应用数学和力学,第 20 卷 第 7 期(1999 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 07_0729_08

算子概率范数与共鸣定理*

肖建中[1], 朱杏华[2]

(1. 盐城教育学院 数学系, 江苏盐城 224002; 2. 盐城师专 数学系, 江苏盐城 224002)

(协平推荐)

摘要: 提出概率赋范线性空间上集合有界性的简化定义, 利用算子概率范数概念· 进一步研究概率赋范线性空间上的线性算子理论, 并在算子概率赋范空间上, 建立了概率有界、概率半有界、非概率无界意义下的共鸣定理·

关 键 词: 概率范数; 概率有界集; 非概率无界集; 共鸣定理
中图分类号: O177.5 文献标识码: A

引 言

在概率赋范线性空间(简称 PN 空间) 中以往一些概念的引入由于沿袭概率度量空间(简称 PM 空间) 的相关定义, 没有考虑到 PN 空间有别于一般 PM 空间的特点, 因而妨碍了 PN 空间上算子理论的深入进展· 本文对集合有界性概念作如下简化:

定义 设 $(E, \mathscr{F})$ 为 PN 空间, A 是 E 中非空子集·

1) 若 $\sup\limits_{t>0}\inf\limits_{x\in A} f_x(t) = 1$, 则称 A 为概率有界集;

2) 若 $0 < \sup\limits_{t>0}\inf\limits_{x\in A} f_x(t) < 1$, 则称 A 为概率半有界集;

3) 若 $\sup\limits_{t>0}\inf\limits_{x\in A} f_x(t) = 0$, 则称 A 为概率无界集;

4) 若 $\sup\limits_{t>0}\inf\limits_{x\in A} f_x(t) > 0$, , 则称 A 为非概率无界集·

利用这个定义及算子概率范数概念, 本文进一步讨论了 PN 空间上线性算子的一些性质, 改进了引文[1]的相关结果, 继而建立了各种有界性意义下的共鸣定理·

文中以 Z^+ 表正整数集, $H(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t \leqslant 0) \end{cases}$, 有关 PN 空间及 Menger_PN 空间的定义、符号和术语见引文[1, 2, 3]·

1 引 理

引理 1 A 为 PN 空间中概率有界集 $\Leftrightarrow$

$$\forall \lambda \in (0,1],\ \exists M = M(\lambda) > 0, A \subset N(M, \lambda)\cdot$$

证明 $\sup\limits_{t>0}\inf\limits_{x\in A} f_x(t) = 1 \Leftrightarrow$

$$\forall \lambda \in (0,1],\ \exists M = M(\lambda) > 0, \inf_{x\in A} f_x(M) > 1 - \lambda \Leftrightarrow$$

---

* 收稿日期: 1997_01_23; 修订日期: 1999_01_21
作者简介: 肖建中(1958~) , 男, 副教授, 已发表论文 30 余篇.

$\forall \lambda \in (0,1], \exists M = M(\lambda) > 0, A \subset N(M,\lambda)$.

引理 2 若 $\forall n \in Z^+, x_n \in N\left(1, 1/n\right)$, 则$\left\{x_n\right\}$为 PN 空间的概率有界集.

证明 $\forall \lambda \in (0,1], \exists n_0 \in Z^+ \quad (n > n_0), x_n \in N\left(1, \dfrac{1}{n}\right) \subset N(1, \lambda)$,
设 $n \leqslant n_0, f_{x_n}(t_n) > 1 - \lambda$, 则 $\exists M = 1 + \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant n_0} t_n, \left\{x_n\right\} \subset N(M, \lambda)$.

引理 3 设 $\|x\|_\lambda = \inf\left\{t > 0: f_x(t) > 1 - \lambda\right\}$, 则

$$\forall M > 0, N(M, \lambda) = \left\{x: \|x\|_\lambda < M\right\}.$$

证明 设 $\|x\|_\lambda < M$, 则 $f_x(M) > 1 - \lambda$, 即 $x \in N(M, \lambda)$; 反之, 设 $x \in N(M, \lambda)$, 即 $f_x(M) > 1 - \lambda$, 由于 $f_x(t)$ 左连续, $\exists M_0 \in (0, M)$, $f_x(M) \geqslant f_x(M_0) > 1 - \lambda$, 则 $\|x\|_\lambda \leqslant M_0 < M$.

引理 4 A 为 PN 空间中非概率无界集 $\Leftrightarrow$

$$\exists \rho \in (0,1), \forall \lambda \in (\rho, 1], \exists M = M(\lambda) > 0, A \subset N(M, \lambda).$$

证明 $\sup\limits_{t>0} \inf\limits_{x \in A} f_x(t) > 0 \Leftrightarrow$

$\exists \rho \in (0,1), \sup\limits_{t>0} \inf\limits_{x \in A} f_x(t) \geqslant 1 - \rho > 0 \Leftrightarrow$

$\exists \rho \in (0,1), \forall \lambda \in (\rho, 1], \exists M = M(\lambda) > 0, \inf\limits_{x \in A} f_x(M) > 1 - \lambda \Leftrightarrow$

$\exists \rho \in (0,1), \forall \lambda \in (\rho, 1], \exists M = M(\lambda) > 0, A \subset N(M, \lambda)$.

