文章编号: 1000_0887(1999) 07_0713_08

关于非局部场论的几个新观点及其在断裂力学中的应用(II) ——重论非线性非局部热弹性本构方程*

黄 再兴

(南京航空航天大学飞行器系, 南京 210016)

(樊蔚勋推 荐)

摘要: 按照理性力学的本构公理系统严格推导了非线性非局部热弹性体的本构方程, 修正、补充和完善了以前的工作, 所得的结果表明, 非局部热弹性体的本构响应是与其物质空间的曲率及其高阶梯度相关联的, 且存在满足零平均条件的反对称应力; 文中给出了反对称应力与局部化残余的表达式, 导出了热传递方向与温度降方向一致的结论, 简要论述了局部化残余以及非局部能量守恒定律的客观性•

关 键 词: 非局部场论; 非局部热弹性体; 本构方程; 反对称应力; 局部化残余
中图分类号: O346.1; O343　　文献标识码: A

引 言

非局部场论是经典场论的推广• 由于它在宏观表述中引入了微观结构的长程相互作用, 可作为宏微观关联力学的理论基础, 因此, 引起了力学与工程科学界的广泛重视•

在非局部理论的框架内, 关于非线性热弹性体的本构方程的研究, 国内外已做过不少工作[1,2,3,4]• 这些工作按照所选择的独立本构变量大致可分为三种情况: 一是直接把物体的运动史、应变史和温度史同时选作独立的本构变量[1], 这样处理在数学上有不少方便之处, 但其出发点在逻辑上却是不严密的• 因为, 应变史可以作为运动史的一阶梯度而得到, 它们之间并不相互独立• 另一种情况是严格按照理性力学的因果性公理把运动史和温度史选作独立的本构变量, 但在推导过程中为了简化而在本构泛函中忽略了任意两物质点间有向距离与另外任意两物质点间有向距离间的夹角的影响[2], 从而将许多反映非局部性的本质特征丢失了• 最后一种情况则赋予了独立本构变量及其相关本构泛函的一些特殊的表达形式以保证分析的简洁与严密[3], 这就意味着只有当这些独立本构变量的函数表达形式预先规定后才能确定内能, 这是一个过强的数学假设• 本文在文[4]的基础上, 抛弃了前述工作中的一些特殊的假设与简化, 严格按照理性力学的本构公理系统重新推导了非线性非局部热弹性体的本构方程, 对以前

* 收稿日期: 1998_05_05; 修订日期: 1999_04_20
基金项目: 江苏省自然科学基金资助项目(BK97063)
作者简介: 黄再兴(1966~), 男, 博士, 副教授, 研究方向: 固体力学, 结构强度, 已发表论文 20 余篇.

的工作进行了修正、补充和完善,得到了一些新结果• 这些结果表明,非局部热弹性体的本构响应是与其物质空间的曲率及其高阶梯度相关联的,且存在满足零平均条件的反对称应力;文中给出了反对称应力与局部化残余的表达式,导出了热传递方向与温度降方向一致的结论,简要论述了局部化残余以及非局部能量守恒定律的客观性,并得到了局部化能量残余的变换公式•

1 非局部场的平衡方程与熵不等式

非局部场守恒定律的平衡微分方程[3]用抽象张量的记法可写为:

质量平衡方程 $\dot\rho + (\rho\boldsymbol{v})\cdot\nabla = \hat\rho$, (1)

动量平衡方程 $(\boldsymbol{t}^s + \boldsymbol{t}^a)\cdot\nabla + \rho(\boldsymbol{f} - \dot{\boldsymbol{v}}) = \hat\rho\boldsymbol{v} + \rho\hat{\boldsymbol{F}}$, (2)

动量矩平衡方程 $\varepsilon\boldsymbol{t}^a + \rho\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{F}} = \rho\hat{\boldsymbol{M}}$, (3)

