文章编号: 1000_0887(1999) 07_0699_08

双曲偏泛函微分方程解的振动性*

王培光[1], 葛渭高[2]

(1. 河北大学 数学系, 河北保定 071002; 2. 北京理工大学 应用数学系, 北京 100081)

(协平推荐)

摘要: 讨论了一类双曲偏泛函微分方程解的振动性, 给出了在三类边界条件下解的振动准则·

关 键 词: 振动; 双曲方程; 偏差变元
中图分类号: O175.2　　文献标识码: A

1 问题引出

由于泛函偏微分方程在力学, 生物数学和控制论中的广泛应用, 泛函偏微分方程的振动理论取得了深入发展· 对于具有偏差变元的双曲方程振动理论研究可参见[1~4]及其参考文献· 然而我们注意到, 上述结果多是讨论离散时滞的情况, 相应的理论仍需进一步发展· 本文我们考虑如下具有连续偏差变元的双曲方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u+\lambda(t)u(x,\tau(t))] = a(t)\Delta u - c(x,t,u,u(x,\rho(t))) - \int_a^b q(x,t,\xi)u[x,g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi) + f(x,t), \tag{1}$$

和下列边界条件

$$u = \varphi(x,t) \quad ((x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+), \tag{2a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \psi(x,t) \quad ((x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+), \tag{2b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \nu(x,t)u = 0 \quad ((x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+), \tag{2c}$$

这里 $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $(x, t)\in\Omega\times\mathbf{R}_+ = G$, $\mathbf{R}_+ = [0,+\infty)$, $u = u(x,t)$· $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t)\in C(\partial\Omega\times\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, $\nu(x,t)\in C(\partial\Omega\times\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有分段光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域· n 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量·

假定下列条件 H) 成立

H_1) $a(t)$, $\lambda(t)\in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$; $q(x,t,\xi)\in C(\Omega\times\mathbf{R}_+\times[a,b], \mathbf{R}_+)$, $f(x,t)\in C(\Omega\times\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$;

* 收稿日期: 1998_06_22; 修订日期: 1999_02_05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871005); 河北省自然科学基金资助项目(197091)
作者简介: 王培光(1963~), 男, 副教授, 副系主任, 博士, 研究方向: 微分方程, 泛函微分方程, 已发表论文 30 余篇.

H₂) $\tau(t), \rho(t) \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$; $\lim\limits_{t\to+\infty}\tau(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\rho(t) = +\infty$;

H₃) $g(t,\xi) \in C(\mathbf{R}_+\times[a,b], \mathbf{R})$; $g(t,\xi) \leqslant t$, $\xi\in[a,b]$; $g(t,\xi)$ 关于 t 和 ξ 非减, 并且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\min\limits_{\xi\in[a,b]}\left\{g(t,\xi)\right\} = +\infty$;

H₄) $c(x,t,u,v) \in C(\Omega\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}, \mathbf{R})$; $c(x,t,u,v) \geqslant p(t)r(v)$, 其中 $p(t)\in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, $r(v) \in C([a,b], \mathbf{R})$; $r(v)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的正的凸函数, 并且

$$c(x,t,-u,-v) = -c(x,t,u,v)$$

H₅) $\sigma(\xi) \in ([a,b], \mathbf{R})$ 非减, 式(1) 的积分是 Stieltjes 积分

注: 因为方程(1) 的积分是 Stieltjes 积分, 容易知道, 方程(1) 包含了下列方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u+\lambda(t)u(x,\tau(t))] = a(t)\Delta u - c(x,t,u,u(x,\rho(t))) - \sum_{j=1}^{n} q_j(x,t)u[x,g_j(t)] + f(x,t)\cdot$$

文[2,3,4] 中所讨论的方程均是上述方程的特殊情况, 因而本文结果推广和改进了文[2,3,4] 的结果·

定义 方程(1) 的解 $u(x,t)$ 被称为是振动的· 如果对每一正数 μ, 存在 $(x_0, t_0) \in \Omega\times[\mu,+\infty)$ 使得 $u(x_0,t_0) = 0$ 成立·