引理 5 设 t_模 Δ 满足 $\sup\limits_{b<1} \Delta(b, b) = 1$, 则

$$\forall \lambda \in (0,1], \exists \lambda_1 \in (0,1), \lambda_1 \leqslant \lambda, \Delta(1-\lambda_1, 1-\lambda_1) > 1 - \lambda.$$

引理 6 设 $(E, \mathscr{F}, \Delta)$ 为 Menger_PN 空间, 若 $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $\Delta(1-\lambda_1, 1-\lambda_1) > 1 - \lambda$, 则

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|_\lambda \leqslant \|x\|_{\lambda_1} + \|y\|_{\lambda_1}.$$

证明 $\forall \varepsilon > 0, f_{x+y}(\|x\|_{\lambda_1} + \|y\|_{\lambda_1} + \varepsilon) \geqslant$

$$\Delta\left(f_x\left(\|x\|_{\lambda_1} + \frac{\varepsilon}{2}\right), f_y\left(\|y\|_{\lambda_1} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \geqslant$$

$$\Delta(1-\lambda_1, 1-\lambda_1) > 1 - \lambda,$$

$\|x + y\|_\lambda \leqslant \|x\|_{\lambda_1} + \|y\|_{\lambda_1} + \varepsilon$, 令 $\varepsilon \to 0$ 即得.

引理 6* 设 $(E, \mathscr{F})$ 为 PN 空间, $\mathscr{F}$ 满足(PN_5), 则 $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in (0,1]$, 有
$\|x + y\|_\lambda \leqslant \|x\|_\lambda + \|y\|_\lambda$(见[3] 定理 4.2).

引理 7 设$(E, \mathscr{F}, \Delta)$ 为 Menger_PN 空间, $\sup\limits_{b<1} \Delta(b, b) = 1$, 则$(E, \mathscr{F}, \Delta)$ 是以$\left\{N_x(\varepsilon, \lambda) = x + N(\varepsilon, \lambda): \varepsilon > 0, \lambda \in (0,1]\right\}$为基本邻域族的 Hausdorff 拓扑线性空间且是第一可列的.

证明 见引文[4]、[5]. 由于$\left\{N_x(\varepsilon, \lambda): \varepsilon > 0, \lambda \in (0,1], \varepsilon \text{与} \lambda \text{为有理数}\right\}$是基本领域族, $(E, \mathscr{F}, \Delta)$ 第一可列.

引理 7* 设$(E, \mathscr{F})$ 为 PN 空间, $\mathscr{F}$ 满足 (PN_5), 则$(E, \mathscr{F})$ 是由基本领域族$\left\{N_x(\varepsilon, \lambda): \varepsilon > 0, \lambda \in (0,1]\right\}$导出的 Hausdorff 局部凸拓扑线性空间且是第一可列的.

证明 由于 Hausdorff 分离 $\Leftrightarrow \forall x \neq 0, \exists \alpha \in (0,1], p_\alpha(x) = \|x\|_\alpha \neq 0$(见[6]), 由引文[3] 定理 4.2 即得.

引理 7 和引理 7* 表明, 在 $\sup\limits_{b<1} \Delta(b, b) = 1$ 或(PN－5) 条件下, $(E, \mathscr{F}, \Delta)$ 与$(E, \mathscr{F})$ 其上拓

扑可用序列刻画,且 A 是概率有界集 $\Leftrightarrow A$ 在由 $\left\{N_x(\varepsilon,\lambda)\right\}$ 导出的Hausdorff 拓扑线性空间中有界(见[7]、[2])·

引理 8 设 $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 是完备的 Menger_PN 空间, $\sup\limits_{b<1}\Delta(b,b)=1$,或$(E,\mathscr{F})$ 是完备的 PN 空间,$\mathscr{F}$满足(PN_5)· 则$(E,\mathscr{F},\Delta)$ 与$(E,\mathscr{F})$ 按邻域族$\left\{N_x(\varepsilon,\lambda)\right\}$ 是第二纲的(见[6])·

引理 9 设 $b\neq 0\Rightarrow\Delta(b,b)\neq 0$,则 $\forall\rho:0<\rho<1$, $\exists\lambda_0\in(\rho,1)$ 使:

$$\forall\lambda\in(\lambda_0,1],\ \exists\lambda_1,\lambda_2\in(\rho,1),\ \lambda_2\leqslant\lambda_1<\lambda\text{ 且}$$
$$\Delta(1-\lambda_1,1-\lambda_1)>1-\lambda,\ \Delta(1-\lambda_2,1-\lambda_2)>1-\lambda_1\cdot$$

