应用数学和力学,第25卷 第2期(2004年2月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2004)02_0121_07

H_∞ 分散控制系统范数计算的模态综合法(Ⅱ)*

钟万勰[1☆], 吴志刚[1], 高 强[1], 梁以德[2], F.W.威廉姆斯[2]

(1.大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室,大连 116023;
☆访问香港城市大学; 2.香港城市大学 建筑系,香港)

(我刊编委钟万勰来稿)

摘要: 在大系统控制中, H_∞ 分散控制方法将整个系统划分成一系列子系统分别研究,然后综合设计大系统的分散控制器,这与结构力学中的子结构分析技术类似• 本着这一思想建立了分散 H_∞ 控制与子结构振动分析的模拟关系、分散控制系统的最优 H_∞ 范数与整体结构一阶本征值之间的对应关系,进而利用结构力学中的模态综合法和扩展Wittrick_Williams算法计算这一参数• 论文的第(Ⅰ)部分主要介绍系统 H_∞ 控制及其本征函数的正交性和展开定理;第(Ⅱ)部分介绍分散控制系统最优 H_∞ 范数计算的模态综合法及数值算例•

关 键 词: H_∞ 控制; 分散控制; 模态综合; 广义Rayleigh商; 扩展Wittrick_Williams算法
中图分类号: O32;TP273 文献标识码: A

引 言

以论文第(Ⅰ)部分[1]中 H_∞ 控制子系统本征函数正交性和展开定理等内容为基础,这里将介绍分散控制系统最优 H_∞ 范数计算的模态综合法以及几个数值算例• 文中(Ⅰ_n)表示引用论文第(Ⅰ)部分[1]的公式(n)•

1 大系统最优参数的计算——模态综合

大系统的综合还是应当用变分原理• 对 H_∞ 控制来说首先是要求出大系统的基本本征值 γ_{cr}^{-2}• 在本文第(Ⅰ)部分中为简单起见,各子系统的号码未曾标记,也用 γ_{cr}^{-2},但可以从上下文看出讲的是子系统• 本节的 γ_{cr}^{-2} 指的则是全系统的本征值•

在原有状态/对偶空间分析问题比较复杂,转换到子系统的本征解空间作分析可以使问题得到简化,子系统的划分规则是使子系统的状态向量互相独立• 全系统的状态向量 $\boldsymbol{x}$ 成为子系统状态向量 $\boldsymbol{x}^{(i)}$ 的直和(文中上标(i)表示第 i 个子系统而下标 i 表示第 i 阶本征值),相应地

* 收稿日期: 2002_12_09; 修订日期: 2003_10_08
基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目(G1999032805);国家自然科学基金资助项目(19732020,10202004);英国工程与物理科学研究理事会资助项目(GR/R05437/01)
作者简介: 钟万勰(1934—),男,浙江德清人,教授,中国科学院院士
(联系人.Tel/Fax:86_441_4708437;E_mail:zwoffice@dlut.edu.cn)•

其对偶向量 λ 也是 $\lambda^{(i)}$ 的直和•

初看起来, 只要采用全部子系统的本征解来展开就可以了, 但这是对仅有一类变量的变分原理而言• 变分原理(Ⅰ_27) 有对偶的两类变量, 即 $\boldsymbol{x}$ 与 λ, 独立地变分, 并且对于泛函是取最小_最大(min_max)• 以往按本征解展开的理论是对于一类变量自共轭算子的定理, 其本征函数集可以覆盖变量空间, 而对于两类变量的变分问题, 这些本征函数只能覆盖状态向量空间部分, 因此还需要覆盖对偶向量空间的函数集• 即第 1 个子系统的状态向量 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 用其本征向量的状态向量部分 $\boldsymbol{x}_j^{(1)}$ 来展开, 同样第 1 个子系统的对偶向量 $\lambda^{(1)}$ 用其本征向量的对偶向量部分 $\lambda_j^{(1)}$ 来展开• 当前这两个展开式的系数是互相无关的, 也就是说, 状态向量与其对偶向量应分别展开• 即 $p = 2$, 即两个子系统时, 有

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \boldsymbol{x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j b_j^{(1)} \boldsymbol{x}_j^{(1)} \\ \sum_k b_k^{(2)} \boldsymbol{x}_k^{(2)} \end{Bmatrix}, \tag{1a}$$

$$\lambda(t) = \begin{Bmatrix} \lambda^{(1)} \\ \lambda^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j a_j^{(1)} \lambda_j^{(1)} \\ \sum_k a_k^{(2)} \lambda_k^{(2)} \end{Bmatrix}• \tag{1b}$$

