应用数学和力学,第 20 卷 第 7 期(1999 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(1999) 07_0707_06

疲劳可靠性设计中的 $\gamma\_p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面理论与二维可靠性 Miner 公式*

熊峻江, 武哲, 高镇同

(北京航空航天大学 固体力学研究所, 北京 100083)

(王彪推荐)

摘要: 首先提出了 $\gamma\_p\_S_a\_S_m\_N$ (置信度_可靠度_应力幅值_应力均值_疲劳寿命) 曲面概念; 然后导出了 $p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面和 $\gamma\_p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面的极大似然估计式; 并给出了指定寿命下的疲劳强度概率分布和二维可靠性 Miner 公式, 最后, 给出了应用实例·

关 键 词: 疲劳可靠性; $p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面; $\gamma\_p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面; 二维可靠性 Miner 公式
中图分类号: O346.2 文献标识码: A

引 言

为了计算具有可靠度的疲劳裂纹形成寿命——安全裂纹形成寿命, 和进行耐久性设计的损伤度评估, 必须采用具有可靠度的二维概率 Miner 累积损伤理论[1, 2], 文献[3] 给出了二维概率 Miner 公式使用的 $p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面及其拟合法· 由于 $p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面是根据小子样或极小子样的数据信息统计推断而得, 这样势必导致估计、推断出的结果与母体真值发生偏差, 为保证安全, 必须考虑 $p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面的置信度, 使估算出的疲劳寿命安全和可靠[1, 4, 5]· 为此, 本文在进一步研究 $p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面和疲劳强度概率分布的基础上, 研究了具有可靠度与置信度的 $S_a\_S_m\_N$ 曲面, 即 $\gamma\_p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面, 并给出了通过 $\gamma\_p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面, 估算具有可靠度与置信度的疲劳寿命的二维可靠性 Miner 公式·

1 $p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面

$S_a\_S_m\_N$ 曲面公式[3] 为

$$N = C\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_b - S_m}S_a - S_0\right)^m,$$

式中 C, m, S_0 为材料常数, σ_b 为材料拉伸强度极限· 对上式两边取对数, 得 $Y = bX + a$, 式中 $Y = \lg N(S_a, S_m)$, $X = \lg\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_b - S_m}S_a - S_0\right)$, $b = m$, $a = \lg C$· 由于疲劳寿命存在分散性, 常采

* 收稿日期: 1997_04_25; 修订日期: 1999_03_08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672051)
作者简介: 熊峻江(1966~), 男, 博士, 副教授, 研究方向: 复合材料损伤力学, 已发表论文 40 余篇, 专著 1 部, 获 1 项部级科技进步二等奖, 2 项部级科技进步三等奖.

用数学模型 $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i(S_a, S_m)$ 回归观测数据(x_i, y_i), $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\varepsilon_i(S_a, S_m) \sim N[0, \sigma_i^2(S_a, S_m)]$, 且 $\mathrm{cov}[\varepsilon_i(S_a, S_m), \varepsilon_j(S_a, S_m)] = 0, i \neq j$, 即 $\varepsilon_i(S_a, S_m)$ 和 $\varepsilon_j(S_a, S_m)$ 相互独立. 因而, $Y_i \sim N[a + bX, \sigma_i^2(S_a, S_m)]$. 研究发现: 试样疲劳寿命分散性与应力水平有一定的关系, 通常假定标准差 $\sigma_i(S_a, S_m)$ 与对数应力水平 $\lg\left(\dfrac{\sigma_b}{\sigma_b - S_m}S_a - S_0\right)$ 成线性关系[1,6~8], 即 $\sigma_i(S_a, S_m) = e + d \cdot \lg\left(\dfrac{\sigma_b}{\sigma_b - S_m}S_a - S_0\right)$, 于是, Y_i 概率密度函数为

$$f(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i(S_a, S_m)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_i^2(S_a, S_m)}(y_i - a - bx_i)^2\right].$$

对数似然函数:

$$\ln L(b_1, b_2, \sigma_0, \tau_0, d) = -\frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi) - \sum_{i=1}^{n} \ln\sigma_i(S_a, S_m) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - a - bx_i)^2}{2\sigma_i^2(S_a, S_m)}.$$

根据极大似然原理得到

$$a = Y - bX, \quad b = L_{xy}/L_{xx}, \quad R = L_{xy}/\sqrt{L_{xx}L_{yy}}, \tag{1}$$