证明 $\forall\rho:0<\rho<1$,令 $\rho_0=\dfrac{1+\rho}{2}$, $\rho_1=1-\Delta(1-\rho_0,1-\rho_0)$, $\rho_2=\dfrac{1+\rho_1}{2}$, $\lambda_0=1-\Delta(1-\rho_2,1-\rho_2)$· 由于 $b\neq 0\Rightarrow\Delta(b,b)\neq 0$ 得

$$\rho_0<1\Rightarrow{}_1<1\Rightarrow\rho_2<1\Rightarrow\lambda_0<1\cdot$$

由于 $\Delta(1,b)=b$ 得 $\Delta(b,b)\leqslant\Delta(1,b)=b$·

$1-\lambda_0\leqslant 1-\rho_2<1-\rho_1\leqslant 1-\rho_0$,即 $\rho<\rho_0\leqslant\rho_1<\rho_2\leqslant\lambda_0$,于是

$\exists\lambda_0\in(\rho,1)$, $\forall\lambda\in(\lambda_0,1]$, $\exists\lambda_1,\lambda_2$:

$\rho_1<\lambda_1\leqslant\rho_2$, $\rho<\lambda_2\leqslant\rho_0$,即 $\exists\lambda_1,\lambda_2\in(\rho,1)$ 使:

$$\Delta(1-\lambda_1,1-\lambda_1)\geqslant\Delta(1-\rho_2,1-\rho_2)=1-\lambda_0>1-\lambda,$$
$$\Delta(1-\lambda_2,1-\lambda_2)\geqslant\Delta(1-\rho_0,1-\rho_0)=1-\rho_1>1-\lambda_1\cdot$$

引理 10 设 T 为Menger_PN 空间$(E_1,\mathscr{F},\Delta_1)$ 到$(E_2,\mathscr{F},\Delta_2)$ 的线性算子, $\sup\limits_{b<1}\Delta_i(b,b)=1$; 或设 T 为PN 空间$(E_1,\mathscr{F}_1)$ 到$(E_2,\mathscr{F}_2)$ 的线性算子· $\mathscr{F}_i$ 满足(PN_5),则 T 连续 $\Leftrightarrow T$ 有界($i=1,2$ 见[8])·

引理 11 设 $B(E_1,E_2)$ 为Menger_PN 空间$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta_1)$ 到$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$ 的有界线性算子全体, $\sup\limits_{b<1}\Delta_1(b,b)=1$,线性运算为

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x,\quad(bT)x=b(Tx),$$

并设 $\mathscr{H}=\left\{H_T:T\in B(E_1,E_2),H_T\in\mathscr{D}\right\}$,其中

$$H_T(t)=\begin{cases}\sup\limits_{s<t}\sup\limits_{\alpha\in(0,1]}\inf\limits_{x\in N(1,\alpha)}f_{Tx}(t) & (t>0),\\ 0 & (t\leqslant 0)\cdot\end{cases}$$

1) 若 $\sup\limits_{b<1}\Delta_2(b,b)=1$,则$(B(E_1,E_2),\mathscr{H})$ 是概率半范空间;

2) 若 $\sup\limits_{b<1}\Delta_2(b,b)=1$ 且 $\mathscr{F}_1$ 取值于 $\mathscr{D}_0$,则$(B(E_1,E_2),\mathscr{H})$ 为 PN 空间;

3) 若 Δ_2 连续且 $\mathscr{F}_1$ 取值于 $\mathscr{D}_0$,则$(B(E_1,E_2),\mathscr{H},\Delta_2)$ 为Menger_PN 空间·

证明 1) 由引理 10 易知 $B(E_1,E_2)$ 为线性空间· 显然 $H_T(t)$ 单调递增、左连续· 假定

$$\lim_{t\to+\infty}H_T(t)\neq 1,\ \exists\lambda_0\in(0,1),\ \forall t>0,H_T(t)<1-\lambda_0,\ \forall n\in Z^+,$$
$$\inf_{x\in N(1,1/n)}f_{Tx}(n)<1-\lambda_0\text{ 即}$$
$$\forall n\in Z^+,\ \exists x_n\in N\left(1,\frac{1}{n}\right),f_{Tx_n}(n)<1-\lambda_0\cdot\tag{1}$$

由引理2, $\left\{x_n\right\}$ 为概率有界集, 故$\left\{Tx_n\right\}$ 为概率有界集; $\exists M=M(\lambda_0)>0$, $\left\{Tx_n\right\}\subset N(M,\lambda_0)$: $n>M$ 有$f_{Tx_n}(n)>1-\lambda_0$,与式(1) 矛盾! $H_T(t)$ 为 T 在 $\mathscr{D}$中的映象·

(PN_1) 充分性、(PN_2)、(PN_3) 易证(见[9])·

(PN_4): 设 $\forall T_1,T_2\in B(E_1,E_2)$, $\forall t_1>0$, $t_2>0$, $H_{T_1}(t_1)=1$, $H_{T_2}(t_2)=1\cdot$