能量平衡方程
$$\rho\dot E + \hat\rho\left(E - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) - \boldsymbol{t}^s:\boldsymbol{d} - \boldsymbol{t}^s:\omega - \rho\hat{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{q}\cdot\nabla - \rho h = \rho\hat E, \tag{4}$$

熵不等式
$$\rho\dot S - \frac{\rho h}{\theta} + \frac{1}{\theta}\left(\boldsymbol{q}\cdot\nabla - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\theta\nabla}{\theta}\right) - \rho\hat S \geqslant 0, \tag{5}$$

上述方程中,ρ, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{f}$, E, $\boldsymbol{q}$, h, S 和 θ 分别表示质量密度、速度、体积力、内能密度、热流矢量、热源密度、熵和温度,$\boldsymbol{t}^s$ 和 $\boldsymbol{t}^s$ 分别是对称应力和反对称应力张量,$\boldsymbol{d}$ 是变形率张量,ω 是旋率张量,而 $\hat\rho$, $\hat{\boldsymbol{F}}$, $\hat{\boldsymbol{M}}$, $\hat E$, $\hat S$ 则被分别称为局部化质量、体力、力矩、能量、熵的残余,或统一简称为局部化残余• 局部化残余满足以下零平均条件,即
$$\int_\Omega(\hat\rho, \rho\hat{\boldsymbol{F}}, \rho\hat{\boldsymbol{M}}, \rho\hat E, \rho\hat S)\,\mathrm{d}v(X) = 0, \tag{6}$$
Ω 是物体在空间所占的体积,其边界面用 $\partial\Omega$ 表示• 在物理上,局部化残余反映了物质微观结构的长程效应[3] •

非局部场论仍然属于 Newton 力学的范畴,因此,方程(2)相对于 Galilean 变换应当是不变的,这意味着 $\hat\rho = 0$• 本文进一步假设熵不等式的整体陈述与局部陈述全同,即 $\hat S = 0$,在这两个前提下,则非局部场的平衡方程可简化为:
$$\dot\rho + (\rho\boldsymbol{v})\cdot\nabla = 0, \tag{7}$$
$$(\boldsymbol{t}^s + \boldsymbol{t}^a)\cdot\nabla + \rho(\boldsymbol{f} - \dot{\boldsymbol{v}}) = \rho\hat{\boldsymbol{F}}, \tag{8}$$
$$\varepsilon\boldsymbol{t}^a + \rho\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{F}} = \rho\hat{\boldsymbol{M}}, \tag{9}$$
$$\rho\dot E - \boldsymbol{t}^s:\boldsymbol{d} - \boldsymbol{t}^a:\omega - \rho\hat{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{q}\cdot\nabla - \rho h = \rho\hat E, \tag{10}$$
$$\rho\dot S - \frac{\rho h}{\theta} + \frac{1}{\theta}\left(\boldsymbol{q}\cdot\nabla - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\theta\nabla}{\theta}\right) \geqslant 0• \tag{11}$$

作为经典场论的推广,非局部场的能量平衡方程与经典场的一样,仍要具有客观性[5]• 最一般地,这意味着方程(10)中的 $\rho\hat E + \boldsymbol{t}^a:\omega + \rho\hat{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{V}$ 项应该是一个客观标量• 根据客观性的定义,在标架的刚性变换下,则有:
$$\rho\hat E + \boldsymbol{t}^a:\omega + \rho\hat{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{v} = \rho\hat E + \boldsymbol{t}^a:\omega + \rho\hat{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{v} =$$
$$\rho\hat E + (\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{t}^a\cdot\boldsymbol{Q}^T):(\boldsymbol{Q}\cdot\omega\cdot\boldsymbol{Q}^T + \dot{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{Q}^T) + \rho\boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{F}}\cdot(\dot{\overline{\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r}}}) =$$
$$\rho\hat E + \boldsymbol{t}^a:\omega + \rho\hat{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{t}^a:(\boldsymbol{Q}^T\cdot\dot{\boldsymbol{Q}}) + \rho\hat{\boldsymbol{F}}\cdot(\boldsymbol{Q}^T\cdot\dot{\boldsymbol{Q}})\cdot\boldsymbol{r} =$$

$$\rho\overleftarrow{E} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{a}} : \omega + \rho\overleftarrow{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{a}} : (\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}) + \rho(\overleftarrow{\boldsymbol{F}} \otimes \boldsymbol{r}) : (\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}),$$