根据线性组合的原理, 也可以将系数 $a_k^{(i)}$ 的形函数取为子系统的全本征向量, 于是

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \boldsymbol{x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j (a_j^{(1)} + b_j^{(1)}) \boldsymbol{x}_j^{(1)} \\ \sum_k (a_k^{(2)} + b_k^{(2)}) \boldsymbol{x}_k^{(2)} \end{Bmatrix}, \tag{2a}$$

$$\lambda(t) = \begin{Bmatrix} \lambda^{(1)} \\ \lambda^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j a_j^{(1)} \lambda_j^{(1)} \\ \sum_k a_k^{(2)} \lambda_k^{(2)} \end{Bmatrix}, \tag{2b}$$

相当于

$$\nu(t) = \begin{Bmatrix} \nu^{(1)} \\ \nu^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j (a_j^{(1)} \varphi_j^{(1)} + b_j^{(1)} \beta_j^{(1)}) \\ \sum_k (a_k^{(2)} \varphi_k^{(2)} + b_k^{(2)} \beta_k^{(2)}) \end{Bmatrix}, \tag{3}$$

其中 $a_j^{(1)}$、$a_k^{(2)}$; $b_j^{(1)}$、$b_k^{(2)}$ 为待定参数, 这些参数应当由变分原理(Ⅰ_27) 来确定, $\beta_j^{(i)}$ 表示对应于向量函数 $\beta^{(i)} = \left\{ (\boldsymbol{x}^{(i)})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \right\}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 阶本征函数$(i = 1, 2)$•

原系统变分泛函的构成为 Π_1 与 Π_2, 回顾公式(Ⅰ_11), 由于原系统矩阵的构成特点, (Ⅰ_25) 与(Ⅰ_26) 中的各项除 $\boldsymbol{A}$ 阵外, 都是分立的• 因此 Π_1 与 Π_2 是各子系统的变分泛函 $\Pi_1^{(i)}$ 与 $\Pi_2^{(i)}$ 之和, 再加上 $\boldsymbol{A}$ 阵中含有 ε 的非对角子矩阵• 这里先将 $\Pi_1^{(i)}$ 与 $\Pi_2^{(i)}$ 计算出来(见方程(Ⅰ_25) 和(Ⅰ_26))

$$\Pi_1^{(i)} = \int_0^{t_{\mathrm{f}}} \left[(\lambda^{(i)})^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{x}}^{(i)} - (\lambda^{(i)})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_{ii} \boldsymbol{x}^{(i)} + \frac{1}{2} (\lambda^{(i)})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{uii} \boldsymbol{B}_{uii}^{\mathrm{T}} \lambda^{(i)} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{x}^{(i)})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{ii}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{ii} \boldsymbol{x}^{(i)} \right] \mathrm{d}t - \frac{1}{2} (\boldsymbol{x}^{(i)})^{\mathrm{T}} (t_{\mathrm{f}}) \boldsymbol{S}_{fii} \boldsymbol{x}^{(i)} (t_{\mathrm{f}}), \tag{4}$$

$$\Pi_2^{(i)} = \int_0^{t_{\mathrm{f}}} \left[\frac{1}{2} (\lambda^{(i)})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{wii} \boldsymbol{B}_{wii}^{\mathrm{T}} \lambda^{(i)} \right] \mathrm{d}t• \tag{5}$$

理论上讲本征函数展开需要取无穷多项,但实际上,只需要取有限多项就可以了[2,3]• 设子系统1和2分别取 n_{e1} 和 n_{e2} 项展开,将 $\boldsymbol{x}^{(i)}$、$\lambda^{(i)}$ 代入,根据正交归一条件以及展开定理,可以导出

$$\Pi_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_{ei}}\left[\gamma_j^{(i)-2}a_j^{(i)2} - \int_0^{t_f}\sum_{k=1}^{n_{ei}}\left[\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_j^{(i)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{ii}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{ii}\boldsymbol{x}_k^{(i)}\right)\cdot(b_j^{(i)}b_k^{(i)})\right]\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n_{ei}}\left[\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{jf}^{(i)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{fii}\boldsymbol{x}_{kf}^{(i)}\right)\cdot(b_j^{(i)}b_k^{(i)})\right]\right] =$$

$$\sum_j\gamma_j^{(i)-2}a_j^{(i)2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_c^{(i)}\boldsymbol{b}^{(i)}, \tag{6a}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_c^{(i)} = \int_0^{t_f}(\boldsymbol{X}^{(i)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{ii}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{ii}\boldsymbol{X}^{(i)}\mathrm{d}t - (\boldsymbol{X}_f^{(i)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{fii}\boldsymbol{X}_f^{(i)};$$