由$\sup_{b<1}\Delta_2(b,b)=1$及引理5, $\forall\lambda\in(0,1]$, $\exists\lambda_1\in(0,1)$, $\lambda_2\leqslant\lambda$, $\Delta_2(1-\lambda_1,1-\lambda_1)>1-\lambda$; 因为$\exists s_1<t_1, s_2<t_2, \alpha_0\in(0,1]$, $\forall x\in N(1,\alpha_0)$, $f_{T_1x}(s_1)>1-\lambda_1$, $f_{T_2x}(s_2)>1-\lambda_1$;

故
$$f_{(T_1+T_2)x}(s_1+s_2)\geqslant\Delta_2(f_{T_1x}(s_1),f_{T_2x}(s_2))\geqslant$$
$$\Delta_2(1-\lambda_1,1-\lambda_1)>1-\lambda;$$

从而$H_{T_1+T_2}(t_1+t_2)\geqslant\inf_{x\in N(1,\alpha_0)}f_{(T_1+T_2)x}(s_1+s_2)>1-\lambda$, 由于$\lambda$是任意的, 故 $H_{T_1+T_2}(t_1+t_2)=1$•

2) (PN_1) 必要性(见[9]),

3) (PN_4_m) 由于Δ_2连续, 故
$$H_{T_1+T_2}(t_1+t_2)\geqslant\sup_{\substack{s_1<t_1\\ s_2<t_2}}\sup_{\alpha\in(0,1]}\inf_{x\in N(1,\alpha)}f_{T_1x+T_2x}(s_1+s_2)\geqslant$$
$$\sup_{\substack{s_1<t_1\\ s_2<t_2}}\sup_{\alpha\in(0,1]}\Delta_2(\inf_{x\in N(1,\alpha)}f_{T_1x}(s_1),\inf_{x\in N(1,\alpha)}f_{T_2x}(s_2))=$$
$$\Delta_2(H_{T_1}(t_1),H_{T_2}(t_2))\text{•}$$

由Δ_2连续$\Rightarrow\sup_{b<1}\Delta_2(b,b)=\Delta_2(1,1)=1$, $(B(E_1,E_2),\mathscr{H},\Delta_2)$为Menger_PN空间•

引理11[*] 设$B(E_1,E_2)$为PN空间$(E_1,\mathscr{F}_1)$到$(E_2,\mathscr{F}_2)$的有界线性算子全体, $\mathscr{F}_1$与$\mathscr{F}_2$满足(PN_5)且$\mathscr{F}_1$取值于$\mathscr{D}_0$, 线性运算与$H_T(t)$如引理11所定义, 则$(B(E_1,E_2),\mathscr{H})$为PN空间且$\mathscr{H}$满足(PN_5)• (见[9])

2 共鸣定理

定理1 设$\{T_\nu:\nu\in\Gamma\}$为完备的Menger_PN空间$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta_1)$到Menger_PN空间$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$的有界线性算子集, $\sup_{b<1}\Delta_i(b,b)=1(i=1,2)$• 若$\forall x\in E_1$, $\{T_\nu x:\nu\in\Gamma\}$是$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$的概率有界集, 则对$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta_1)$中的任一概率有界集$A$, $\bigcup_{\nu\in\Gamma}T_\nu A$为$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$的概率有界集•

证 $\forall\lambda\in(0,1]$, 由题设及引理1与引理3, 可作E_1上的非负泛函:
$$p_\lambda(x)=\sup_{\nu\in\Gamma}\|T_\nu x\|_\lambda(x\in E_1),$$

显然$\forall t\in R$, $p_\lambda(tx)=|t|p_\lambda(x)$, (2)

由引理5, $\forall\lambda\in(0,1]$, $\exists\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$, $\lambda_2\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda$,

有
$$\Delta_2(1-\lambda_1,1-\lambda_1)>1-\lambda,\tag{3}$$
$$\Delta_1(1-\lambda_2,1-\lambda_2)>1-\lambda_1,\tag{4}$$

由引理6, $\forall x,y\in E_1$, 有
$$\|T_\nu(x+y)\|_\lambda\leqslant\|T_\nu x\|_{\lambda_1}+\|T_\nu y\|_{\lambda_1},$$
$$\|T_\nu(x+y)\|_{\lambda_1}\leqslant\|T_\nu x\|_{\lambda_2}+\|T_\nu y\|_{\lambda_2},$$
$$p_\lambda(x+y)\leqslant p_{\lambda_1}(x)+p_{\lambda_1}(y),\tag{5}$$
$$p_{\lambda_1}(x+y)\leqslant p_{\lambda_2}(x)+p_{\lambda_2}(y),\tag{6}$$