式中 $$m_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2(S_a, S_m)}, \quad X = \frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2(S_a, S_m)}, \quad Y = \frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\sigma_i^2(S_a, S_m)},$$

$$L_{xx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2(S_a, S_m)} - \frac{1}{m_1}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2(S_a, S_m)}\right)^2,$$

$$L_{yy} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{\sigma_i^2(S_a, S_m)} - \frac{1}{m_1}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\sigma_i^2(S_a, S_m)}\right)^2,$$

$$L_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2(S_a, S_m)} - \frac{1}{m_1}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2(S_a, S_m)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\sigma_i^2(S_a, S_m)}\right).$$

从式(1)可以看出, a, b 为S_0 的函数, 通过线性相关系数优化计算可确定出 S_0. 根据前面所述由 $Y_i \sim N[a + bX, \sigma_i^2(S_a, S_m)]$ 可知, $y_p = y + u_p\sigma(S_a, S_m)$, 经变换得到

$$N = 10^{(u_p e)} \cdot C\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_b - S_m}S_a - S_0\right)^m \cdot \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_b - S_m}S_a\right)^{(u_p d)} \tag{2}$$

上式即为 $p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面估计式.

对于给定疲劳寿命 N, 由式(2) 可得

$$u_p = \frac{\lg N - \lg C - m \cdot \lg[\sigma_b S_a/(\sigma_b - S_m) - S_0]}{e + d \cdot \lg[\sigma_b S_a/(\sigma_b - S_m) - S_0]}$$

此时疲劳强度分布函数为

$$P(S_a, S_m \mid N) = \int_{u_p}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{x}{2}\right] \mathrm{d}x$$

那么疲劳强度密度函数为

$$g(S_a, S_m \mid N) = \frac{1}{\sigma^5(S_a, S_m)} \cdot \exp\left\{-\frac{[\lg N - \mu(S_a, S_m)]^2}{2\sigma^2(S_a, S_m)}\right\} \cdot \Big\{\sigma(S_a, S_m)[\mu_a'\sigma_m' + \mu_m'\sigma_a'] \cdot$$
$$\left\{\sigma^2(S_a, S_m) - [\lg N - \mu(S_a, S_m)]^2\right\} + [\lg N - \mu(S_a, S_m)]\sigma_a'\sigma_m' \cdot$$
$$\left\{2\sigma^2(S_a, S_m)[\lg N - \mu(S_a, S_m)]^2\right\} - \sigma^6(S_a, S_m)\mu_a'\mu_m'\mu_{am}''[\lg N - \mu(S_a, S_m)]\Big\},$$

式中 $$\mu_a' = \frac{\partial\mu(S_a, S_m)}{\partial S_a} = \left(\frac{mC\sigma_b S_a}{\sigma_b - S_m}\right)\left(\frac{\sigma_b S_a}{\sigma_b - S_m} - S_0\right)^{(m-1)},$$

$$\sigma_a' = \frac{\partial\sigma(S_a, S_m)}{\partial S_a} = e + d[S_a \cdot \ln 10]^{-1},$$

$$\mu'_m = \frac{\partial \mu(S_a, S_m)}{\partial S_m} = \frac{mC\sigma_b S_a}{(\sigma_b - S_m)^2}\left(\frac{\sigma_b S_a}{\sigma_b - S_m} - S_0\right)^{(m-1)},$$

$$\sigma'_m = \frac{\partial \sigma(S_a, S_m)}{\partial S_m} = e + d[(\sigma_b - S_m) \cdot \ln 10]^{-1}, \quad \sigma''_{am} = 0,$$

$$\mu''_{am} = \frac{\partial^2 \mu(S_a, S_m)}{\partial S_a \partial S_m} = \frac{m(m-1)C\sigma_b^2 S_a}{(\sigma_b - S_m)^3}\left(\frac{\sigma_b S_a}{\sigma_b - S_m} - S_0\right)^{(m-2)} + \frac{mC\sigma_b}{(\sigma_b - S_m)^2}\left(\frac{\sigma_b S_a}{\sigma_b - S_m} - S_0\right)^{(m-1)}.$$

