

文章编号: 1000_0887(1999)08_0875_06

求解微分方程初值问题的一种弧长法^{*}

武际可¹, 许为厚², 甄丽¹

(1. 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871; 2. 香港科技大学 数学系, 香港)

(黄永念推荐)

摘要: 对于连续介质力学问题中导出的微分方程初值问题, 常常具有解奇异性, 如不连续、Stiff 性质或激波间断。本文通过在相应空间, 引入一个或数个弧长参数变量, 克服解的奇异性。对于常微分方程组引入弧长参数变量后, 奇异性得以消除和削弱, 应用一般的解常微分方程组的方法(如 Runge_Kutta 法)求解。对于偏微分方程引入弧长参数变量后, 在相应的空间离散成常微分方程组, 用解奇异性常微分方程组相同的方法即可求解。本文给出了两个算例。

关键词: 微分方程; 数值方法; 弧长法; Stiff 方程; Burgers' 方程
中图分类号: O322; O241.8 文献标识码: A

引言

对于连续介质力学问题导出的偏微分方程(组)或常微分方程(组), 常常具有解的不连续、Stiff 性质或激波间断等奇异性。在国际上, 连续介质力学问题中解的奇异性问题, 一直是一个尚未很好解决的问题, 目前常用的方法如奇异摄动法和子波法, 为克服奇异性而使计算量成数量阶地增长。

有限单元法是结构计算最有效的方法之一, 在实际应用中, 人们发现载荷增量法因其刚度矩阵的奇异性而无法穿过载荷的极值点, Riks^[1]首次应用弧长法求解了带有参数的非线性方程中的极值问题, 20 年来已应用弧长法解决了大量的非线性问题^[2,3]。伪弧长法的基本思想是在解曲线上引入弧长参数, 并增加一个约束方程。本文把伪弧长法应用于求解带有奇异性的偏微分方程或常微分方程组的初值问题。对于常微分方程组引入弧长参数变量后, 奇异性得以消除和削弱, 应用一般的解常微分方程组的方法(如四阶 Runge_Kutta 法)求解。对于偏微分方程引入弧长参数变量后, 在相应的空间离散成常微分方程组, 用解奇异性常微分方程组相同的方法即可求解。这一方法因为仅在相应的空间引入弧长参量, 来克服解的不连续、Stiff 性质和激波间断, 与现有的方法相比, 思路简单, 程序实现容易, 并且精度高。本文给出了两个算例, 此方法也可推广应用于高维空间的微分方程的初值问题中去。

1 弧长方法

考虑常微分方程初值问题

* 收稿日期: 1998_04_20; 修订日期: 1999_02_14
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19990510, 19672001)
作者简介: 武际可(1934~), 男, 教授。

$$dy/dt = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad (1)$$

其中 $y, f \in R^n$. 假设弧长变量 s 满足 $t = t(s), y = y(s)$, 则有

$$\frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} = f(t, y), \quad \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dt} = 1. \quad (2)$$

从方程(2)得到

$$\left(\left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{dy_i}{ds} \right)^2 \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 1 + \sum_{i=1}^n f_i^2(t, y) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

$$\text{令} \quad \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{dy_i}{ds} \right)^2 = 1,$$

$$\text{则有} \quad \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 1 + \sum_{i=1}^n f_i^2(t, y). \quad (4)$$

利用方程(1)~(4), 可得到

$$dx/ds = F(x), \quad x(0) = x_0, \quad (5)$$

其中 $x, F \in R^{n+1}, t = x_{n+1}, x = (y, t), f_{n+1}(t, y) = 1, x_0 = (y_0, 0)$,

$$F_i(x) = \frac{f_i(t, y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2(t, y)}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n+1).$$

通过引入弧长变量 s , 初值问题(1) 变换成问题(5). 方程(5) 右边的向量场与方程(1) 的比较为单位化的向量场. 对于方程(1) 求解过程中存在的某些奇异性, 如极值点、不连续间断或 Stiff 性质, 变换成方程(5) 后, 奇异性得以消除和削弱, 则应用通常的方法如四阶 Runge_Kutta 法可以求解.