记
$$X_k(\lambda)=\{x:p_\lambda(x)\leqslant k\}\qquad(k\in Z^+)\text{•}$$

由于 $\|\cdot\|_\lambda$ 关于 $\lambda\in(0,1]$ 单调减, $\|T_\nu x\|_{\lambda_2}\geqslant\|T_\nu x\|_{\lambda_1}$, 设 $\{x_n\}\subset\{x:\|T_\nu x\|_{\lambda_2}\leqslant k\}\subset\{x:\|T_\nu x\|_{\lambda_1}\leqslant k\}$, 且 $\lim_{n\to\infty}f_{x_n-x_0}(t)=H(t)$, 由引理 10, $\lim_{n\to\infty}f_{T_\nu x_n-T_\nu x_0}(t)=H(t)$. $\forall\varepsilon>0,\exists N\in Z^+,\forall n>N,f_{T_\nu x_n-T_\nu x_0}(\varepsilon)>1-\lambda_2$, 即 $\|T_\nu x_n-T_\nu x_0\|_{\lambda_2}\leqslant\varepsilon$, 由(4)式及引理6, $\|T_\nu x_0\|_{\lambda_1}=\|T_\nu x_0-T_\nu x_n+T_\nu x_n\|_{\lambda_1}\leqslant\|T_\nu x_0-T_\nu x_n\|_{\lambda_2}+\|T_\nu x_n\|_{\lambda_2}\leqslant k+\varepsilon$, 令 $\varepsilon\to0$ 得 $x_0\in\{x:\|T_\nu x\|_{\lambda_1}\leqslant k\}$. 由引理7, $\{E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2\}$ 第一可列, 闭包

$$\overline{\{x:\|T_\nu x\|_{\lambda_2}\leqslant k\}}\subset\{x:\|T_\nu x\|_{\lambda_1}\leqslant k\}$$

$$\overline{X_k(\lambda_2)}\subset\overline{\bigcap_{\nu\in\Gamma}\{x:\|T_\nu x\|_{\lambda_2}\leqslant k\}}\subset\bigcap_{\nu\in\Gamma}\overline{\{x:\|T_\nu x\|_{\lambda_2}\leqslant k\}}\subset\bigcap_{\nu\in\Gamma}\{x:\|T_\nu x\|_{\lambda_1}\leqslant k\}=X_k(\lambda_1),$$

即

$$\lambda_2\leqslant\lambda_1,\ \overline{X_k(\lambda_2)}\subset X_k(\lambda_1).\tag{7}$$

$E_1=\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k(\lambda_2)$, 由题设及引理 8, E_1 按邻域族 $\{N_x(\varepsilon,\alpha)\}$ 是第二纲的,

$$\exists k\in Z^+,\exists\varepsilon_0>0.\ \exists\alpha\in(0,1],\exists y\in E_1,\overline{X_k(\lambda_2)}\supset N_y(\varepsilon_0,\alpha),$$

由(7)式,

$$X_k(\lambda_1)\supset N_y(\varepsilon_0,\alpha),\tag{8}$$

$\forall x\in E_1,\forall\varepsilon>0$, 设 $w=\dfrac{x}{\|x\|_\alpha+\varepsilon}$, 则

$$x_1=y+\frac{\varepsilon_0}{2}w\in N_y(\varepsilon_0,\alpha),x_2=y-\frac{\varepsilon_0}{2}w\in N_y(\varepsilon_0,\alpha),$$

由(5)式及(8)式,

$$p_\lambda\left(\frac{\varepsilon_0x}{\|x\|_\alpha+\varepsilon}\right)=p_\lambda(x_1-x_2)\leqslant p_{\lambda_1}(x_1)+p_{\lambda_1}(x_2)\leqslant2k,$$

由(2)式, 令 $\varepsilon\to0$,

$$p_\lambda(x)\leqslant\frac{2k}{\varepsilon_0}\|x\|_\alpha,\tag{9}$$

即 $\forall\lambda\in(0,1],\exists\alpha\in(0,1],\exists M_0=M_0(\lambda)>0$,

$$\forall x\in E_1,\quad\sup_{\nu\in\Gamma}\|T_\nu x\|_\lambda\leqslant M_0\|x\|_\alpha.\tag{10}$$

因 A 在$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta_1)$中概率有界, 由引理1, 对上述 α, $\exists M_1=M_1(\alpha)>0,A\subset N(M_1,\alpha)$, 由引理3, $\forall x\in A$, $\|x\|_\alpha<M_1$, 令 $M=M(\lambda)=M_0M_1>0$, 由(10)式,

$$\bigcup_{\nu\in\Gamma}T_\nu A=N(M,\lambda).\tag{11}$$

由引理1, $\bigcup_{\nu\in\Gamma}T_\nu A$ 为$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$的概率有界集.

定理 2　设 $\{T_\nu:\nu\in\Gamma\}$ 为完备的Manger-PN空间$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta_1)$到Menger-PN空间$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$的有界线性算子集, $\sup_{b<1}\Delta_i(b,b)=1\quad(i=1,2)$, 且 $b\neq0\Rightarrow\Delta_2(b,b)\neq0$.