2 γ-p-S_a-S_m-N 曲面

令随机变量 $Y(S_a, S_m) = \lg N(S_a, S_m)$, $N(S_a, S_m)$ 为指定应力水平 (S_a, S_m) 下疲劳寿命, 那么 $Y(S_a, S_m) \sim N[\mu(S_a, S_m), \sigma^2(S_a, S_m)]$, 于是, 对于正态母体 $N[\mu(S_a, S_m), \sigma^2(S_a, S_m)]$ 的一组观测值 $y_1(S_a, S_m), y_2(S_a, S_m), \cdots, y_n(S_a, S_m)$, 其均值 $y(S_a, S_m)$ 和标准差 $s(S_a, S_m)$ 分别为

$$y(S_a, S_m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i(S_a, S_m), \quad s(S_a, S_m) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}[y_i(S_a, S_m) - y(S_a, S_m)]^2}{n-1}},$$

母体 p 分位值的估计值为 $\hat{y}_p(S_a, S_m) = y(S_a, S_m) + u_p\sigma(S_a, S_m)$, 其中 $\sigma(S_a, S_m) = \beta s(S_a, S_m)$, β 为标准差 $s(S_a, S_m)$ 的无偏修正系数[1]. 由于均值 $Y(S_a, S_m)$ 和标准差 $s(S_a, S_m)$ 均为随机变量, 则 $\xi(S_a, S_m) = Y(S_a, S_m) + u_p\beta s(S_a, S_m)$ 为随机变量, 且近似遵循正态分布 $N[E(\xi), D(\xi)]$. 根据统计理论可知.

$$E[Y(S_a, S_m)] = \mu(S_a, S_m), \quad E[\beta s(S_a, S_m)] = \sigma(S_a, S_m),$$

$$D[Y(S_a, S_m)] = \sigma^2(S_a, S_m)/n, \quad D[s(S_a, S_m)] = \sigma^2(S_a, S_m)(1 - 1/\beta^2),$$

于是, 可推得

$$E[\xi(S_a, S_m)] = \mu(S_a, S_m) + u_p\sigma(S_a, S_m),$$

$$D[\xi(S_a, S_m)] = D[Y(S_a, S_m)] + u_p^2\beta^2 D[s(S_a, S_m)] = \frac{\sigma^2(S_a, S_m)}{n} + u_p^2(\beta^2 - 1)(\sigma^2(S_a, S_m).$$

由上面二式可得标准正态变量

$$U = \frac{\xi(S_a, S_m) - E[\xi(S_a, S_m)]}{\sqrt{D[\xi(S_a, S_m)]}} = \frac{[y(S_a, S_m) + u_p\beta s(S_a, S_m)] - [\mu(S_a, S_m) + u_p\sigma(S_a, S_m)]}{\sigma(S_a, S_m)\sqrt{1/n + u_p^2(\beta^2 - 1)}}.$$

根据统计知识又知 $\chi^2/\upsilon = s^2(S_a, S_m)/\sigma^2(S_a, S_m)$, 且 U 与 χ^2 基本互相独立, 那么, 由上公式可得 t 统计量为

$$t = \frac{U}{\sqrt{\chi^2/\upsilon}} = \frac{[y(S_a, S_m) + u_p\beta s(S_a, S_m)] - [\mu(S_a, S_m) + u_p\sigma(S_a, S_m)]}{s(S_a, S_m)\sqrt{1/n + u_p^2(\beta^2 - 1)}}, \quad (3)$$

设 t_γ 为 t 分布的 γ 分位值, 即 $P\{t < t_\gamma\} = \gamma$, 将式(3) 代入该式, 可推出

$$P\{[y(S_a, S_m) + u_p\beta s(S_a, S_m)] - t_\gamma s(S_a, S_m)\sqrt{1/n + u_p^2(\beta^2 - 1)} < [\mu(S_a, S_m) + u_p\sigma(S_a, S_m)]\} = \gamma,$$

在给定置信度 γ 和疲劳强度(S_a, S_m) 下, 可靠度 p 对应的对数疲劳寿命单侧置信下限为

$$L_{p\gamma}(S_a, S_m) = [y(S_a, S_m) + u_p\beta s(S_a, S_m)] - t_\gamma s(S_a, S_m)\sqrt{1/n + u_p^2(\beta^2 - 1)}$$

也可写成

$$L_{p\gamma}(S_a, S_m) = [y(S_a, S_m) + u_p\sigma(S_a, S_m)] - t_\gamma\sigma(S_a, S_m)\sqrt{1/(n\beta^2) + u_p^2(1 - 1/\beta^2)}$$

再对上式进行变换, 可得

$$N_{p\gamma} = C \cdot 10^{e[u_p - t_\gamma\sqrt{1/n\beta^2 + u_p^2(1 - 1/\beta^2)}]} \cdot \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_b - S_m}S_a - S_0\right)^m \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_b - S_m}S_a\right)^{[d - t_\gamma\sqrt{1/n\beta^2 + u_p^2(1 - 1/\beta^2)}]} \tag{4}$$

