应用数学和力学,第 20 卷 第 6 期(1999 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 06_0551_08

Banach 空间中增生型变分包含解的 Mann 和 Ishikawa 迭代逼近*

张石生

(四川大学 数学系, 成都 610064)

摘要: 本文引入和研究 Banach 空间中一类增生型变分包含解的存在性及其 Mann 和 Ishikawa 迭代程序的收敛性问题• 本文结果是张石生, 丁协平, Hassouni, Kazmi, Siddiqi, Zeng 的相应结果的改进和推广•

关 键 词: 变分包含; 增生映象; Mann 迭代序列; Ishikawa 迭代序列
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

本文以下设 X 是一实 Banach 空间, X^* 是其对偶空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表 X 与 X^* 间的配对, $D(T)$, $R(T)$ 分别表映象 T 的定义域和值域•

设 $T, A: X \to X$, $g: X \to X^*$ 是三个映象, $\varphi: X^* \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 为真凸的下半连续泛函• 所谓的 Banach 空间中的变分包含问题 $V_{\mathrm{VIP}}(T, A, g, \varphi)$ 是对给定的 $f \in X$, 求 $u \in X$ 使得

$$\begin{cases} g(u) \in D(\partial\varphi), \\ \langle Tu - Au - f, v - g(u)\rangle \geqslant \varphi(g(u)) - \varphi(v), \quad \forall v \in X^*, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\partial\varphi$ 表 φ 的次微分•

现考虑 $V_{\mathrm{VIP}}(T, A, g, \varphi)(1)$ 的某些特殊情形:

1. 当 X 是 Hilbert 空间 H 时, 则(1) 等价于对给定的 $f \in H$, 求 $u \in X$, 使得

$$\begin{cases} g(u) \in D(2\varphi), \\ \langle Tu - Au - f, v - g(u)\rangle \geqslant \varphi(g(u)) - \varphi(v), \quad \forall v \in H, \end{cases} \tag{2}$$

(2) 称为 Hilbert 空间中的变分包含问题, 它曾在 Hassouni_Moudafi[1], Ding[2, 3], Chang[4, 5] Kazmi[6], Zeng[7] 中研究过•

2. 当 X 是 Hilbert 空间 H, 而 $\varphi = \delta_K$ 时, 这里 K 是 H 中之一非空闭凸集, δ_K 是 K 的指示函数, 即

$$\delta_K(x) = \begin{cases} 0, & x \in K, \\ +\infty, & x \notin K• \end{cases}$$

则变分包含问题(1) 等价于: 对给定的 $f \in H$, 求 $u \in K$, 使得

---

* 来稿日期: 1998_02_20
基金项目: 国家自然科学基金资助课题(19971058)
作者简介: 张石生(1934~), 男, 教授.

$$\begin{cases} g(u) \in K, \\ \langle Tu - Au - f, v - g(u) \rangle \geqslant 0, \quad \forall v \in K. \end{cases} \tag{3}$$

(3) 称为强非线性拟变分不等式问题, 它曾在 Noor[8, 9], Siddiqi 等[10, 11] 中研究过.

本文的目的是在 Banach 空间的框架下引入和研究一类增生型变分包含解的存在性唯一性及其 Mann 和 Ishikawa 迭代程序的收敛性问题. 本文结果改进和推广了 Ding[2, 3], Chang[4, 5], Hassouni_Moudafi[1], Kazmi[6], Siddqi 等[10, 11] 及 Zeng[7] 中的相应结果.

1 预 备 知 识

映象 $J: X \to 2^{X^*}$ 称为正规对偶映象, 如果

$$J(x) = \left\{ f \in X^* : \langle x, f \rangle = \|x\| \cdot \|f\|, \ \|f\| = \|x\| \right\}, \qquad x \in X.$$

对任一 $x \in X$, 由 Hahn_Banach 定理知 $J(x) \neq \varnothing$, 故 $D(J) = X$. 对任一 $f \in J(x)$ 称为 x 的支撑泛函. 设 $x_0 \in S_X = \{ x \in X : \|x\| = 1 \}$, 如果在 x_0 处有唯一的支撑泛函, 则称 X 在 x_0 处是光滑的. 如果 X 在 S_X 的每一点处有唯一的支撑泛函, 则称 Banach 空间 X 是光滑的.

Banach 空间 X 称为一致光滑的, 如果其光滑模 $\rho_X(\tau)$:

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{ \frac{1}{2}(\|x + y\| + \|x - y\|) - 1 : x, y \in X, \ \|x\| = 1, \ \|y\| \leqslant \tau \right\}$$

$\tau > 0$, 满足条件: $\rho_X(\tau)/\tau \to 0 \ (\tau \to 0)$.

由前述定义, 易知下列结论成立:

命题 1.1[12] 设 X 是一实 Banach 空间, 则

1) X 是光滑的 $\Leftrightarrow J$ 是单值的 $\Leftrightarrow J$ 是强_弱* 连续;

2) X 是一致光滑的, 则 X 是光滑的自反 Banach 空间, 而且 J 是单值的并在 X 的任一有界集上是一致连续的.