由此可得到:

$$\rho\overleftarrow{E} = \rho\overleftarrow{E} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{a}} : (\dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) + \rho(\overleftarrow{\boldsymbol{F}} \otimes \boldsymbol{r}) : (\dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}), \tag{12}$$

式中 $\otimes$ 表示张量积, $\boldsymbol{Q}$ 是正交变换张量, $\boldsymbol{r}$ 代表物质点的位置矢量且 $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$, 变换式(12) 表明 $\rho\overleftarrow{E}$ 是一个非客观量•

引入自由能 $U = E - \theta S$, 则(10) 式可表示成:

$$\rho(\dot{U} + \dot{\theta}S) - \boldsymbol{t}^{\mathrm{s}} : \boldsymbol{d} - \boldsymbol{t}^{\mathrm{a}} : \omega - \rho\overleftarrow{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{q} \cdot \nabla + \rho\theta\dot{S} - \rho h = \rho\overleftarrow{E} \tag{13}$$

从(10)、(11) 式中消去 h 可得:

$$-\rho(\dot{U} + \dot{\theta}S) - \frac{\boldsymbol{q} \cdot \theta\nabla}{\theta} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{s}} : \boldsymbol{d} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{a}} : \omega + \rho\overleftarrow{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{V} + \rho\overleftarrow{E} \geqslant 0, \tag{14}$$

这就是 Clausius_Duhem 不等式, 简称 C_D 不等式•

2 非线性非局部热弹性本构方程的推导

本节按照理性力学的本构公理系统[5, 6]中来推导非线性非局部热弹性本构方程• 首先, 根据因果性公理, 取物体 Ω 中所有物质点 X' 的运动史和温度史

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'(X', t'), \quad \theta' = \theta'(X', t'), \tag{15}$$

作为独立的本构变量• 由决定性公理和等存在公理知, 则 C_D 不等式中其余的相关本构变量都可表示成 $\boldsymbol{x}'$, θ' 的同一形式的泛函, 以自由能为例可写成:

$$U(X, t) = U_0[\boldsymbol{x}'(X', t'), \theta'(X', t'), X, t], \tag{16}$$

由此可看出, 在非局部理论的框架中, 物体中某一点的本构响应不仅与该点的运动史和温度史有关, 而且与物体中所有点的运动史和温度史相关联• 根据客观性公理, 本构泛函在标架的刚性变换下是不变的, 即

$$U_0[\boldsymbol{x}'(X', t'), \theta'(X', t'), X, t] = U_0[\boldsymbol{x}'(X', t'), \theta'(X', t'), X, t], \tag{17}$$

式中 $$\boldsymbol{x}'(X', t') = \boldsymbol{Q}(t') \cdot \boldsymbol{x}'(X', t') + \boldsymbol{b}(t'), t' = t' - a• \tag{18}$$

由此逐步可以推出:

$$U(X, t) = U_0[\boldsymbol{x}'(X', t - \tau) - \boldsymbol{x}'(X, t - \tau), \theta'(X', t - \tau), X], \tag{19}$$

式中 $0 \leqslant \tau \leqslant \infty$, 且(19) 式满足:

$$\begin{aligned} U(X, t) = {} & U_0[\boldsymbol{x}'(X', t - \tau) - \boldsymbol{x}'(X, t - \tau), \theta'(X', t - \tau), X] = \\ & U_0\left\{\boldsymbol{Q}(t - \tau) \cdot [\boldsymbol{x}'(X', t - \tau) - \boldsymbol{x}'(X, t - \tau)], \theta'(X', t - \tau), X\right\}• \end{aligned} \tag{20}$$