此式即为 $\gamma\_p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面估计式. 此时, 具有可靠度与置信度二维 Miner 公式的表达式为

$$T \cdot \sum_{i=1}^{n}\frac{n_i(S_a, S_m)}{N_{\gamma pi}(S_a, S_m)} = 1,$$

或 $$T \cdot \int_{(S_m)_{\min}}^{(S_m)_{\max}}\int_0^{(S_a)_{\max}}\frac{n_T \cdot f(S_a, S_m)}{N_{\gamma p}(S_a, S_m)}\mathrm{d}S_a\,\mathrm{d}S_m = 1.$$

将式(4)代入上二式可分别得到

$$T \cdot \sum_{i=1}^{n}\left\{n(S_{ai}, S_{mi}) \Big\backslash \left[C \cdot 10^{e[u_p - t_\gamma\sqrt{1/n\beta^2 + u_p^2(1 - 1/\beta^2)}]} \cdot \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_b - S_{mi}}S_{ai} - S_0\right)^m \cdot \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_b - S_{mi}}S_{ai}\right)^{[d - t_\gamma\sqrt{1/n\beta^2 + u_p^2(1 - 1/\beta^2)}]}\right]\right\} = 1,$$

$$T \cdot \int_{(S_m)_{\min}}^{(S_m)_{\max}}\int_0^{(S_a)_{\max}}\left\{n_T \cdot f(S_a, S_m) \Big\backslash \left[C \cdot 10^{e[u_p - t_\gamma\sqrt{1/n\beta^2 + u_p^2(1 - 1/\beta^2)}]} \cdot \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_b - S_m}S_a - S_0\right)^m \cdot \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_b - S_m}S_a\right)^{[d - t_\gamma\sqrt{1/n\beta^2 + u_p^2(1 - 1/\beta^2)}]}\right]\right\}\mathrm{d}S_a\,\mathrm{d}S_m = 1,$$

式中 $n_i(S_a, S_m)$ 代表第 i 级应力水平(S_a, S_m) 即(S_{ai}, S_{mi}) 的循环数; $N_{\gamma pi}(S_a, S_m)$ 表示第 i 级应力水平(S_a, S_m) 单独作用下置信度 γ、可靠度 p 对应的破坏循环数; $f(S_a, S_m)$ 为二元随机变量(S_a, S_m) 的概率密度函数; $N_{\gamma p}(S_a, S_m)$ 为应力水平(S_a, S_m) 单独作用下置信度 γ、可靠度 p 对应的破坏循环数. 这里本文将估算具有可靠度与置信度疲劳寿命的二维 Miner 公式称为二维可靠性 Miner 公式.

3 实　　例

今已知 LY12CZ 材料在应力集中系数 $K_t = 2.5$ 下的疲劳试验数据如表 1 所示.

采用本文方法估计出 $\sigma(S_a, S_m)$ 为

$$\sigma(S_a, S_m) = 0.664\,32 - 0.278\,88 \times \lg\left(\frac{640 \times S_a}{640 - S_m}\right)$$

$99\%\_S_a\_S_m\_N$ 曲面估计式为

$$N = 11\,749.62 \times \left(\frac{640 \times S_a}{640 - S_m} - 25.39\right)^{-1.73} \times \left(\frac{640 \times S_a}{640 - S_m}\right)^{0.648\,7}$$

$95\%\_99\%\_S_a\_S_m\_N$ 曲面估计式为

$$N = 1\,371.58 \times \left(\frac{640 \times S_a}{640 - S_m} - 25.39 \right)^{-1.73} \times \left(\frac{640 \times S_a}{640 - S_m} \right)^{1.040\,3}$$