2 应用于 Stiff 方程

在[4]中讨论了 Van der Pol 系统方程, 其方程为

$$dy_1/dt = y_2, \quad dy_2/dt = \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1, \quad y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 0. \quad (6)$$

上式中令 $\mu = 500, t = x\mu, \mu^2 = 1/\varepsilon = 250\,000, z_1(t) = y_1(x), z_2(t) = \mu y_2(x)$, 代换后, 再把 z_1, z_2 换成 y_1, y_2, x 换成 t 得

$$dy_1/dt = y_2, \quad \varepsilon dy_2/dt = (1 - y_1^2)y_2 - y_1, \quad y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 0. \quad (7)$$

在[4]中, 用隐式的 Runge_Kutta 方法求解方程(7), 结果如图 1 所示. 我们用本文提到的方法, 将方程(7) 变换成式(5) 的形式, 用一般的四阶 Runge_Kutta 方法求解. 取弧长 s 的增量为 0.001, t 的计算步数为 10 000, 图 2 给出了计算结果.

3 应用于无粘性 Burgers' 方程

因为通过离散化, 偏微分方程可以变成常微分方程组, 所以以上的方法可以解偏微分方程. 作为一个算例, 下面求无粘性 Burgers' 方程的解. Burgers' 方程为

$$\partial U/\partial t + U\partial U/\partial X = 0, \quad (8)$$

有初值

$$U(X, 0) = \begin{cases} 24 + \sin(\pi(X - 0.5)), & \text{当 } 0.5 \leq X \leq 2.5, \\ 24, & \text{当 } X \leq 0.5 \text{ 或 } X \geq 2.5. \end{cases}$$

对以上 Burgers' 方程作变换

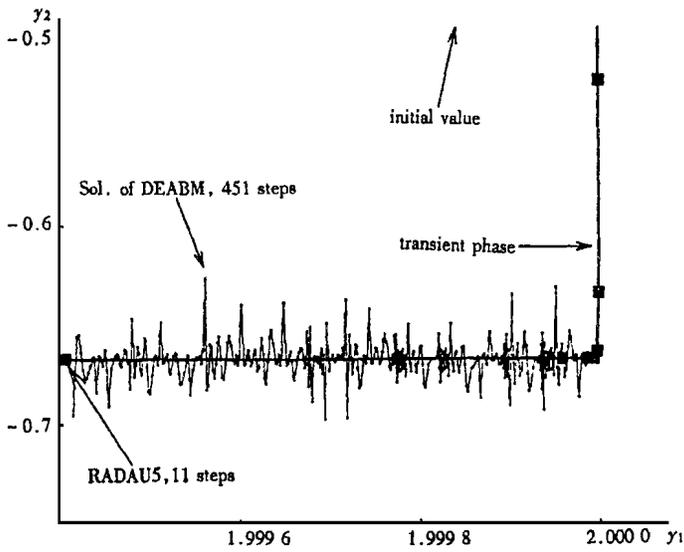
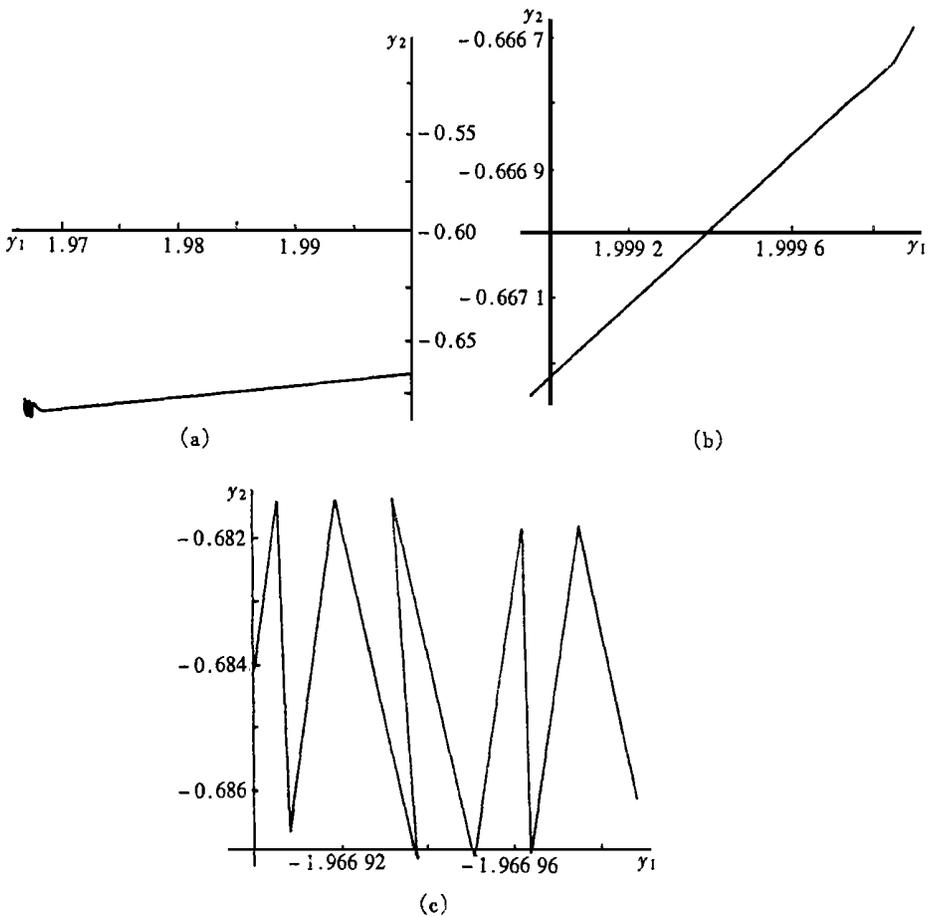