1) 若 $\forall x\in E_1,\{T_\nu x:\nu\in\Gamma\}$ 是$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$中非概率无界集, 则对$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta_1)$中的任一概率有界集 A, $\bigcup_{\nu\in\Gamma}T_\nu A$ 为$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$的非概率无界集;

2) 若 $\forall x\in E_1,x\neq0,\{T_\nu x:\nu\in\Gamma\}$ 是$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$的概率半有界集, 则对$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta_1)$

中的任一概率有界集 $A(\exists x_0\in A, x_0\neq 0)$, $\bigcup\limits_{\nu\in\Gamma}T_\nu A$ 为$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$ 的概率半有界集•

证明 1) 由题设,引理3 及引理4, $\exists\rho\in(0,1)$, $\forall\lambda\in(\rho,1]$, 可作 E_1 上的非负泛函 $p_\lambda(x)=\sup\limits_{\nu\in\Gamma}\|T_\nu x\|_\lambda,(x\in E_1)$• 显然(2) 式成立, 由引理9, $\exists\lambda_0\in(\rho,1]$, 使: $\forall\lambda\in(\lambda_0,1]$, $\exists\lambda_1$、$\lambda_2\in(\rho,1)$, $\lambda_2\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda$, (3)与(4)成立,(5)与(6)成立• 记

$$X_k(\lambda)=\left\{x:p_\lambda(x)\leqslant k\right\},\ \forall\lambda\in(\rho,1],\ \forall k\in Z^+,$$

按定理1 证明中(7),(8),(9),(10)同理证得

$$\forall\lambda\in(\lambda_0,1],\ \exists M=M(\lambda),\ \bigcup_{\nu\in\Gamma}T_\nu A\subset N(M,\lambda),\tag{12}$$

由引理4, $\bigcup\limits_{\nu\in\Gamma}T_\nu A$ 为非概率无界集•

2) $\forall x\in E_1, x\neq 0$, 题设表明$\left\{T_\nu x:\nu\in\Gamma\right\}$也是非概率无界集, 由上证, $\bigcup\limits_{\nu\in\Gamma}T_\nu A$ 为非概率无界集, 即$\sup\limits_{t>0}\inf\limits_{\substack{x\in A\\ \nu\in\Gamma}}f_{T_\nu x}(t)>0$; 由于 $x_0\in A\subset E_1$, $x_0\neq 0$, $\left\{T_\nu x_0\right\}$ 为概率半有界集,

$$\sup_{t>0}\inf_{\substack{x\in A\\ \nu\in\Gamma}}f_{T_\nu x}(t)\leqslant\sup_{t>0}\inf_{\nu\in\Gamma}f_{T_\nu x_0}(t)<1,$$

故 $\bigcup\limits_{\nu\in\Gamma}T_\nu A$ 为$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$ 中概率半有界集•

由于 Δ_2 为连续 $\Rightarrow\sup\limits_{b<1}\Delta_2(b,b)=\Delta_2(1,1)=1$, 有:

定理3 设$\left\{T_\nu:\nu\in\Gamma\right\}$为完备的Manger-PN 空间$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta_1)$ 到Menger-PN 空间$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$ 的有界线性算子集, $\sup\limits_{b<1}\Delta_1(b,b)=1$, Δ_2 连续, 且 $\mathscr{F}_1$ 取值于 $\mathscr{D}_0$• 若 $\forall x\in E_1$, $\left\{T_\nu x:\nu\in\Gamma\right\}$是$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$ 的概率有界集, 则$\left\{T_\nu:\nu\in\Gamma\right\}$是$(B(E_1,E_2),\mathscr{H},\Delta_2)$ 的概率有界集•

证明 设$N^*(t,\lambda)=\left\{T:H_T(t)>1-\lambda\right\}$, 由引理1, 11, 只要证 $\forall\lambda\in(0,1]$, $\exists M=M(\lambda)>0$, $\forall\nu\in\Gamma$, $T_\nu\in N^*(M,\lambda)$(反证法) 若 $\exists\lambda_0\in(0,1]$, $\forall n\in Z^+$, $\exists T_n:T_n\in\left\{T_\nu:\nu\in\Gamma\right\}$, $T_n\notin N^*(n+1,\lambda_0)$, 即

$$H_{T_n}(n+1)\leqslant 1-\lambda_0,$$

故

$$\sup_{\alpha\in(0,1]}\inf_{x\in N(1,\alpha)}f_{T_n x}(n)\leqslant 1-\lambda_0,$$

$$\inf_{x\in N(1,1/n)}f_{T_n x}(n)\leqslant 1-\lambda_0<1-\lambda_0+\varepsilon,\ \forall\varepsilon\in(0,\lambda_0),$$

$$\exists x_n\in N(1,1/n), f_{T_n x_n}(n)<1-\lambda_0+\varepsilon,\tag{13}$$

由引理2, $\left\{x_n\right\}$为$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta_1)$ 的概率有界集, 由定理1, $\bigcup\limits_{\nu\in\Gamma}T_\nu\left\{x_n\right\}$为$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$ 的概率有界集, $\left\{T_n x_n\right\}\subset\bigcup\limits_{\nu\in\Gamma}T_\nu\left\{x_n\right\}$, 由引理1, 对上述 $\lambda_0-\varepsilon$, $\exists M=M(\lambda_0-\varepsilon)>0$, $\left\{T_n x_n\right\}\subset N(M,\lambda_0-\varepsilon)$, $n\geqslant M$, $f_{T_n x_n}(n)>1-\lambda_0+\varepsilon$, 与(13) 式矛盾•