2 问题(1), (2a) 的振动性

对于 Ω 内的 Dirichlet 问题

$$\Delta u + \alpha u = 0 \qquad ((x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}_+), \tag{3}$$

$$u = 0 \qquad ((x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+), \tag{4}$$

其中 α 是常数·

对于 $x\in\Omega$, 由[5] 可知, (3) 的最小特征值 α_1 是 E 的, 并且其相应的特征函数 $\Phi(x) \geqslant 0$·

引理 1 假设条件 H) 成立, 若 u 是(1), (2a) 在 $\Omega\times[\mu,+\infty)$, $\mu\geqslant 0$ 上的一个正解, 则满足下列微分不等式的函数 $U(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[U(t)+\lambda(t)U(\tau(t))] + \alpha_1 a(t)U(t) + p(t)r(U(\rho(t))) + \int_a^b Q(t,\xi)U[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi) \leqslant H(t), \tag{5}$$

有最终正解

$$U(t) = \frac{\int_\Omega u(x,t)\Phi(x)\mathrm{d}x}{\int_\Omega \Phi(x)\mathrm{d}x}\cdot \tag{6}$$

其中 $Q(t,\xi) = \min\limits_{x\in\Omega} q(x,t,\xi)$; $H(t) = \left[\int_\Omega\Phi(x)\,dx\right]^{-1}\left[-a(t)\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}w + \int_\Omega f\Phi\mathrm{d}x\right]\cdot$

证明 设 $u(x,t)$ 是问题(1), (2a) 在 $\Omega\times[\mu,+\infty)$ 上的一个正解, 由条件H₃), 存在 $t_1 > \mu$ 使得 $g(t,\xi) \geqslant \mu$, $(t,\xi)\in[t_1,+\infty)\times[a,b]$; $\tau(t)\geqslant\mu$, $\rho(t)\geqslant\mu$, $t\geqslant t_1$, 因而有 $u(x, g(t,\xi)) > 0$, $(x,t,\xi)\in\Omega\times[t_1,+\infty)\times[a,b]$, $u(x,\tau(t)) > 0$, $u(x,\rho(t)) > 0$, $(x,t)\in\Omega\times[t_1,+\infty)$·

方程(1) 两端乘 $\Phi(x)$, 并在 Ω 上关于 x 积分, 得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\int_\Omega u\Phi(x)\,\mathrm{d}x+\lambda(t)\int_\Omega u(x,\tau(t))\Phi(x)\,\mathrm{d}x\right]=a(t)\int_\Omega \Delta u\Phi(x)\,\mathrm{d}x-$$
$$\int_\Omega c(x,t,u,u(x,\rho(t)))\Phi(x)\,\mathrm{d}x-$$
$$\int_\Omega\int_a^b q(x,t,\xi)u[x,g(t,\xi)]\Phi(x)\,\mathrm{d}\sigma(\xi)\,\mathrm{d}x+$$
$$\int_\Omega f\Phi(x)\,\mathrm{d}x\quad(t\geqslant t_1),\tag{7}$$

利用 Green 公式, 得

$$\int_\Omega \Delta u\Phi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left(\Phi(x)\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\Phi(x)}{\partial n}\right)\mathrm{d}w+\int_\Omega u\Delta\Phi(x)\,\mathrm{d}x=$$
$$-\int_{\partial\Omega}\left(\varphi(x,t)\frac{\partial\Phi(x)}{\partial n}\right)\mathrm{d}w-\alpha_1\int_\Omega u\Delta\Phi(x)\,dx\quad(t\geqslant t_1),\tag{8}$$

其中 α_1 是最小特征值•

利用条件 H_4) 和 Jensen 不等式, 得

$$\int_\Omega c(x,t,u,u(x,\rho(t)))\Phi(x)\,\mathrm{d}x\geqslant$$
$$p(t)\int_\Omega r(u(x,\rho(t)))\Phi(x)\,\mathrm{d}x\geqslant$$
$$p(t)r\left(\frac{\int_\Omega u(x,\rho(t)))\Phi(x)\,\mathrm{d}x}{\int_\Omega\Phi(x)\,\mathrm{d}x}\right)\int_\Omega\Phi(x)\,\mathrm{d}x\quad(t\geqslant t_1)\text{•}\tag{9}$$