图 1 文献[4]的计算结果



(a) 第 5 000 计算步邻近的结果 (b) 对应于图 1 中的结果 (c) 第 10 000 计算步邻近的结果

图 2 本文计算结果, 弧长增量为 0.001, 计算步数为 10 000

$$U = a + u, \quad X = at + x \quad \text{取 } a = 24, \quad (9)$$

则方程(8)简化为

$$\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x = 0, \quad (10)$$

有初值

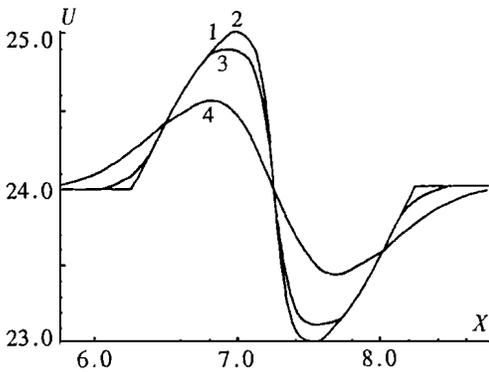
$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin(\pi(x - 0.5)), & \text{当 } 0.5 \leq x \leq 2.5 \\ 0, & \text{当 } x \leq 0.5 \text{ 或 } x \geq 2.5 \end{cases}$$

简化后的方程(10)的解, 相当于从以速度 a 运动的参考系来观察方程(8)的解. 将偏微分方程(10)在区间 $[0, 3.0]$ 上离散, 离散单元数为 n , 得到常微分方程组为

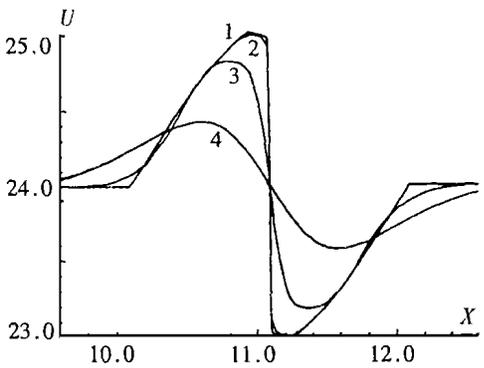
$$du_i / dt = -u_i(u_{i+1} - u_{i-1}) / 2\Delta x, \quad (11)$$

$$u_i(0) = \begin{cases} \sin(\pi(3.0i/n - 0.5)), & \text{当 } 0.5 \leq 3.0i/n \leq 2.5, \\ 0, & \text{当 } 0 \leq 3.0i/n \leq 0.5 \text{ 或 } 2.5 \leq 3.0i/n \leq 3.0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

采用均匀网格, $u_i = u(x_i, t)$, $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ 为网格步长, 将方程组(11)写成方程组(5)的形式, 由四阶 Runge_Kutta 方法求解, 结果如图3所示. 在文献[5]中, 用称为 Flux_Limiter 和 Slope_Limiter 的方法数值求解了 Burgers' 方程. 图3把本文的结果与文献[5]的结果和精确解进行了比较. 显然, 本文的结果与精确解吻合很好, 优于文献[5]的结果.