定理4 设$\left\{T_\nu:\nu\in\Gamma\right\}$为完备的Menger_PN 空间$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta_1)$ 到Menger_PN 空间$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$ 的有界线性算子集, $\mathscr{F}_1$ 取值于 $\mathscr{D}_0$, $\sup\limits_{b<1}\Delta_1(b,b)=1$, Δ_2 连续, 且 $b\neq\Rightarrow\Delta_2(b,b)\neq 0$•

1) 若 $\forall x\in E_1$, $\left\{T_\nu x:\nu\in\Gamma\right\}$是$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$ 的非概率无界集, 则$\left\{T_\nu:\nu\in\Gamma\right\}$也是$(B(E_1,E_2),\mathscr{H},\Delta_2)$ 的非概率无界集;

2) 若 $\forall x\in E_1, x\neq 0$, $\left\{T_\nu x:\nu\in\Gamma\right\}$是$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta_2)$ 的概率半有界集, 则$\left\{T_\nu:\nu\in\Gamma\right\}$也是$(B(E_1,E_2),\mathscr{H},\Delta_2)$ 的概率半有界集•

证明 1) 设 A 为任一概率有界集, 则(12) 成立,

$$\forall\lambda\in(\lambda_0,1],\ \exists M=M(\lambda)>0,\ \bigcup_{\nu\in\Gamma}T_\nu A\subset N(M,\lambda),\tag{14}$$

要证:

$$\forall \lambda \in (\lambda_0, 1], \exists M = M(\lambda) > 0, \forall \nu \in \Gamma, T_\nu \in N^*(M, \lambda), \tag{15}$$

(反证法) 与定理 3 同法可证,

$$\exists \lambda^* \in (\lambda_0, 1], \forall \varepsilon \in (0, \lambda^*),$$

$$\forall n \in Z^+, \exists x_n \in N(1, 1/n), \exists T_n \in \left\{T_\nu: \nu \in \Gamma\right\}, f_{T_n x_n}(n) < 1 - \lambda^* + \varepsilon. \tag{16}$$

由引理 1, $\left\{x_n\right\}$ 为 $(E_1, \mathscr{F}_1, \Delta_1)$ 的概率有界集, 由(14) 式,

$$\left\{T_n x_n\right\} \subset \bigcup_{\nu \in \Gamma} T_\nu \left\{x_n\right\} \subset N(M^*, \lambda^* - \varepsilon); n \geqslant M^*, f_{T_n x_n}(n) > 1 - \lambda^* + \varepsilon,$$

与(16) 式矛盾! 由(15) 式及引理 4, 结论成立.

2) 由上证, $\sup\limits_{t>0} \inf\limits_{\nu \in \Gamma} H_{T_\nu}(t) > 0$, 要证 $\sup\limits_{t>0} \inf\limits_{\nu \in \Gamma} H_{T_\nu}(t) < 1$ (反证法) 若 $\sup\limits_{t>0} \inf\limits_{\nu \in \Gamma} H_{T_\nu}(t) = 1$, 即

$$\left.\begin{aligned} &\forall \lambda \in (0, 1], \exists M_1 = M_1(\lambda) > 0, \forall \nu \in \Gamma, H_{T_\nu}(M_1) > 1 - \lambda; \\ &\forall \lambda \in (0, 1], \forall \nu \in \Gamma, \sup_{\alpha \in (0, 1]} \inf_{x \in N(1, \alpha)} f_{T_\nu x}(M_1) > 1 - \lambda. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

因 $x_0 \neq 0, f_{x_0} \in \mathscr{D}_0$, 即 $\exists M_0 > 0, f_{x_0}(M_0) = 1$, 即 $\forall \alpha \in (0, 1], \dfrac{x_0}{M_0} \in N(1, \alpha)$, 令 $M = M_0 M_1$, 则 $M = M(\lambda) > 0$, 由(17) 式,

$$\forall \lambda \in (0, 1], \forall \nu \in \Gamma, f_{T_\nu x_0}(M) = f_{T_\nu (x_0/M_0)}(M_1) \geqslant \sup_{\alpha \in (0, 1]} \inf_{x \in N(1, \alpha)} f_{T_\nu x}(M_0) > 1 - \lambda,$$

$$\forall \lambda \in (0, 1], \sup_{t>0} \inf_{\nu \in \Gamma} f_{T_\nu x_0}(t) \geqslant 1 - \lambda,$$

即 $\sup\limits_{t>0} \inf\limits_{\nu \in \Gamma} f_{T_\nu x_0}(t) = 1$, 与 $\left\{T_\nu x_0\right\}$ 为概率半有界集, 矛盾!