而 $\boldsymbol{X}^{(i)} = \left[\boldsymbol{x}_1^{(i)}, \boldsymbol{x}_2^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{n_{ei}}^{(i)}\right]$ 是(i)号子系统本征向量函数组成的子矩阵,$\boldsymbol{X}_f^{(i)}$ 是矩阵 $\boldsymbol{X}^{(i)}$ 在 $t = t_f$ 时的值,$\boldsymbol{b}^{(i)} = \left\{b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \cdots, b_{n_{ei}}^{(i)}\right\}^{\mathrm{T}}$ 是参数组成的待定向量• 由于第 i 个子系统可控制可观测的性质,因此 $\boldsymbol{C}_c^{(i)}$ 是对称正定矩阵[4]• 并且有

$$\Pi_2^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_{ei}}\Pi_{2j}^{(i)}\cdot(a_j^{(i)})^2 = \sum_{j=1}^{n_{ei}}(a_j^{(i)})^2, \tag{6b}$$

其中

$$\Pi_{2j}^{(i)} = \int_0^{t_f}\left[\frac{1}{2}(\lambda_j^{(i)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{wii}\boldsymbol{B}_{wii}^{\mathrm{T}}\lambda_j^{(i)}\right]\mathrm{d}t = 1,$$

式中上标(i)代表子系统序号,下标 j 代表本征解的阶次•

子系统交互项可以导出为

$$\Pi_{1m} = -\int_0^{t_f}\left[(\lambda^{(1)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}^{(2)} + (\lambda^{(2)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}^{(1)}\right]\mathrm{d}t =$$

$$-\varepsilon\sum_{j=1}^{n_{e1}}\sum_{k=1}^{n_{e2}}\left[c_{jk}^{(12)}a_j^{(1)}(a_k^{(2)} + b_k^{(2)}) + c_{kj}^{(21)}a_k^{(2)}(a_j^{(1)} + b_j^{(1)})\right], \tag{7}$$

其中

$$c_{jk}^{(12)} = \int_0^{t_f}\left[(\lambda_j^{(1)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_k^{(2)}\right]\mathrm{d}t, \tag{8a}$$

$$c_{kj}^{(21)} = \int_0^{t_f}\left[(\lambda_j^{(2)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_k^{(1)}\right]\mathrm{d}t• \tag{8b}$$

由此可组成矩阵 $\boldsymbol{C}^{(12)}$ 与 $\boldsymbol{C}^{(21)}$,于是

$$\Pi_{1m} = -\varepsilon\left[(\boldsymbol{a}^{(1)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{(12)}(\boldsymbol{a}^{(2)} + \boldsymbol{b}^{(2)}) + (\boldsymbol{a}^{(2)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{(21)}(\boldsymbol{a}^{(1)} + \boldsymbol{b}^{(1)})\right]• \tag{9}$$

综合方程(6)与(7)给出整个系统的泛函

$$\Pi_1 = \Pi_1^{(1)} + \Pi_1^{(2)} + \Pi_{1m}, \tag{10a}$$

$$\Pi_2 = \Pi_2^{(1)} + \Pi_2^{(2)}• \tag{10b}$$

将两个子系统的待定参数组成未知向量

$$\boldsymbol{a} = \left\{(\boldsymbol{a}^{(1)})^{\mathrm{T}}; (\boldsymbol{a}^{(2)})^{\mathrm{T}}\right\}^{\mathrm{T}} = \left\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \cdots, a_{n_{e1}}^{(1)}; a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \cdots, a_{n_{e2}}^{(2)}\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{11a}$$

$$\boldsymbol{b} = \left\{(\boldsymbol{b}^{(1)})^{\mathrm{T}}; (\boldsymbol{b}^{(2)})^{\mathrm{T}}\right\}^{\mathrm{T}} = \left\{b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \cdots, b_{n_{e1}}^{(1)}; b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, \cdots, b_{n_{e2}}^{(2)}\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{11b}$$