(a) 时间 $t = 0.24$



(b) 时间 $t = 0.40$

图3 本文计算结果(曲线1), 精确解(曲线2)和文献[5]中的结果(曲线3和曲线4)

通过计算发现, 随着 t 的增大, 曲线上的某些点沿 x 方向出现间断, 对于较大的 t , 在间断点附近计算的误差也越来越大. 所以我们引入另一个弧长变量 σ , $\sigma = \sigma(x, t)$, 其定义为

$$d\sigma^2 = dx^2 + du^2. \quad (12)$$

由(12)式知, x 与 σ 的关系可表示为

$$x = \int_0^\sigma \sqrt{1 - \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2} d\sigma, \quad (13)$$

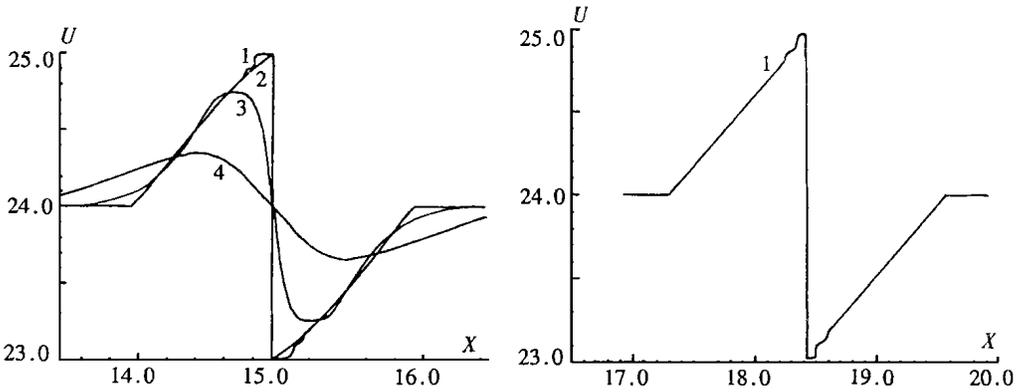
则方程(10)变为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u + \frac{\partial x}{\partial t}\right) \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2}} = 0, \quad (14)$$

初始条件为 $u(\sigma, 0) = \varphi(\sigma)$.

方程(14)中含有因子 $I = 1 / \sqrt{1 - \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2}$, 当 $\alpha = 1 - \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2 = 0$, I 值变为无穷大, 在实际计算中, 我们采用下式计算

$$I = \begin{cases} I & (\alpha > \varepsilon), \\ 1/\varepsilon & (\alpha < \varepsilon), \end{cases} \quad (15)$$



(a) 时间 $t = 0.56$

(b) 时间 $t = 0.7054$

图4 本文计算结果(曲线1),精确解(曲线2)和文献[5]中的结果(曲线3和曲线4)

