应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 07_0767_04

泛权网场结合的逻辑守恒性及其在人工神经网络中的应用*

吴 陈

(华东船舶工业学院 三系, 江苏镇江 212003)

(吴学谋推荐)

摘要: 给出了泛权网场复合的几个定义, 证明了泛权网场复合的一组有关逻辑守恒性的定理• 结合均场模型, 探讨了泛权网场在人工神经网络中的应用前景•

关 键 词: 泛系方法论; 人工神经网络(ANN); 系统理论

中图分类号: TP18; N94 文献标识码: A

引 言

泛系方法论把传统的自动机模型、故障诊断模型、人工神经网络模型、随机泛函分析模型等推广为泛权网络和泛权场, 把它作为描述某些一般事物机理及处理相关问题的工具• 文献[1, 2, 3]中已得到了一些有效的结果• 在本文中, 描述了泛权网络与泛权场复合的一组数学形式定义, 证明了有关稳定内核子集、子网和子场的一组定理• 在某种意义上, 这是泛系逻辑守恒的一种特定应用• 结合人工神经网络中的均场模型, 指出了一些应用途径•

1 一组数学定义

定义 1 设 W 为一泛权空间, G 为一有限集合, 则 $g \subseteq G \times W$ 称为是 G 上的一个泛权场, $f \subseteq G^2 \times W$ 称为是 G 上的一个泛权网络•

定义 2 设 $f \subseteq G^2 \times W, x, z \in G, X \subseteq G, W' \subseteq W$, 我们定义:

$$z \circ f = \{(y, u) \mid (z, y, u) \in f, u \in W\},$$
$$X \circ f = \bigcup z \circ f (z \in X),$$
$$f \circ z = \{(y, u) \mid (y, z, u) \in f, u \in W\},$$
$$f \circ X = \bigcup f \circ z (z \in X),$$
$$f \circ W = \{(x', y) \mid (x', y, w) \in f\},$$
$$f \circ W' = \bigcup f \circ w (w \in W'),$$
$$(x, z) \circ f = \{u \mid (x, z, u) \in f\},$$
$$f^{-1} = \{(x, z, u) \mid (z, x, u) \in f\}•$$

定义 3 设 $g \subseteq G \times W, f \subseteq G^2 \times W, h \subseteq G^2 \times W$, 则复合 $g \circ f \subseteq G \times W$ 与 $f \circ h \subseteq$

* 收稿日期: 1997_03_24; 修订日期: 1999_04_07

作者简介: 吴陈(1962~), 男, 副教授, 副系主任, 已发表论文 40 余篇.

$G^2 \times W$ 分别定义如下：

$$g \circ f = \Big\{ (x, u) \mid \exists t \in G, u_1(t) \in W, u_2(t) \in W, \text{使得}(t, u_1(t)) \in g, (t, x, u_2(t)) \in f, u(t) = \theta_2(u_1(t), u_2(t)), u = \theta_1(u(t)) \Big\},$$

$$f \circ h = \Big\{ (x, y, u) \mid \exists z \in G, u_1(z), u_2(z) \in W, \text{使得}(x, z, u_1(z)) \in f, (z, y, u_2(z)) \in h, u(z) = \theta_2(u_1(z), u_2(z)), u = \theta_1(u(z)) \Big\},$$

其中, $\theta_1: W \to W$ 为 W 上的映射: $\theta_2: W^2 \to W$ 为 W^2 到 W 的映射• 在特殊情形下, θ_1 可以是恒等映射, θ_2 可以是一个二元运算, 例如分别为加法或乘法•

定义 4 设 $g \subseteq G \times W$, $f \subseteq G^2 \times W$• 若 $g \circ f = g$, 则称 g 为 f 的一个不动子场•

定义 5 设 $f \subseteq G^2 \times W$, 如果对任意的 $(x, y, w) \in f$ 都有 $(y, x, w) \in f$, 则 f 被称为是一个对称的泛权网络•

定义 6 设 $r \subseteq G^2$, $f \subseteq G^2 \times W$, $W' \subseteq W$, 我们定义 $r \circ f$ 和 $f \circ W'$ 如下：

$$r \circ f = \Big\{ w \mid (x, y, w) \in f, (x, y) \in r \Big\} \subseteq W•$$

$$f \circ W' = \Big\{ (x, y) \mid \exists w \in W', (x, y, w) \in f \Big\} \subseteq G^2$$

2 结 果

定理 1 设 $f \subseteq G^2 \times W$ 为一对称的泛权网络, $\delta = I(G) \cup (f \circ W)^t \cup [(f \circ W)^t]^{-1}$, $G_i \subseteq G(d\delta)$ 为 G 相对于 δ(一个等价关系) 的等价类, $g = G_i \times (G_i^2 \circ f)$• 如果 $\theta_2(w_1, w_2) \in G_i^2 \circ f (w_1, w_2 \in G_i^2 \circ f)$, $\theta_1(\omega) = \omega(\omega \in G_i^2 \circ f)$, 则 $g \circ f \subseteq g$• 这里 $I(G)$ 表示 G 上的恒等关系•