由于只考虑物体的弹性响应, 故本构泛函是无记忆的, 于是(19)、(20) 两式简化为:

$$U(X, t) = U_0[\boldsymbol{x}'(X', t) - \boldsymbol{x}'(X, t), \theta'(X', t), X], \tag{21}$$

$$\begin{aligned} & U_0[\boldsymbol{x}'(X', t) - \boldsymbol{x}'(X, t), \theta'(X', t), X] = \\ & \quad U_0\left\{\boldsymbol{Q}(t) \cdot [\boldsymbol{x}'(X', t) - \boldsymbol{x}'(X, t)], \theta'(X', t), X\right\}, \end{aligned} \tag{22}$$

设 $\boldsymbol{x}'$ 是全连续函数, 在固定的时刻 t, 则 $\boldsymbol{x}'(X', t) - \boldsymbol{x}'(X, t)$ 可表示为:

$$\boldsymbol{x}'(X', t) - \boldsymbol{x}'(X, t) = \langle \boldsymbol{x}'\nabla \rangle = \int_x^{x'} \boldsymbol{x}(Y', t)\nabla \cdot \mathrm{d}Y', \tag{23}$$

上述积分是 Lebesgue 意义上的, 于是泛函 U_0 也可看成是变形梯度 $F' = \boldsymbol{x}'\nabla$ 的复合泛函, 即

$$U[\boldsymbol{F}'(X', X, t), \theta(X', t), X] = U_0[\langle F'(X', t) \rangle, \theta'(X', t), X], \tag{24}$$

这样, (21)、(22)两式可进一步写成:

$$U(X,t)=U[\boldsymbol{F}'(X',X,t),\theta'(X',t),X],\tag{25}$$

$$U[\boldsymbol{F}'(X',X,t),\theta'(X',t),X]=\\ U[\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{F}'(X',X,t),\theta'(X',t),X],\tag{26}$$

式(26)是客观性原理对 U 所加的约束. 令 $\boldsymbol{Q}(t)=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(X,t)$, 同时根据二阶张量的极分解定律有 $\boldsymbol{F}'(X',t)=\boldsymbol{R}'(X',X,t)\cdot\boldsymbol{U}'(X',t)$, 如此可得到:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}(X,t)\cdot\boldsymbol{F}'(X',t)=&\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(X,t)\cdot\boldsymbol{R}'(X',X,t)\cdot\boldsymbol{U}'(X',X,t)=\\ &\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot[\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}\nabla\cdot(X'-X)+\cdots]\cdot\boldsymbol{U}'=\\ &\ [\boldsymbol{I}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{R}\nabla\cdot(X'-X)+\cdots]\cdot\boldsymbol{U}'.\end{aligned}\tag{27}$$

因此, 从物理上看, 在非局部的意义上, U 与物质空间的曲率及其高阶梯度相关联.

下面根据相容性公理考察 C_D 不等式对本构泛函的限制. 首先基于物理上的要求(如要求具有有限的能量)引入 Hilbert 空间 $\mathrm{H}(\Omega)$

$$\mathrm{H}(\Omega)=\left\{f\mid f\in\mathrm{L}^2(\Omega)\right\},\tag{28}$$

$\mathrm{L}^2(\Omega)$ 代表 Lebesgue 平方可积空间, 且在 $\mathrm{H}(\Omega)$ 中的内积被定义为:

$$\langle f_1,f_2\rangle_H=\int_\Omega f_1(X')f_2(X')\,\mathrm{d}V(X')\qquad(f_1,f_2\in\mathrm{H}(\Omega)),\tag{29}$$

由内积诱导的范数为 $\|f\|_{\mathrm{H}}=\langle f,f\rangle_{\mathrm{H}}$.