注意到

$$\int_\Omega\int_a^b q(x,t,\xi)u[x,g(t,\xi)]\Phi(x)\,\mathrm{d}\sigma(\xi)\,\mathrm{d}x=$$
$$\int_a^b\int_\Omega q(x,t,\xi)u[x,g(t,\xi)]\Phi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma(\xi),\tag{10}$$

因而由条件 H_2) 和(7) ~ (10), 得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\int_\Omega u\Phi(x)\,\mathrm{d}x+\lambda(t)\int_\Omega u(x,\tau(t))\Phi(x)\,\mathrm{d}x\right]+$$
$$\alpha_1a(t)\int_\Omega u\Phi(x)\,\mathrm{d}x+p(t)r(U(p(t)))\int_\Omega\Phi(x)\,\mathrm{d}x+$$
$$\int_a^b Q(t,\xi)\left(\int_\Omega u[x,g(t,\xi)]\Phi(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant$$
$$-a(t)\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}w+\int_\Omega f\Phi(x)\,\mathrm{d}x\quad(t\geqslant t_1)\text{•}$$

由上述不等式可知, $U(t)$ 是不等式(5) 的最终正解•

定理 1　设条件 H) 成立, 若满足下列微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[U(t)+\lambda(t)U(\tau(t))]+\alpha_1a(t)U(t)+p(t)r(U(\rho(t)))+$$
$$\int_a^b Q(t,\xi)U[g(t,\xi)]\,\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant H(t),\tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[U(t)+\lambda(t)U(\tau(t))]+\alpha_1a(t)U(t)+p(t)r(U(\rho(t)))+$$

$$\int_a^b Q(t,\xi)\, U[g(t,\xi)]\,\mathrm{d}\sigma(\xi) \leqslant H(t), \tag{12}$$

的函数没有最终正解,则(1),(2a)的每一解在 G 内振动•

证明 假设存在(1),(2a)的一非振动解 $u(x,t)$• 若 $u(x,t)>0,(x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty),\mu\geqslant 0$,则由引理1知,$U(t)$ 是不等式(11)的最终正解,与定理条件矛盾•

若 $u(x,t)<0,(x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty),\mu\geqslant 0$,令 $v(x,t)=-u(x,t)$,则 $v(x,t)$ 是下列问题

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u+\lambda(t)u(x,\tau(t))] = a(t)\Delta u - c(x,t,u,u(x,\rho(t))) -$$
$$\int_a^b q(x,t,\xi)\,u[x,g(t,\xi)]\,\mathrm{d}\sigma(\xi) + f(x,t),$$
$$u = -\varphi(x,t) \qquad ((x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+)•$$

的最终正解,并且满足

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\int_\Omega u\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x + \lambda(t)\int_\Omega u(x,\tau(t))\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x\right] +$$
$$\alpha_1 a(t)\int_\Omega u\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x + p(t)r(U(p(t)))\int_\Omega \Phi(x)\,\mathrm{d}x +$$
$$\int_a^b Q(t,\xi)\left(\int_\Omega u[x,g(t,\xi)]\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\sigma(\xi) \leqslant$$
$$-a(t)\int_{\partial\Omega}(-\varphi)\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}w + \int_\Omega f\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x \qquad (t\geqslant t_1),$$

因而

$$V(t) = \frac{\int_\Omega v(x,t)\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x}{\int_\Omega \Phi(x)\,\mathrm{d}x}, \tag{13}$$

是不等式(12)的最终正解,亦与定理的条件矛盾•

推论1 设条件H)成立,若满足下列微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[U(t)+\lambda(t)U(\tau(t))] + \alpha_1 a(t)U(t) + p(t)r(U(\rho(t))) +$$
$$\int_a^b Q(t,\xi)\,U[g(t,\xi)]\,\mathrm{d}\sigma(\xi) \leqslant \int_\Omega f\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x,$$