证明 任取 $(x, u) \in g \circ f$, 则存在某个 $y \in G$, $u_1(y) \in W$, $u_2(y) \in W$, 使得 $(y, u_1(y)) \in g$, $(y, x, u_2(y)) \in f$, $u(y) = \theta_2(u_1(y), u_2(y))$, $u = \theta_1(u(y))$• 由 $G_i \subseteq G(d\delta)$ 知, $y \in G_i$, $x \in G_i$, $u_1(y) \in G_i^2 \circ f$, $u_2(y) \in G_i^2 \circ f$• 于是 $u(y) = \theta_2(u_1(y), u_2(y)) \in G_i^2 \circ f$• 从而 $u = \theta_1(u(y)) = u(y) \in G_i \circ f$, 即 $(x, u) \in G_i \times (G_i^2 \circ f)$, $g \circ f \subseteq g$•

定理 2 设 $f \subseteq G^2 \times W$ 是一个对称的泛权网络, $G_i \subseteq G(d\delta)$ 是 G 的相对于 δ(一个等价关系) 的一个等价类, $g = G_i \times (G_i^2 \circ f)$• 若 $\theta_1\Big\{\theta_2(w, w')\Big\} = w (w, w' \in W)$, 则 $g \subseteq g \circ f$ •

证明 设 $(x, u) \in g$, 则 $x \in G_i$, $u \in G_i \times G_i^2 \circ f$, 因而存在 $y, z \in G_i$, 使得 (y, z, u), $(z, y, u) \in f$• 于是存在 $u_1, u_2 \in W$, 使得 (x, y, u_1), $(y, x, u_1) \in f$, (x, z, u_2), $(z, x, u_2) \in f$, 由条件知, $\theta_1\Big\{\theta_2(u, u_2)\Big\} = u$, $\theta_1\Big\{\theta_2(u, u_1)\Big\} = u$, 故 $(x, u) \in g \circ f$ 因此 $g \subseteq g \circ f$ •

定理 3 若定理 1 和定理 2 的条件都满足, 则 $g = g \circ f$ •

结合定理 1 和定理 2 可以证明之•

定理 4 若 $g_i \circ f = g_i (i = 1, 2, \ldots)$ 对于 $g_i \subseteq G \times W$ 都成立, 则 $(\cup g_i) \circ f = \cup g_i (i = 1, 2, \ldots)$

证明 这里仅证明 $i = 2$ 的情况• 设 $(x, u) \in (g_1 \cup g_2) \circ f$, 由定义, 存在 $t \in G$, $u_1(t)$, $u_2(t) \in W$ 使得 $(t, u_1(t)) \in g_1 \cup g_2$, $(t, x, u_2(t)) \in f$, $u(t) = \theta_1(u_1(t), u_2(t))$, $u = \theta_1(u(t))$, 即存在 $t \in G$, $u_1(t)$, $u_2(t) \in W$, 使得 $(t, u_1(t)) \in g_1$ 或 g_2, $(t, x, u_1(t)) \in f$, $u(t) = \theta_1(u_1(t), u_2(t))$, $u = \theta_1(u(t))$, 即 $(x, u) \in g_1 \circ f$ 或 $(x, u) \in g_2 \circ f$, 进而 $(x, u) \in g_1 \circ f \cup g_2 \circ f = g_1 \cup g_2$, 因而 $(g_1 \cup g_2) \circ f \subseteq g_1 \cup g_2$•

以相同的方式,可以证明 $g_1 \cup g_2 \subseteq (g_1 \cup g_2) \circ f \subseteq g_1 \cup g_2$•

定理 5　如果 $g_i \circ f = g_i$ 对于 $g_i \subseteq G^2 \times W (i = 1, 2, \cdots)$ 都成立,则 $(\cup g_i) \circ f = \cup g_i (i = 1, 2, \cdots)$•

它是定理 4 的自然推广•

定理 6　设 $f, g \subseteq G^2 \times W$ 为两个对称的泛权网络,若映射 θ_2 也是对称的,即 $\theta_2(u, v) = \theta_2(v, u)$ $(u, v \in W)$,则 $f \circ g = (g \circ f)^{-1}$•

其证明类似于定理 4,这里省略•

定理 7　设 $f, g \subseteq G^2 \times W$ 为两个对称的泛权网络,若 $(f \circ W) \circ (g \circ W) \subseteq f \circ W$,且对任意的 $z \in (G \circ f \circ W) \cap (g \circ W \circ G)$ 有 $\theta_1\left\{\theta_2(u_1(z), u_2(z))\right\} = u_1(z)$,则 $f \circ g \subseteq f$,这里 $u_1(z) \in f \circ z \circ G, u_2(z) \in z \circ g \circ G$•