进一步假定 $\boldsymbol{F}',\theta'\in\mathrm{H}(\Omega)$, 并且 $\mathrm{H}(\Omega)$ 上的泛函 $U[\boldsymbol{F}'(X',X,t),\theta'(X',t),X]$ 是 Frechet 可微的, 具有有界的 Frechet 导数, 则按照 Riesz 表示定理[7]有:

$$\delta U(g/h)=\left\langle\frac{\delta U}{\delta f},h\right\rangle_{\mathrm{H}}=\int_\Omega\frac{\delta U}{\delta f}h(X')\,\mathrm{d}V(X'),\tag{30}$$

于是经过计算有:

$$\begin{aligned}\rho\dot{U}(X,t)=&\int_\Omega\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}:\dot{\boldsymbol{F}}'\,\mathrm{d}V(X')+\int_\Omega\rho\frac{\partial U}{\partial\theta'}\dot{\theta}'\,\mathrm{d}V(X')=\\ &\int_\Omega\rho\,\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}'\right]\mathrm{d}V(X')+\int_\Omega\rho\frac{\partial U}{\partial\theta'}\dot{\theta}'\cdot\mathrm{d}V(X')=\\ &\int_\Omega\rho\,\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\right)^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{d}'+\boldsymbol{\omega}')\cdot\boldsymbol{F}'\,\mathrm{d}V(X')+\int_\Omega\rho\frac{\partial U}{\partial\theta'}\dot{\theta}'\cdot\mathrm{d}V(X')=\\ &\int_\Omega\rho\,\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\cdot\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{d}'\right]\mathrm{d}V(X')+\int_\Omega\rho\frac{\partial U}{\partial\theta'}\dot{\theta}'\cdot\mathrm{d}V(X')+\\ &\int_\Omega\rho\,\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\cdot\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\omega}'\right]\mathrm{d}V(X')=\\ &\int_\Omega\rho\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\cdot\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}}\right):\boldsymbol{d}'\,\mathrm{d}V(X')+\int_\Omega\rho\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\cdot\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}}\right):\boldsymbol{\omega}'\,\mathrm{d}V(X')+\\ &\int_\Omega\rho\frac{\partial U}{\partial\theta'}\dot{\theta}'\cdot\mathrm{d}V(X')=\int_\Omega\boldsymbol{T}:\boldsymbol{d}'\,\mathrm{d}V(X')+\int_\Omega\boldsymbol{R}:\boldsymbol{\omega}'\,\mathrm{d}V(X')+\\ &\int_\Omega\rho\frac{\partial U}{\partial\theta'}\dot{\theta}'\,\mathrm{d}V(X')=\int_\Omega\boldsymbol{T}^*:\boldsymbol{d}\,\mathrm{d}V(X')+\int_\Omega\boldsymbol{R}^*:\boldsymbol{\omega}'\,\mathrm{d}V(X')+\\ &\int_\Omega\rho\frac{\partial U}{\partial\theta'}\dot{\theta}'\,\mathrm{d}V(X')+\Sigma+K+\Theta,\end{aligned}\tag{31}$$

这里 $\boldsymbol{d}'$, ω' 和 $\dot{\theta}'$ 仅依赖于 X' 与 t, 而 $\boldsymbol{d}$, ω 和 θ 则只是 X 与 t 的函数; $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 是将 $\rho\dfrac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\cdot\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}}$

做和分解而得到的二阶对称与反对称张量,且有:

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= \frac{1}{2}\rho\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{F}'}\cdot\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{F}'\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{F}'}\right)^{\mathrm{T}}\right],\\
\boldsymbol{R} &= \frac{1}{2}\rho\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{F}'}\cdot\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{F}'\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{F}'}\right)^{\mathrm{T}}\right],\\
\Sigma &= \int_\Omega(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{d}' - \boldsymbol{T}^*:\boldsymbol{d})\,\mathrm{d}V(X'),\\
K &= \int_\Omega(\boldsymbol{R}:\omega' - \boldsymbol{R}^*:\omega)\,\mathrm{d}V(X'),\\
\Theta &= \int_\Omega\left[\rho\frac{\partial U}{\partial\theta'}\dot{\theta}' - \left(\rho\frac{\partial U}{\partial\theta'}\right)^*\dot{\theta}\right]\mathrm{d}V(X'),
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