有

$$\Pi_1 = \sum_{j=1}^{n_{e1}} (\gamma_j^{(1)})^{-2} (a_j^{(1)})^2 + \sum_{j=1}^{n_{e2}} (\gamma_j^{(2)})^{-2} (a_j^{(2)})^2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \mathrm{diag}(\boldsymbol{C}_c^{(1)}, \boldsymbol{C}_c^{(2)}) \boldsymbol{b} - \varepsilon \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{(12)} \\ \boldsymbol{C}^{(21)} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}), \tag{12a}$$

$$\Pi_2 = \sum_{j=1}^{n_{e1}} (a_j^{(1)})^2 + \sum_{j=1}^{n_{e2}} (a_j^{(2)})^2 . \tag{12b}$$

由于全部子系统皆为可控制可观测，对于参数向量 $\boldsymbol{b}$ 取最大可以先行对 Π_1 完成，得到对 $\boldsymbol{a}$ 的二次齐次型

$$\Pi_1(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{a}, \quad \Pi_2(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}, \tag{13a, b}$$

其中

$$\boldsymbol{K} = \mathrm{diag}\left[(\gamma_1^{(1)})^{-2}, \cdots, (\gamma_{n_{e1}}^{(1)})^{-2}, (\gamma_1^{(2)})^{-2}, \cdots, (\gamma_{n_{e2}}^{(2)})^{-2} \right] - \varepsilon \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{(12)} \\ \boldsymbol{C}^{(21)} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{(12)} \\ \boldsymbol{C}^{(21)} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_c^{(1)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_c^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{(12)} \\ \boldsymbol{C}^{(21)} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

这样就仅剩下了对向量 $\boldsymbol{a}$ 取最小． 寻求全系统 H_∞ 控制的最优参数 $\gamma_{\mathrm{cr}}^{-2}$ 成为下列本征值问题

$$\gamma_{\mathrm{cr}}^{-2} = \min_{\boldsymbol{a}} \frac{\Pi_1(\boldsymbol{a})}{\Pi_2(\boldsymbol{a})}, \tag{15}$$

这是典型的有限维 Rayleigh 商，有多种方法求解．

2 数值例题

例 1 设两个子系统矩阵为

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.934 \\ 1.0 & 0.036 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.934 \\ 1.0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{12} = \begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 \\ 3.0 & 4.0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{21} = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 3.0 & 2.0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_{11} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_{22} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_{w11} = \boldsymbol{I}_2, \quad \boldsymbol{B}_{w22} = \boldsymbol{I}_2, \quad \boldsymbol{B}_{u11} = \boldsymbol{I}_2, \quad \boldsymbol{B}_{u22} = \boldsymbol{I}_2,$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}} = \boldsymbol{0}_4, \quad t_{\mathrm{f}} = 1.6, \quad \varepsilon = 0.5 .$$

对每个子系统，分别计算前 11 阶本征函数，即 $n_{e1} = n_{e2} = 11$，然后用模态综合法计算整体系统的本征值，其中前 3 阶本征值分别为

$$\gamma_1^{-2} = 1.001\,20; \quad \gamma_2^{-2} = 3.142\,02; \quad \gamma_3^{-2} = 7.431\,73 .$$

另外，按整体大系统计算[5]得到的前 3 阶本征值分别为

$$\gamma_1^{-2} = 1.003\,48; \quad \gamma_2^{-2} = 3.298\,76; \quad \gamma_3^{-2} = 7.644\,88,$$

可以发现两种方法计算的结果是相符的． 当然 H_∞ 控制问题只需要最低阶本征值，因为系统最优 H_∞ 范数 $\gamma_{\mathrm{cr}} = \gamma_1$． 注意在本算例中，非对角子矩阵 $\boldsymbol{A}_{12}$ 和 $\boldsymbol{A}_{21}$ 中存在比对角子矩阵 $\boldsymbol{A}_{11}$ 和 $\boldsymbol{A}_{22}$ 的元素大的元素．

例 2 本例中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}_u$ 参数取自文献[6]第 226 页的例题．

