萌生

实心球的叉型分岔曲线由图 6、图 7 给出,  $\lambda$  为当前构形边界上的载荷;  $\lambda_0$  为初始构形上边界的载荷.

## 6 结 论

本文方法可以定性描述 Hooke 材料中球形空穴的突变和球形空穴的萌生现象, 得到的分岔曲线和超弹性材料的结果一致.

### [参 考 文 献]

- [1] Gent A N, Lindley P B. Internal rupture of bonded rubber cylinders in tension[J]. Proc R Soc Lond, 1959, A249(1257): 195~ 205.
- [2] Ball J M. Discontinuous equilibrium solutions and cavitation in nonlinear elasticity[J]. Phil Trans R Soc Lond, 1982, A306: 557~ 611.
- [3] Horgan C O, Abeyaratne R. A bifurcation problem for a compressible nonlinearly elastic medium: growth of micro\_void[J]. J Elasticity, 1986, 16: 189~ 200.
- [4] Carroll M M. Finite strain solutions in compressible isotropic elasticity[J]. J Elasticity, 1988, 20: 65~ 92.
- [5] Hao Tian\_Hu. A theory of the appearance and growth of the micro\_void[J]. Int J Fracture, 1990, 43: R51~ R55.
- [6] Horgan C O. Void nucleation and growth for compressible nonlinearly elastic materials: an example [J]. Int J Solids Structures, 1992, 29(3): 279~ 291.
- [7] 尚新春, 程昌钧. 超弹性材料中的球形空穴分叉[J]. 力学学报, 1996, 28(6): 751~ 755.
- [8] Chou Wang M\_S. Void nucleation and growth for a class of incompressible nonlinearly elastic materials[J]. Int J Solids Structures, 1989, 25(11): 1239~ 1254.
- [9] Horgan C O, Pence T J. Cavity formation at the center of a composite incompressible nonlinearly elastic sphere[J]. Transactions of the ASME Journal of Applied Mechanics, 1989, 56: 302~ 308.
- [10] Polignone D A, Horgan C O. Effects of material anisotropy and inhomogeneity on cavitation for composite incompressible anisotropic nonlinearly elastic spheres[J]. Int J Solids Structures, 1993, 30(24): 3381~ 3416.
- [11] Hou Hang\_sheng. A study of combined asymmetric and cavitating bifurcations in neo\_Hookean material under symmetric dead loading[J]. Journal of Applied Mechanics, 1993, 60(2): 1~ 7.
- [12] Ertan N. Influence of compressibility and hardening on cavitation[J]. J Engng Mech, 1988, 114: 1231~ 1244.
- [13] 金明. 内压下弹性薄膜球的稳定性[J]. 力学与实践, 1997, 19(3): 32~ 33.
- [14] 武际可, 苏先榭. 弹性系统的稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 1994.

# A Study of the Catastrophe and the Cavitation for a Spherical Cavity in Hooke's Material with 1/2 Poisson's Ratio

Jin Ming, Huang Kefu, Wu Jike

(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking  
University, Beijing 100871, P R China)

**Abstract:** In this paper, the catastrophe of a spherical cavity and the cavitation of a spherical cavity for Hooke's material with 1/2 Poisson's ratio are studied. A nonlinear problem, which is a moving boundary problem for the geometrically nonlinear elasticity in radial symmetric, was solved analytically. The governing equations were written on the deformed region or on the present configuration. And the conditions were described on moving boundary. A closed form solution was found. Furthermore, a bifurcation solution in closed form was given from the trivial homogeneous solution of a solid sphere. The results indicate that there is a tangent bifurcation on the displacement-load curve for a sphere with a cavity. On the tangent bifurcation point, the cavity grows up suddenly, which is a kind of catastrophe. And there is a pitchfork bifurcation on the displacement-load curve for a solid sphere. On the pitchfork bifurcation point, there is a cavitation in the solid sphere.

**Key words;** moving boundary; tangent bifurcation; pitchfork bifurcation; cavitation