上面诸式中加星号* 的项表示它是从不带星号的项中通过交换 X' 和 X 而得到的,例如

$$[F(X',X)]^* \equiv F(X,X') \neq F(X',X), \tag{33}$$

利用这个定义易看出 Σ, K 和 Θ 的积分表达式中的被积函数关于 X' 和 X 的交换具有反对称性,由此可证明:

$$\int_\Omega \Sigma\,\mathrm{d}V(X) = 0,\ \int_\Omega K\,\mathrm{d}V(X) = 0,\ \int_\Omega \Theta\,\mathrm{d}V(X) = 0. \tag{34}$$

将(31)式代入到 C_D 不等式(13)中:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\boldsymbol{q}\cdot\theta_{\therefore}}{\theta} + \rho\overleftarrow{E} - (\Sigma + K + \Theta) + \rho\overleftarrow{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{V} - \\
&\left[\rho S + \int_\Omega\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\theta'}\right)^*\mathrm{d}V(x')\right]\dot{\theta} + \left[\boldsymbol{t}^{\mathrm{s}} - \int_\Omega\boldsymbol{T}^*\,\mathrm{d}V(X')\right]:\boldsymbol{d} + \\
&\left[\boldsymbol{t}^{\mathrm{a}} - \int_\Omega\boldsymbol{R}^*\,\mathrm{d}V(X')\right]:\omega \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

注意到(34)式和局部化能量残余的性质,然后将上式在整个 Ω 域上积分得:

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega\frac{\boldsymbol{q}\cdot\theta_{\therefore}}{\theta}\mathrm{d}V(X) + \int_\Omega\rho\overleftarrow{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}V(X) - \\
&\int_\Omega\left[\rho S + \int_\Omega\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\theta'}\right)^*\mathrm{d}V(x')\right]\dot{\theta}\,\mathrm{d}V(X) + \int_\Omega\left[\boldsymbol{t}^{\mathrm{s}} - \int_\Omega\boldsymbol{T}^*\,\mathrm{d}V(X')\right]:\boldsymbol{d}\,\mathrm{d}V(X) + \\
&\int_\Omega\left[\boldsymbol{t}^{\mathrm{s}} - \int_\Omega\boldsymbol{R}^*\,\mathrm{d}V(X')\right]:\omega\,\mathrm{d}V(X) \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{36}$$

上述不等式关于 $\dot{\theta}$, $\boldsymbol{d}$, ω 和 $\boldsymbol{V}$ 这些描述非局部弹性体的状态随时间变化的量是线性的,它对所有独立随时间而变化的热力学历程都必须成立,这当且仅当 $\dot{\theta}$, $\boldsymbol{d}$, ω 和 $\boldsymbol{V}$ 的系数都为零时才成立,故有:

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{t}^{\mathrm{s}} &= \int_\Omega\boldsymbol{T}^*\,\mathrm{d}V(X') = \frac{1}{2}\int_\Omega\left\{\rho\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{F}'}\cdot\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{F}'\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{F}'}\right)^{\mathrm{T}}\right]\right\}^*\mathrm{d}V(X'),\\
\boldsymbol{t}^{\mathrm{a}} &= \int_\Omega\boldsymbol{R}^*\,\mathrm{d}V(X') = \frac{1}{2}\int_\Omega\left\{\rho\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{F}'}\cdot\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{F}'\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{F}'}\right)^{\mathrm{T}}\right]\right\}^*\mathrm{d}V(X'),\\
\rho S &= -\int_\Omega\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\theta'}^*\mathrm{d}V(x')\right), \qquad \rho\overleftarrow{\boldsymbol{F}} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