的函数没有最终正解,则下列问题

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u+\lambda(t)u(x,\tau(t))] = a(t)\Delta u - c(x,t,u,u(x,\rho(t))) -$$
$$\int_a^b q(x,t,\xi)\,u[x,g(t,\xi)]\,\mathrm{d}\sigma(\xi) + f(x,t),$$
$$u = 0 \qquad ((x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+)•$$

的每一解在 G 内振动•

定理2 设条件H)成立,若对充分大的 t_1

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_{t_1}^t\left(1-\frac{s}{t}\right)\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}w + \int_\Omega f(x,s)\,\Phi\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s = -\infty, \tag{14}$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_1}^t\left(1-\frac{s}{t}\right)\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}w + \int_\Omega f(x,s)\,\Phi\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s = +\infty, \tag{15}$$

则问题(1),(2a)的每一解在 G 内振动.

证明 假设存在一非振动解 $u(x,t)$. 若 $u(x,t)>0,(x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty),\mu\geqslant 0$, 则由引理1知,(6)定义的函数 $U(t)$ 是不等式(11)的最终正解,因此有

$$\frac{d^2}{dt^2}[U(t)+\lambda(t)U(\tau(t))]\leqslant a(t)\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial n}dw+\int_\Omega f\Phi dx\qquad(t\geqslant t_1).$$

在 $[t_1,t]$ 上对上式关于 t 积分,得

$$U(t)+\lambda(t)U(\tau(t))\leqslant c_1+c_2(t-t_1)+$$
$$\int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{\eta}\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial\Phi}{\partial n}dw+\int_\Omega f(x,s)\Phi dx\right]ds\,d\eta,$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

注意到 $$\int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{\eta}\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial\Phi}{\partial n}dw+\int_\Omega f(x,s)\Phi dx\right]ds\,d\eta=$$
$$\int_{t_1}^{t}(t-s)\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial\Phi}{\partial n}dw+\int_\Omega f(x,s)\Phi dx\right]ds,$$

对上不等式两端同除 t,得

$$\frac{1}{t}[U(t)+\lambda(t)U(\tau(t))]\leqslant\frac{c_1}{t}+c_2\left(1-\frac{t_1}{t}\right)+$$
$$\int_{t_1}^{t}\left(1-\frac{s}{t}\right)\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial\Phi}{\partial n}dw+\int_\Omega f(x,s)\Phi dx\right]ds. \tag{16}$$

由(14),得 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\frac{1}{t}[U(t)+\lambda(t)U(\tau(t))]=-\infty$, 与假设 $U(t)>0$ 矛盾.

若 $u(x,t)<0,(x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty),\mu\geqslant 0$, 令 $v(x,t)=-u(x,t)$, 则 $V(t)$ 是不等式(14)的最终正解. 由(15)得

$$\lim_{t\to+\infty}\inf\int_{t_1}^{t}\left(1-\frac{s}{t}\right)\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial\Phi}{\partial n}dw+\int_\Omega f(x,s)\Phi dx\right]ds=$$
$$-\lim_{t\to+\infty}\sup\int_{t_1}^{t}\left(1-\frac{s}{t}\right)\left[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial\Phi}{\partial n}dw+\right.$$
$$\left.\int_\Omega f(x,s)\Phi dx\right]ds=-\infty.$$

因而利用上面类似的方法亦可推出矛盾.

推论2 设条件H)成立,若对充分大的 t_1,

$$\lim_{t\to+\infty}\inf\int_{t_1}^{t}\left(1-\frac{s}{t}\right)\left[-a(s)\int_\Omega f(x,s)\Phi dx\right]ds=-\infty, \tag{17}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\int_{t_1}^{t}\left(1-\frac{s}{t}\right)\left[-a(s)\int_\Omega f(x,s)\Phi dx\right]ds=+\infty. \tag{18}$$

则下列问题

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u+\lambda(t)u(x,\tau(t))]=a(t)\Delta u-c(x,t,u,u(x,\rho(t)))-$$
$$\int_a^b q(x,t,\xi)u[x,g(t,\xi)]d\sigma(\xi)+f(x,t),$$
$$u=0\qquad((x,t)\in\partial\Omega\times R_+).$$

的每一解在 G 内振动.