定理 5 设 $\left\{T_\nu: \nu \in \Gamma\right\}$ 为完备的 PN 空间 $(E_1, \mathscr{F}_1)$ 到 PN 空间 $(E_2, \mathscr{F}_2)$ 的有界线性算子集, $\mathscr{F}_1$ 与 $\mathscr{F}_2$ 满足(PN_5), 若 $\forall x \in E_1, x \neq 0, \left\{T_\nu x: \nu \in \Gamma\right\}$ 是 $(E_2, \mathscr{F}_2)$ 的概率有界集(非概率无界集, 概率半有界集), 则对 $(E_1, \mathscr{F}_1)$ 的任一概率有界集 A ($\exists x_0 \in A, x_0 \neq 0$), $\bigcup\limits_{\nu \in \Gamma} T_\nu A$ 为 $(E_2, \mathscr{F}_2)$ 的概率有界集(非概率无界集, 概率半有界集).

证明 在定理 1 与定理 2 的证明中, 以引理 6^* 代替引理 5, 引理 9, 引理 6, 以引理 7^* 代替引理 7 可得证.

定理 6 设 $\left\{T_\nu: \nu \in \Gamma\right\}$ 为完备的 PN 空间 $(E_1, \mathscr{F}_1)$ 到 PN 空间 $(E_2, \mathscr{F}_2)$ 的有界线性算子集, $\mathscr{F}_1$ 与 $\mathscr{F}_2$ 满足(PN_5) 且 $\mathscr{F}_1$ 取值于 $\mathscr{D}_0$, 若 $\forall x \in E_1, x \neq 0, \left\{T_\nu x: \nu \in \Gamma\right\}$ 是 $(E_2, \mathscr{F}_2)$ 的概率有界集(非概率无界集, 概率半有界集), 则 $\left\{T_\nu: \nu \in \Gamma\right\}$ 为 $(B(E_1, E_2), \mathscr{H})$ 的概率有界集(非概率无界集, 概率半有界集).

证明 由定理 5、引理 11^* 及定理 3 与定理 4 的证明即得.

[参 考 文 献]

[1] 肖建中. M_PN 空间上线性算子的概范数与有界性刻画[J]. 数学研究与评论, 1993, **13**(4): 631~632.

[2] 张石生. 概率度量空间的基本理论及应用(Ⅱ) [J]. 应用数学和力学, 1988, **9**(3): 193~204.

[3] 张石生. 概率度量空间的基本理论及应用(Ⅰ) [J]. 应用数学和力学, 1988, **9**(2): 117~126.

[4] 林熙. 概率赋范线性空间的不动点定理[J]. 数学杂志, 1983, **3**(1): 73~76.

[5] Schweizer B, Sklar A. Probabilistic Metric Space[M]. New York, Amsterdam, Oxford: North_Holland, 1983.

[6] 夏道行, 等. 泛函分析第二教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987, 159~ 182.

[7] 张石生, 郭进利. 概率线性赋范空间中的概率积分、G½teaux 微分及 Schauder 原理[J] . 四川大学学报(自然科学) , 1989, **26**(2) : 127~ 135.

[8] 定光桂. 拓扑线性空间选讲[M] . 南宁: 广西教育出版社, 1987, 43~ 44.

[9] 肖建中、蒋兴国. 关于 PN 空间上线性算子的概率范数[J] . 应用数学和力学, 1997, **18**(3) : 285~ 290.

[10] 游兆永, 朱林户. 概率赋范空间的线性拓扑性质[J]. 数学进展, 1988, **17**(3) : 275~ 279.

[11] Schweizer B, Sklar A. Statistical metric space[J]. Prcific Journal of Mathematics, 1960, **10**: 313~ 334.

Probabilistic Norm of Operators and Resonance Theorems

Xiao Jianzhong[1], Zhu Xinghua[2]

(1. Department of Mathematics, Yancheng Educational Institute, Yancheng, Jiangsu 224002, P R China;

2. Department of Mathematics, Yancheng Teachers College, Yancheng, Jiangsu 224002, P R China)

Abstract: In this paper, a simplified definition of boundedness of the sets in probabilistic normed linear space was introduced. By means of the probabilistic norm of linear operators, the linear operator theory on probabilistic normed linear space was further studied. On probabilistic normed linear operator space, some resonance theorems dealing with probabilistic bounded sets, probabilistic semi_bounded sets, and probabilistic non_unbounded sets are obtained.

Key words: probabilistic norm; probabilistic bounded set; probabilistic non_unbounded set; resonance theorem