与不等式

$$-\int_\Omega\frac{\boldsymbol{q}\cdot\theta_{\therefore}}{\theta}\mathrm{d}V(X) \geqslant 0, \tag{38}$$

在熵不等式的整体陈述与局部陈述全同的前提条件下，不等式(38)在 Ω 的任意子区域上也成立，这当且仅当

$$-\frac{\boldsymbol{q}\cdot\nabla\theta}{\theta}\geqslant 0, \tag{39}$$

成立• 上述不等式意味着热流矢量 $\boldsymbol{q}$ 的流动方向与温度降的方向一致，它与经典热力学的有关结论(即热力学第二定理)完全相同•

将(37)诸式和(39)式代回到(35)式，则进一步得到：

$$\rho\overleftarrow{E} = \Sigma + K + \Theta, \tag{40}$$

由(34)式可知，按(40)式确定的 $\rho\overleftarrow{E}$ 恒满足

$$\int_{\Omega}\rho\overleftarrow{E}\,\mathrm{d}V(X) = 0, \tag{41}$$

的条件，且是一个非客观量•

下面证明 $\rho\overleftarrow{\boldsymbol{M}}$ 满足条件

$$\int_{\Omega}\rho\overleftarrow{\boldsymbol{M}}\,\mathrm{d}V(X) = 0, \tag{42}$$

显然从动量矩平衡方程(9)式可知，这只需证明

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{t}^{\mathrm{a}}\,\mathrm{d}V(X) = 0, \tag{43}$$

即可• 由于 U 满足(26)式，是客观标量，因此，U 的时间变化率，即 U 关于时间的物质导数也是客观的[8]• 由此我们有：

$$\dot{U}[\boldsymbol{F}'(X',X,t),\theta'(X',t),X] = \dot{U}[\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{F}'(X',X,t),\theta'(X',t),X], \tag{44}$$

记 $\bar{\boldsymbol{F}}' = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{F}'$，按 Riesz 表示定理将上式展开并消去相同的项便得到：

$$\int_{\Omega}\rho\frac{\partial U}{\partial\bar{\boldsymbol{F}}'}:\dot{\bar{\boldsymbol{F}}}'\,\mathrm{d}V(X') = \int_{\Omega}\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}:\dot{\boldsymbol{F}}'\,\mathrm{d}V(X'), \tag{45}$$

式中：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial\bar{\boldsymbol{F}}'}:\dot{\bar{\boldsymbol{F}}}'\,\mathrm{d}V(X') = \left[\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}:\frac{\partial\boldsymbol{F}'}{\partial(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{F}')}\right]:(\overline{\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{F}'}^{\boldsymbol{\cdot}}) = \\
&\quad\left[\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}:\left(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{F}'}{\partial\boldsymbol{F}'}\right)\right]:(\dot{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{F}' + \boldsymbol{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}') = \\
&\quad\left(\boldsymbol{Q}\cdot\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\right):(\dot{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{F}' + \boldsymbol{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}') = \mathrm{tr}\left[\left(\boldsymbol{Q}\cdot\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{F}'\right] + \\
&\quad\mathrm{tr}\left[\left(\boldsymbol{Q}\cdot\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}'\right] = \\
&\quad\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{F}'\right] + \mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}'\right] = \\
&\quad\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\cdot\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{Q}})\right] + \mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}'\right] = \\
&\quad\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\cdot\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}}\right):(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{Q}}) + \frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}:\dot{\boldsymbol{F}}'\boldsymbol{\cdot}
\end{aligned} \tag{46}$$

将上述结果代入到(45)式得：

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\cdot\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}}\right):(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{Q}})\,\mathrm{d}V(X') = 0, \tag{47}$$

注意到 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{Q}}$ 是反对称张量, 并将 $\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{F}'}\cdot\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}}$ 做和分解, 则等式(47) 可进一步简化为:

$$(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{Q}}):\int_{\Omega}\boldsymbol{R}\,\mathrm{d}V(X')=0, \tag{48}$$