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.5 \\ 0.1 & -2.0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.2 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{21}=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0.1 & -0.2\\ 0.4 & 0.1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{22}=\begin{bmatrix}-5.0 & 0.5 & -1.0\\ 0 & -2.0 & 0\\ -0.5 & 0 & -4.0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_{11}=\boldsymbol{I}_2,\quad \boldsymbol{C}_{22}=\boldsymbol{I}_3,$$

$$\boldsymbol{B}_{u11}=\begin{bmatrix}1.0\\ 0.0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{u22}=\begin{bmatrix}0.0\\ 1.0\\ 1.0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{w11}=\boldsymbol{I}_2,\quad \boldsymbol{B}_{w22}=\boldsymbol{I}_3,$$

$$\boldsymbol{S}_{f11}=\boldsymbol{0}_2,\quad \boldsymbol{S}_{f22}=\boldsymbol{0}_3,\quad t_f=1.0,\quad \varepsilon=1.0\cdot$$

对每个子系统, 分别计算前 12 阶本征函数, 即 $n_{e1}=n_{e2}=12$, 然后用模态综合法计算整体系统的本征值, 其中前 3 阶本征值分别为

$$\bar{\gamma}_1^2=5.526\ 06;\quad \bar{\gamma}_2^2=9.285\ 35;\quad \bar{\gamma}_3^2=10.634\ 58;$$

当然也可以按整体大系统计算前 3 阶本征值

$$\bar{\gamma}_1^2=5.525\ 66;\quad \bar{\gamma}_2^2=9.285\ 21;\quad \bar{\gamma}_3^2=10.634\ 46\cdot$$

两种方法的结果是相符的, 当然 H_∞ 控制问题中仅需第一阶特征值•

例 3　系统为 9 阶, 首先取 $\boldsymbol{S}_f=\boldsymbol{0}_9$ 计算, 然后再取 $\boldsymbol{S}_f=0.1\times\boldsymbol{I}_9$ 计算• 子系统的构成如下所示

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A}_{11} & \varepsilon\boldsymbol{A}_{12}\\ \hline \varepsilon\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{array}\right]=$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc}
0 & 0.545 & 0 & 0 & 0 & -0.545 & 0 & 0 & 0\\
-6 & -0.05 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -3.33 & 3.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -5.21 & 0 & -12.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0.425 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.05 & 6 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.33 & 3.33 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.21 & 0 & -12.5 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.425 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{B}_u=\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{B}_{u11} & \boldsymbol{0}\\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{u22}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 12.5 & 0\\ 0 & 0\\ \hline 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 12.5\\ 0 & 0\end{array}\right],\quad \boldsymbol{B}_w=\boldsymbol{I}_9,\quad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_9,\quad t_f=0.5\cdot$$

对第一种末端条件, 每个子系统分别计算前 15 阶本征函数, 再利用模态综合法计算整体系统的本征值, 前 3 阶本征值分别为

$$\bar{\gamma}_1^2=2.618\ 57;\quad \bar{\gamma}_2^2=7.284\ 67;\quad \bar{\gamma}_3^2=9.346\ 17;$$

而对大系统直接计算得到的结果是

$$\bar{\gamma}_1^2 = 2.618\,57;\quad \bar{\gamma}_2^2 = 7.284\,67;\quad \bar{\gamma}_3^2 = 9.346\,17.$$

对第二种末端条件, 每个子系统分别计算前 15 阶本征函数, 再利用模态综合法得到的前 3 阶本征值分别为

$$\bar{\gamma}_1^2 = 1.791\,35;\quad \bar{\gamma}_2^2 = 5.608\,58;\quad \bar{\gamma}_3^2 = 6.532\,11;$$

直接计算大系统前 3 阶本征值的结果为

$$\bar{\gamma}_1^2 = 1.791\,08;\quad \bar{\gamma}_2^2 = 5.598\,07;\quad \bar{\gamma}_3^2 = 6.530\,56.$$

对两种不同的末端条件, 不同方法的计算结果都是一致的.