这个定理的证明可以由复合算子的定义予以证明•

定理 8　设 $f \subseteq G^2 \times W$ 为一个对称的泛权网络,$G_i u \subseteq G(d\delta)$ 是 G 相对于 δ(一个等价关系) 的一个等价类,$g = G_i^2 \times (G_i^2 \circ f)$,若 $\theta_1\left\{\theta_2(u, v)\right\} \in G_i^2 \circ f (u, v \in G_i^2 \circ f)$,则 $g \circ f \subseteq g$•

证明　取任意的 $(x, y, u) \in g \circ f$,由定义知,存在 $z \in G, u_1(z), u_2(z) \in W$,使得 $(x, z, u_1(z)) \in g, (z, y, u_2(z)) \in f, u = \theta_1\left\{\theta_2(u_1(z), u_2(z))\right\}$,再由 $g = G_i^2 \times (G_i^2 \circ f)$ 可知,$u_1(z) \in G_i^2 \circ f, x, z \in G_i$,又由 $G_i \subseteq G(d\delta)$ 可知,$y \in G_i$,于是 $u_2(z) \in G_i^2 \circ f$,从而 $u \in G_i^2 \circ f$,因此 $(x, y, u) \in G_i^2 \times (G_i^2 \circ f) = g, g \circ f \subseteq g$•

定理 9　设 $f \subseteq G^2 \times W, g \subseteq G \times W$,如果 $g \circ f = g$,则对任意的 $(x, w) \in g$,存在 $y \in G$,使得 $(y, w) \in g, (y, x, w) \in f$ 同时成立•

证明　若对某个 $(x, w) \in g$,对任意的 $y \in G$ 都有 $(y, w) \in g, (y, x, w) \in f$ 不能同时成立,这时显然有 $(x, \omega) \notin g \circ f, g \neq g \circ f$,这与 $g \circ f = g$ 矛盾•

3　泛权网场结合的逻辑守恒性与 ANN 中的均场模型

在随机神经网络中,输入样本以及神经网络中的每个神经元状态都是随机的,网络的稳定是用概率来描述的•

设 G 表示神经元集合,W 表示输入输出空间,则从状态到输出空间的输出可以描述为 $g \subseteq G \times W$,前后向传播可以表示为 $f \subseteq G^2 \times W$,网络的稳定可以描述为寻找相关的 $g \subseteq G \times W, f \subseteq G^2 \times W$,使得 $g \circ f = g$•

另外,在随机泛函分析中,随机不动点理论的研究也是一种网场结合•　许多随机积分方程、随机微分方程和随机算子方程解的存在性研究,往往引导到在各类函数空间中研究随机不动点的存在性问题•　在那里明显地需要许多较苛刻的条件,例如,一般都要求在 Polish 空间(即可分完备的度量空间)中进行讨论•　在泛权网场的结合中,不动点(在随机泛函分析中实为一映射)变为一个相对不动的子集或关系(一个泛权场),但是条件大大放宽,解除了诸如连续性、完备性、可测性等限制,是一种离散结构分析•　特别是,在随机泛函分析中,不动点问题化归为这里的复合运算的,相当于在定义中 $u_1(t) = u_2(t), u = u(t)$ 的特殊情形•　由此可见,这里所讨论和研究的泛权网场的逻辑守恒性具有很强的通用性•

此外,各种图、场、网络都是泛权网场的一种具体的基础研究,为泛权网场的研究提供了很强的数学基础•

4 结束语

本文引进了泛权网场的一组基本概念和定义,得到了几个定理,将这些概念与神经网络中的某些模型以及泛函分析中的随机模型进行了对照性的讨论和研究,指出了泛权网场是分析各种专题如ANN 模型中的一定的问题的有用工具•

[参 考 文 献]

[1] 吴学谋. 泛系理论与数学方法[M]. 南京: 江苏教育出版社, 1990.

[2] 吴学谋. 从泛系观看世界[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1990.

[3] 吴陈, 覃国光. 泛系生克自动机及其在可分离动态对策中的应用[J]. 华东船舶工业学院学报, 1994, **8**(4): 1~ 6.

The Logic Conservation of Compositions Between Panweighted Networks and Panweighted Fields and Their Application in ANN

Wu Chen

(Department of Computer Science and Engineering, East China Shipbuilding Institute, Zhenjiang, Jiangsu 212003, P R China)

Abstract: In the paper several definitions of composing panweighted networks and panweighted fields are given, a group of theorems about the logic conservation of compositions between panweighted networks and panweighted fields are proved. By combining the average field model, the future application of panweighted networks and panweighted fields in ANN is discussed.

Key words: pansystems methodology; artificial neural network (ANN); systems theory