定义 1.1 映象 $T: D(T) \subset X \to X$ 称为增生的, 如果对任给的 $x, y \in D(T)$, 存在 $j(x - y) \in J(x - y)$ 使得

$$\langle Tx - Ty, j(x - y) \rangle \geqslant 0;$$

映象 $T: D(T) \subset X \to X$ 称为强增生的, 如果存在常数 $k \in (0, 1)$ 使得 $\forall x, y \in D(T)$ 存在 $j(x - y) \in J(x - y)$ 满足

$$\langle Tx - Ty, j(x - y) \rangle \geqslant k \cdot \|x - y\|^2,$$

上式中的 k 称为 T 的强增生常数.

命题 1.2 设 X 是一实的光滑的 Banach 空间, $T: X \to X$ 是一强增生映象, $k \in (0, 1)$ 为其强增生常数, 设 $S: X \to X$ 是一增生映象, 则 $T + S: X \to X$ 也是一具强增生常数 k 的强增生映象.

证明 因 X 是光滑的, 由命题 1.1 知正规对偶映象 $J: X \to 2^{X^*}$ 是单值的, 于是对任意的 $x, y \in X$ 有

$$\langle (T + S)x - (T + S)y, J(x - y) \rangle = \langle Tx - Ty, J(x - y) \rangle + \\ \langle Sx - Sy, J(x - y) \rangle \geqslant k \cdot \|x - y\|^2.$$

结论得证.

以后我们还需用到下面的引理.

引理 1.1[13] 设 X 是一实 Banach 空间, 则对任意的 $x, y \in X$, 下面的不等式成立:

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2+2\langle y, j(x+y)\rangle, \qquad \forall j(x+y)\in J(x+y).$$

引理 1.2[14] 设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$是三个非负实数列, 满足条件: 存在 n_0, 当 $n\geqslant n_0$ 时

$$a_{n+1}\leqslant(1-t_n)a_n+b_n+c_n,$$

其中 $t_n\in(0,1)$, $\sum_{n=0}^{\infty}t_n=+\infty$, $b_n=o(t_n)$, $\sum_{n=0}^{\infty}c_n<+\infty$. 则 $a_n\to 0(n\to+\infty)$.

引理 1.3 设 X 是一实的自反 Banach 空间, 则下列结论等价:

(i) $x^*\in X$ 是变分包含问题(1) 的解;

(ii) $x^*\in X$ 是映象 $S: X\to 2^X$:

$$S(x)=f-(Tx-Ax+\partial\varphi(g(x)))+x$$

的不动点;

(iii) $x^*\in X$ 是方程 $f\in Tx-Ax+\partial\varphi(g(x))$ 的解.

证明(i)⇒(iii) 设 $x^*\in X$ 是变分包含问题(1) 的解, 故 $g(x^*)\in D(\partial\varphi)$ 且

$$\langle Tx^*-Ax^*-f, v-g(x^*)\rangle\geqslant\varphi(g(x^*))-\varphi(v), \qquad \forall v\in X^*.$$

于是由 φ 的次微分 $\partial\varphi$ 的定义, 由上式得知

$$f+Ax^*-Tx^*\in\partial\varphi(g(x^*)), \tag{4}$$

即 x^* 是方程 $f\in Tx-Ax+\partial\varphi(g(x))$ 的解.

(iii) ⇒(ii). 在(4) 两端加上 x^*, 即得

$$x^*\in f-(Tx^*-Ax^*+\partial\varphi(g(x^*)))+x^*=Sx^*. \tag{5}$$

故 x^* 是 S 的不动点.

(ii) ⇒(i). 由(5) 即得 $f-(Tx^*-Ax^*)\in\partial\varphi(g(x^*))$, 故由 $\partial\varphi$ 的定义得知

$$\varphi(v)-\varphi(g(x^*))\geqslant\langle f-(Tx^*-Ax^*), v-g(x^*)\rangle, \qquad \forall v\in X^*$$

即

$$\langle Tx^*-Ax^*-f, v-g(x^*)\rangle\geqslant\varphi(g(x^*))-\varphi(v), \qquad \forall v\in X^*.$$

故 x^* 是变分包含问题(1) 的解. 证毕.

2 主 要 结 果

定理 2.1 设 X 是实的一致光滑的 Banach 空间, T, $A: X\to X$, $g: X\to X^*$ 是 3 个连续的映象, 而 $\varphi: X^*\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$是具连续的 Gâteaux 微分 $\partial\varphi$ 的泛函, 且满足下面的条件:

(i) $T-A: X\to X$ 是具强增生常数 $k\in(0,1)$ 的强增生映象;

(ii) $\partial\varphi\circ g: X\to X$ 是增生的.