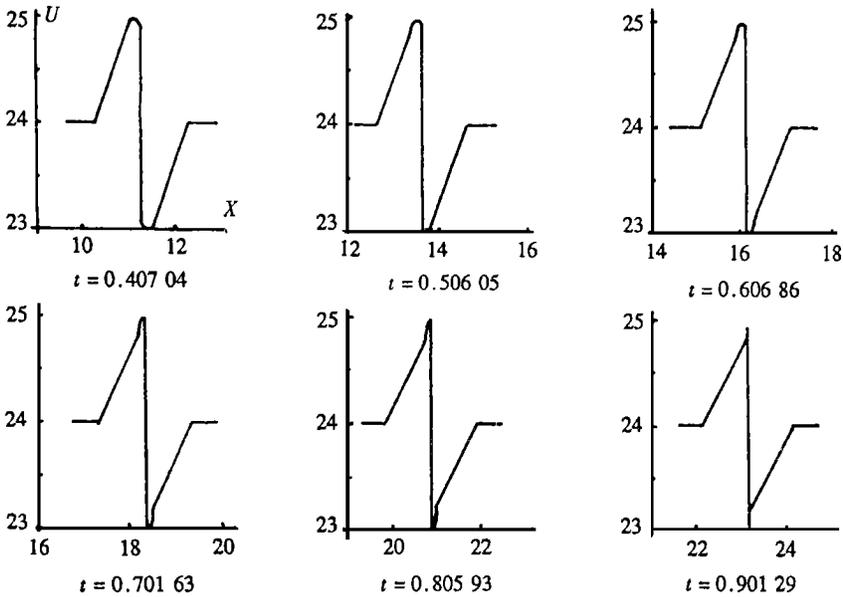


图5 采用自适应过程得到的结果

其中 ε 是一个小的正数。将初值问题(14) 沿着弧长 σ 离散化,得

$$\frac{du_i}{dt} = - \left[u_i + \frac{\Delta x_i}{\Delta t} \right] \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \left[(u_{i+1} - u_{i-1})/2\Delta\sigma \right]^2}}, \quad (16)$$

初始条件 $u(\sigma_i, 0) = \varphi(\sigma_i)$ 。

采用均匀网格, $u_i = u(\sigma_i, t)$, $\Delta\sigma = \sigma_{i+1} - \sigma_i$ 为网格步长, $\Delta x_i = x(\sigma_i, t + \Delta t) - x(\sigma_i, t)$, $\Delta x_i / \Delta t$ 可通过两次相邻时间步求得。将方程(16) 写成方程(5) 的形式, 然后应用四阶 Runge_Kutta 法求解。当时间 t 比较大时, 采用引入第二个弧长变量 σ 的方程求解, 在间断点附近解的近似性较好。见图4。

在上面偏微分方程中引入弧长变量 σ 是为了克服沿 x 方向的不连续, 但是同时也增加了计算量, 我们可以利用自适应过程来克服这一问题. 令参数

$$\beta = 1 - \Delta u^2 / (\Delta u^2 + \Delta x^2), \quad (17)$$

其中, $\Delta u = u(x_{i+1}, t) - u(x_i, t)$, Δx 为网格步长, 在求解方程(11)的过程中, 对于每个离散单元, 检验 β 值, 如果 $\beta \leq \beta_0$ (其中 β_0 为一个小的正数), 采用引入弧长变量 σ 的方程, 而其它的单元仍采用原有的方程. 采用自适应过程后, 计算效率和精度都大大提高. 图 5 给出了计算结果.

算例表明, 本文提出的方法可以求解具有极值和不连续间断的偏微分方程(组)和常微分方程组, 因此可应用于求解带有奇异性的连续介质力学问题. 本文只是引入弧长变量处理解的奇异性问题, 简单明了, 但与其它的方法比较, 解的精度较高.

[参 考 文 献]

- [1] Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems[J]. Int J Solid Structures, 1979, 15(4): 529~ 551.
- [2] 武际可, 周 . 高维 Hopf 分叉的数值计算[J]. 北京大学学报(自然科学版), 1993, 29(5): 574 ~ 582.
- [3] Hui W H. Generalized Lagrangian formulation of computational fluid dynamics[A]. In: M Hafez, K Oshima Eds. Computational Fluid Dynamics Review, [C]. Hong Kong: Wiley, 1995.
- [4] Hairer E, et al. Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential Algebraic Problems [M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1991.
- [5] Schulz Rinne C W. The Riemann problem for two dimensional gas dynamics and new limiters for high_order schemes[D]. Ph D dissertation. Swiss: the Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 1993.
- [6] 苏先樾. 旋转壳非线性分析[D]. 博士论文. 北京: 北京大学, 1985.

Arc Length Method for Differential Equations

Wu Jike¹, W H Hui², Ding Hongli¹

(1. Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, P R China;

2. Department of Mathematics, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, P R China)

Abstract: A kind arc_length method is presented to solve the ordinary differential equations(ODEs) with certain types of singularity as stiff property or discontinuity on continuum problem. By introducing one or two arc_length parameters as variables, the differential equations with singularity are transformed into non_singularity equations, which can be solved by usual methods. The method is also applicable for partial differential equations(PDEs), because they may be changed into systems of ODEs by discretization. Two examples are given to show the accuracy, efficiency and application.

Key words: differential equation; numerical method; arc_length method; stiff equation; Burgers' equation