表 1 疲劳试验结果

应力水平(S_a, S_m), 单位: MPa									
(151, 49)	(101, 49)	(71, 49)	(120, 90)	(121, 49)	(81, 49)	(66, 49)	(80, 90)	(60, 90)	(50, 90)
各自应力水平对应的疲劳寿命 N, 单位: 次循环									
40 000	137 000	265 000	28 000	80 000	156 000	535 000	136 000	221 000	804 000
41 000	142 000	294 000	37 000	99 000	188 000	729 000	137 000	313 000	828 000
42 000	143 000	345 000	37 000	111 000	190 000	769 000	137 000	391 000	972 000
42 000	161 000	356 000	45 000	122 000	221 000	774 000	142 000	394 000	1 015 000
55 000	163 000	360 000	53 000	128 000	228 000	847 000	149 000	421 000	1 159 000
61 000	164 000	387 000	53 000	130 000	232 000	883 000	159 000	440 000	1 343 000
62 000	171 000	397 000	62 000	131 000	237 000	1 443 000	160 000	500 000	1 489 000
67 000	173 000	401 000	69 000	131 000	288 000	1 444 000	163 000	559 000	3 160 000
67 000	176 000	715 000	69 000	134 000	312 000	1 541 000	181 000	750 000	3 258 000
73 000	191 000	1 320 000	72 000	163 000	428 000	3 802 000	181 000	829 000	8 863 000
(115, 105)	(100, 90)	(90, 105)	(55, 105)	(75, 115)	(55, 115)	(45, 115)	(125, 115)	(95, 115)	
55 000	75 000	66 000	317 000	107 000	339 000	786 000	31 000	58 000	
55 000	75 000	75 000	382 000	128 000	397 000	973 000	31 000	62 000	
62 000	80 000	99 000	379 000	150 000	403 000	1 060 000	33 000	67 000	
66 000	84 000	102 000	389 000	175 000	541 000	1 063 000	35 000	84 000	
66 000	84 000	103 000	392 000	175 000	542 000	1 107 000	35 000	91 000	
71 000	90 000	108 000	412 000	177 000	549 000	1 154 000	36 000	92 000	
72 000	98 000	109 000	450 000	189 000	567 000	1 231 000	38 000	98 000	
74 000	98 000	134 000	501 000	195 000	609 000	1 417 000	42 000	103 000	
79 000	116 000	135 000	565 000	198 000	619 000	1 460 000	43 000	104 000	
79 000	129 000	162 000	582 000	206 000	939 000	3 615 000	48 000	132 000	

4 结　　论

本文研究结果如下:

1) 提出了 γ-p-S_a-S_m-N 曲面概念•

2) 导出了 p-S_a-S_m-N 曲面估计式与疲劳强度概率分布•

3) 推导了 γ-p-S_a-S_m-N 曲面估计式和二维可靠性 Miner 公式•

4) 从文中实例可以看出, 本文方法简便可行, 便于工程应用•

[参 考 文 献]

[1] 高镇同. 疲劳应用统计学[M] . 北京: 国防工业出版社, 1986.

[2] 高镇同, 熊峻江. 疲劳/断裂可靠性研究现状与展望[J]. 机械强度, 1995, **17**(3): 61~ 82.

[3] 熊峻江, 高镇同. 用于疲劳可靠性设计的 $p\_S_a\_S_m\_N$ 曲面拟合法[J]. 实验力学, 1995, **10**(1): 63~ 67.

[4] 熊峻江, 高镇同. 极大似然法测定 p_S_N 曲线的置信度[J]. 北京航空航天大学学报, 1995, **17**(6): 687 ~ 691.

[5] Gao Z T. The confidence level and determination of the minimum of specimens in fatigne testing[A]. Conference Proceedings of Fatigue 84[C]. London: The Chameleon Press, 1984.

[6] 熊峻江, 黄新宇, 高镇同, 等. 极大似然法对比试验研及其试验数据处理[J]. 航空学报, 1996: **17**(5): 539~ 542.

[7] 内野和雄, 中村义隆. 疲劳ツ — N 整理法[J]. 石川岛播磨技报, 1974, **14**(77): 39~ 44.

[8] Weibull W. Fatigue Testing and Analysis of Results[M]. New York: Macmillan Company, 1961.

$\gamma\_p\_S_a\_S_m\_N$ Surface Theory and Two_Dimensional Reliability Miner Rule for Fatigue Reliability_Based Design

Xiong Junjiang, Wu Zhe, Gao Zhentong

(Research Center of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, P R China)

Abstract: First of all, the concept of $\gamma\_p\_S_a\_S_m\_N$ (confidence level_reliadility_stress amplitude_stress mean) surface is presented. Then the formulas of $p\_S_a\_S_m\_N$ surface and $\gamma\_p\_S_a\_S_m\_N$ surface are derived. In addition, fatigue strength distribution function and two_dimensional reliability Miner rule are obtained. At last, a example is given.

Key words: fatigue reliability; $p\_S_a\_S_m\_N$ surface; $\gamma\_p\_S_a\_S_m\_N$ surface; two_dimensional reliability Miner rule