3 问题(1),(2b);(1),(2c)的振动性

引理2 假设条件H)成立,若 u 是(1),(2b) 在 $\Omega\times[\mu,+\infty)$,$\mu\geqslant 0$ 上的一个正解,则满足下列微分不等式的函数 $V(t)$

$$\frac{d^2}{dt^2}[V(t)+\lambda(t)V(\tau(t))]+p(t)r(V(\rho(t)))+\int_a^b Q(t,\xi)V[g(t,\xi)]d\sigma(\xi)\leqslant G(t), \tag{19}$$

有最终正解

$$V(t)=\frac{\int_\Omega u(x,t)dx}{\int_\Omega dx}. \tag{20}$$

其中 $G(t)=\left[\int_\Omega dx\right]^{-1}\left[a(t)\int_{\partial\Omega}\psi dw+\int_\Omega f dx\right]$.

证明 设 $u(x,t)$ 是问题(1),(2b) 在 $\Omega\times[\mu,+\infty)$ 上的一个正解,类似于引理1,存在 $t_1\geqslant\mu$,使得

$$u(x,g(t,\xi))>0,\ (x,t,\xi)\in\Omega\times[t_1,+\infty)\times[a,b];$$
$$u(x,\tau(t))>0,\ u(x,\rho(t))>0,\ (x,t)\in\Omega\times[t_1,+\infty).$$

利用 Green 公式,得

$$\int_\Omega\Delta u dx=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}dw=\int_\Omega\psi d\omega\quad(t\geqslant t_1), \tag{21}$$

对方程(1)在 Ω 上关于 x 积分,并由(9),(10),得

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\int_\Omega u dx+\lambda(t)\int_\Omega u(x,\tau(t))dx\right]+p(t)r(V(\rho(t)))\int_\Omega u dx+\int_a^b Q(t,\xi)\left(\int_\Omega u[g(t,\xi)]dx\right)d\sigma(\xi)\leqslant a(t)\int_{\partial\Omega}\psi d\omega+\int_\Omega f dx.\quad(t\geqslant t_1)$$

因而 $V(t)$ 是不等式(19) 的最终正解.

定理3 设条件H)成立,若满足下列微分不等式

$$\frac{d^2}{dt^2}[V(t)+\lambda(t)V(\tau(t))]+p(t)r(V(\rho(t)))+\int_a^b Q(t,\xi)V[g(t,\xi)]d\sigma(\xi)\leqslant G(t), \tag{22}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}[V(t)+\lambda(t)V(\tau(t))]+p(t)r(V(\rho(t)))+\int_a^b Q(t,\xi)V[g(t,\xi)]d\sigma(\xi)\leqslant -G(t). \tag{23}$$

的函数没有最终正解,则(1),(2b) 的每一解在 G 内振动.

证明 假设存在(1),(2b)的一非振动解 $u(x,t)$. 若 $u(x,t)>0$,$(x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty)$,$\mu\geqslant 0$,则由引理2知,$V(t)$ 是不等式(22) 的最终正解,与定理条件矛盾.

若 $u(x,t)<0$,$(x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty)$,$\mu\geqslant 0$,令 $v(x,t)=-u(x,t)$,则 $v(x,t)$ 是下列问题

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u+\lambda(t)u(x,\tau(t))]=a(t)\Delta u-c(x,t,u,u(x,\rho(t)))-$$

$$\int_a^b q(x,t,\xi)u[x,g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)+f(x,t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=-\psi(x,t)\qquad((x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+)\cdot$$

的最终正解• 由引理 2 知,(20)定义的函数 $V(t)$ 是不等式(23) 的最终正解• 亦与定理条件矛盾•

类似于引理 2 和定理 2,可得下面一些引理和定理•

定理 4 设条件 H) 成立,若对充分大的 t_1,

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_{t_1}^t\left(1-\frac{s}{t}\right)\left[a(s)\int_{\partial\Omega}\psi(x,s)\mathrm{d}w+\int_\Omega f\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s=-\infty,\tag{24}$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_1}^t\left(1-\frac{s}{t}\right)\left[a(s)\int_{\partial\Omega}\psi(x,s)\mathrm{d}w+\int_\Omega f\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s=+\infty\cdot\tag{25}$$