由于 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{Q}}$ 的任意性, 故必有:

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{R}\,\mathrm{d}V(X')=0, \tag{49}$$

利用这一恒等式, 并考虑到 $\boldsymbol{R}^{*}-\boldsymbol{R}$ 关于 X' 和 X 的交换具有反对称性, 由此可得到:

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{t}^{\mathrm{a}}\,\mathrm{d}V(X)=\int_{\Omega}\int_{\Omega}\boldsymbol{R}^{*}\,\mathrm{d}V(X')\,\mathrm{d}V(X)=$$
$$\int_{\Omega}\int_{\Omega}(\boldsymbol{R}^{*}-\boldsymbol{R})\,\mathrm{d}V(X')\,\mathrm{d}V(X)=0. \tag{50}$$

这就是本文所要证明的结论.

3 结　　论

综合前面的论述, 所有的结果最后可归纳成下面的两个定理:

定理 1　局部化能量残余是非客观量, 在标架的刚性变化下, 它按(12) 式变化.

定理 2　如果熵不等式的整体陈述与部分陈述全同, 则非局部热弹性体的相关本构变量可以从一个势函数得到, 局部化残余满足零平均条件且局部化体力残余恒为零; 在非局部热弹性体中, 热量总是从高温处向低温自发地传递.

本文得到了郑泉水教授的指导, 正是由于受他的启发和影响, 本文才得以以现在的形式出现, 在此仅表示作者的衷心感谢!

[参 考 文 献]

[1] Eringen A C. Theory of nonlocal thermoelasticity[J]. Int J Engng Sci, 1974, **12**(6): 1063.

[2] Eringen A C. Nonlocal continuum mechanics and some applications[A]. In: A O Barut Ed. Nonlinear Equations of Physics and Mathematics[C]. Reidel Publishing Company, 1978.

[3] Edelen D G B. Nonlocal field theories[A]. In: A C Eringen Ed. Continuum Physics(Ⅳ)[C]. New York: Academic Press, 1976.

[4] 黄再兴, 樊蔚勋, 黄维扬. 关于非局部场论的几个新观点及其在断裂力学中的应用(Ⅰ)——基本理论部分[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(1): 45~54.

[5] Truesdell C, Noll R A. The Classical Field Theories Hangbuch der Physik[M]. Vol. Ⅲ/1, Berlin: Springer_Verlag, 1960.

[6] Eringen A C. Mechanics of Continua(Second edition)[M]. New York: R E Krieger Publishing Company, 1980.

[7] Mason J. Methods of Founctional Analysis for Application in Solid Mechanics[M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishing Company, 1985.

[8] Chadwick P. 简明理论和例题[A]. 连续介质力学[M]. 傅依斌译, 天津: 天津大学出版社, 1992.

New Points of View on the Nonlocal Field Theory and Their Applications to the Fracture Mechanics(Ⅱ) ——Re_ Discuss Nonlinear Constitutive Equations of Nonlocal Thermoelastic Bodies

Huang Zaixing
(Najjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P R China)

Abstract: In this paper, nonlinear constitutive equations are deduced strictly according to the constitutive axioms of rational continuum mechanics. The existing judgements are modified and improved. The results show that the constitutive responses of nonlocal thermoelastic body are related to the curvature and higher order gradient of its material space, and there exists an antisymmetric stress whose average value in the domain occupied by thermoelastic body is equal to zero. The expressions of the antisymmetric stress and the nonlocal residuals are given. The conclusion that the directions of thermal conduction and temperature gradient are consistent is reached. In addition, the objectivity about the nonlocal residuals and the enrgy conservation law of nonlocal field is discussed briefly, and a formula for calculating the nonlocal residuals of energy changing with rigid motion of the spatial frame of reference is derived.

Key words: nonlocal field theory; nonlocal themoelastic body; constitutive equations; antisymmetric stress; nonlocal residuals