例 4　考虑下列 6 阶系统

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_{11} & \varepsilon\boldsymbol{A}_{12} \\ \hline \varepsilon\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1.0 & 0.5 & 1.0 & 0.6 & 0 \\ -2.0 & -3.0 & 1.0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0.5 & 1.0 & 0 & 2.0 & 1.0 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.0 & 3.0 & 0 & -0.5 \\ \hline 1.0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -3.0 & -4.0 \end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{B}_u = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B}_{u11} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{u22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2.0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.0 \end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{B}_w = \boldsymbol{I}_6,\quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_6,\quad \boldsymbol{S}_{\mathrm{f}} = 0.1 \times \boldsymbol{I}_6,\quad t_{\mathrm{f}} = 1.6.$$

对每个子系统分别计算前 15 阶本征函数, 再利用模态综合法计算整体系统的前 3 阶本征值

$$\bar{\gamma}_1^2 = 1.745\,90;\quad \bar{\gamma}_2^2 = 4.174\,16;\quad \bar{\gamma}_3^2 = 7.473\,65;$$

作为比较, 直接计算大系统的前 3 阶本征值为

$$\bar{\gamma}_1^2 = 1.745\,63;\quad \bar{\gamma}_2^2 = 4.161\,83;\quad \bar{\gamma}_3^2 = 7.478\,45;$$

可以看到两种方法的计算结果符合得很好.

3　结 束 语

结构静力学与 LQ 最优控制相模拟, 也与 Kalman_Bucy 滤波相模拟.　H_∞ 控制与 H_∞ 滤波中的最优参数 $\gamma_{\mathrm{cr}}^{-2}$ 则与结构动力学中的稳定性与结构振动本征值相模拟.　本文进一步说明, 结构力学中的子结构分析与分散控制理论也存在模拟关系, 分散 H_∞ 控制系统的临界参数 $\gamma_{\mathrm{cr}}^{-2}$ 的确定与整体结构分析中的本征值问题相似, 从而分散控制系统的最优 H_∞ 范数可以利用子结构振动分析中的模态综合法计算.　因此结构力学以及最优控制的许多方法相互间可以互补, 以求得共同发展, 这是很有希望的方向.

致谢　本文作者感谢国家重点基础研究发展规划项目(G1999032805), 国家自然科学基金(19732020, 10202004) 及英国工程与物理科学研究理事会(GR/R05437/01) 的资助.　本文作者之一英国工程院院士 F. W. Williams 教授结束其香港城市大学的任期后将返回英国继续他在 Cardiff 大学的工作.

[参　考　文　献]

[1]　钟万勰, 吴志刚, 高强, 等. H∞分散控制系统范数计算的模态综合法(Ⅰ)[J]. 应用数学和力学,

2004, **25**(2): 111—120.

[2] Leung A Y T. Dynamic Stiffness &Sub_Structures[M]. London: Springer, 1993.

[3] 王文亮, 杜作润. 结构振动与动力子结构分析[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1985.

[4] ZHONG Wan_xie, Williams F W, Bennett P N. Extension of the Wittrick_Williams algorithm to mixed variable systems[J]. Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME, 1997, **119**(3): 334—340.

[5] ZHONG Wan_xie, Howson W P, Williams F W. H_∞ control state feedback and Rayleigh quotient [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, **191**(3_5): 489—501.

[6] Jamshidi M. Large_Scale Systems —Modeling, Control and Fuzzy Logic[M]. New Jersey: Prentice_Hall, 1997.

Modal Synthesis Method for Norm Computation of H_∞ Decentralized Control Systems (Ⅱ)

ZHONG Wan_xie[1☆], WU Zhi_gang[1], GAO Qiang[1],
A. Y. T. Leung[2], F. W. Williams[2]

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116023, P.R. China;
☆Visiting City University of Hong Kong;
2. Department of Building and Construction,
City University of Hong Kong, Hong Kong, P.R. China)

Abstract: When using H_∞ techniques to design decentralized controllers for large systems, the whole system is divided into subsystems, which are analysed using H_∞ control theory before being recombined. An analogy was established with substructural analysis in structural mechanics, in which H_∞ decentralized control theory corresponds to substructural modal synthesis theory so that the optimal H_∞ norm of the whole system corresponds to the fundamental vibration frequency of the whole structure. Hence, modal synthesis methodology and the extended Wittrick_Williams algorithm were transplanted from structural mechanics to compute the optimal H_∞ norm of the control system. The orthogonality and the expansion theorem of eigenfunctions of the subsystems H_∞ control are presented in part (Ⅰ) of the paper. The modal synthesis method for computation of the optimal H_∞ norm of decentralized control systems and numerical examples are presented in part (Ⅱ).

Key words: H_∞ control; decentralized control; modal synthesis; generalized Rayleigh quotient; extended Wittrick_Williams algorithm