则问题(1),(2b)的每一解在 G 内振动•

引理 3 假设条件 H) 成立,若 u 是(1),(2c) 在 $\Omega\times[\mu,+\infty)$, $\mu\geqslant0$ 上的一个正解,则满足下列微分不等式的函数 $V(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[V(t)+\lambda(t)V(\tau(t))]+p(t)r(V(\rho(t)))+$$
$$\int_a^b Q(t,\xi)V[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant0\tag{26}$$

有最终正解

$$V(t)=\frac{\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x}{\int_\Omega\mathrm{d}x}\cdot\tag{27}$$

定理 5 设条件 H) 成立,若满足下列微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[V(t)+\lambda(t)V(\tau(t))]+p(t)r(V(\rho(t)))+$$
$$\int_a^b Q(t,\xi)V[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant0,\tag{28}$$

的函数没有最终正解,则(1),(2c)的每一解在 G 内振动•

定理 6 设条件 H) 成立,若对充分大的 t_1,

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_{t_1}^t\left(1-\frac{s}{t}\right)\int_\Omega f(x,s)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=-\infty,\tag{29}$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_1}^t\left(1-\frac{s}{t}\right)\int_\Omega f(x,s)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=+\infty\cdot\tag{30}$$

则问题(1),(2c)的每一解在 G 内振动•

为验证上述结论,下面给出一个具体例子•

例 1 考虑方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u+u(x,t-\pi)]=\frac{1}{2}\Delta u-\frac{1}{2}u-4\int_{-\pi}^0 u(x,t+\xi)\mathrm{d}\xi+$$
$$\mathrm{e}^t\cos x\sin t+\mathrm{e}^{t-\pi}\cos x\cos t,\tag{31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(0,t)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{\pi}{2},t\right)=-\mathrm{e}^{-t}\sin t\cdot\tag{32}$$

容易验证条件 H) 成立, 并且

$$\int_{t_1}^{t}\left(1-\frac{s}{t}\right)\left[a(s)\int_{\partial\Omega}\psi(x,s)\,\mathrm{d}w+\int_{\Omega}f(x,s)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s=$$

$$\mathrm{e}^{t}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi}+\frac{1}{2}t\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi}+\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-\pi}\right)\cos t\right\}+\frac{c}{t}.$$

其中 c 是常数. 定理4 的条件满足, 因而由定理4 可知, 问题(31), (32) 在 $(0,\pi/2)\times[0,+\infty)$ 振动. 例如 $u(x,t)=\mathrm{e}^{t}\cos x\sin t$ 是(31), (32) 的一个解.

[参 考 文 献]

[1] 郑祖庥. 泛函微分方程理论[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996.

[2] Kreith K, Kusano T, Yoshida N. Oscillation properties of nonlinear hyperbolic equations[J]. SIAM J Math Anal, 1984, **15**(3): 570~578.

[3] Chen W D, Yu Y H. Oscillation criteria of solutions for a class of boundary value problem[J]. J Math Res Exp, 1995, **15**(1): 29~34.

[4] 王培光, 傅西林, 俞元洪. 一类时滞双曲方程的振动准则[J]. 数学研究与评论, 1998, **18**(1): 105~111.

[5] Vladimirov V S. Equations of Mathematical Physics[M]. Moscow: Nauka, 1981.

On the Oscillation of Solutions of Hyperbolic Partial Functional Differential Equations

Wang Peiguang[1], Ge Weigao[2]

(1. Department of Mathematics, Hebei University,
Baoding, Hebei 071002, P R China;
2. Department of Applied Mathematics, Beijing Institute
of Technology, Beijing 100081, P R China)

Abstract: In this paper, the oscillation of solutions of hyperbolic partial functional differential equations is studied, and oscillatory criteria of solutions with three kinds of boundary conditions are obtained.

Key words: oscillation; hyperbolic equation; distributed deviating arguments