对任给的 $f\in X$, 定义映象 $S: X\to X$ 如下:

$$Sx=f-(Tx-Ax+\partial\varphi(g(x)))+x,$$

如果 S 的值域 $R(S)$ 有界, 则对任给的 $x_0\in X$, 由下式定义的 Ishikawa 迭代序列$\{x_n\}$:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1}&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Sy_n,\\ y_n&=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Sx_n,\end{aligned}\right\}\quad n=0,1,2,\cdots \tag{6}$$

强收敛于变分包含(1) 的唯一解, 其中$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$是[0, 1] 中的序列, 满足条件:

$$\alpha_n\to 0,\ \beta_n\to 0,\ \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty. \tag{7}$$

证明 因 X 是一致光滑的, 由命题 1.1 知, X 是光滑的自反 Banach 空间, 且正规对偶映象 J 是单值的.

1) 先证变分包含(1)存在唯一解•

由条件(i)、(ii)及命题1.2,映象$T-A+\partial\varphi\circ g: X\to X$是具强增生常数$k\in(0,1)$的强增生的连续映象• 于是由Morales[15]知$T-A+\partial\varphi\circ g$是满射的• 故对任给的$f\in X$,方程$f=(T-A+\partial\varphi\circ g)(x)$在$X$中有解$x^*$• 由于$X$是一致光滑的,故$X$是自反的,于是由引理1.3知这一$x^*$是变分包含(1)的解,且$x^*$也是映象$S$的不动点,即$x^*=Sx^*$•

下证x^*是变分包含(1)在X中的唯一解• 设不然$u^*\in X$也是(1)的解,因而u^*也是S的不动点,于是有

$$\begin{aligned}\|x^*-u^*\|^2&=\langle x^*-u^*, J(x^*-u^*)\rangle=\langle Sx^*-Su^*, J(x^*-u^*)\rangle=\\&\langle f-(T-A+\partial\varphi\circ g)(x^*)+x^*-(f-(T-A+\partial\varphi\circ g)(u^*)+\\&u^*, J(x^*-u^*))\rangle=\\&\|x^*-u^*\|^2-\langle (T-A+\partial\varphi\circ g)(x^*)-(T-\\&A+\partial\varphi\circ g)(u^*), J(x^*-u^*)\rangle\leqslant\\&\|x^*-u^*\|^2-k\|x^*-u^*\|^2,\end{aligned}$$

因$k\in(0,1)$,由上式即得$\|x^*-u^*\|^2=0$,故$x^*=u^*$,从而得证x^*是变分包含(1)的唯一解•

2) 现证Ishikawa迭代序列$x_n\to x^*$•

由假设: S的值域$R(S)$有界• 令

$$M=\sup\left\{\|Sx-x^*\|+\|x_0-x^*\|: x\in X\right\}• \tag{8}$$

下证对一切n, $n=0,1,2,\cdots$

$$\|x_n-x^*\|\leqslant M,\quad \|y_n-x^*\|\leqslant M• \tag{9}$$

事实上,当$n=0$时,由(8)知$\|x_0-x^*\|\leqslant M$,于是有

$$\begin{aligned}\|y_0-x^*\|&=\|(1-\beta_n)(x_0-x^*)+\beta_n(Sx_0-x^*)\|\leqslant\\&(1-\beta_n)\|x_0-x^*\|+\beta_n\|Sx_0-x^*\|\leqslant M•\end{aligned}$$

设(9)对$n=k\geqslant 0$成立,于是当$n=k+1$时有

$$\begin{aligned}\|x_{k+1}-x^*\|&=\|(1-\alpha_k)(x_k-x^*)+\alpha_k(Sy_k-x^*)\|\leqslant\\&(1-\alpha_k)\|x_k-x^*\|+\alpha_k\|Sy_k-x^*\|\leqslant M,\\ \|y_{k+1}-x^*\|&=\|(1-\beta_{k+1})(x_{k+1}-x^*)+\beta_{k+1}(Sx_{k+1}-x^*)\|\leqslant\\&(1-\beta_{k+1})\|x_{k+1}-x^*\|+\beta_{k+1}\|Sx_{k+1}-x^*\|\leqslant M•\end{aligned}$$

故(9)得证•

另因正规对偶映象J是单值的,于是由(6)及引理1.1有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2&=\|(1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(Sy_n-x^*)\|^2\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle Sy_n-x^*, J(x_{n+1}-x^*)\rangle=\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle Sy_n-x^*, J(y_n-x^*)\rangle+\\&2\alpha_n\langle Sy_n-x^*, J(x_{n+1}-x^*)-J(y_n-x^*)\rangle•\end{aligned}\tag{10}$$

现考虑(10)右端第2项:

$$\begin{aligned}\langle Sy_n-x^*, J(y_n-x^*)\rangle&=\langle Sy_n-Sx^*, J(y_n-x^*)\rangle=\\&\langle f-(T-A+\partial\varphi\circ g)(y_n)+y_n-(F-(T-A+\partial\varphi\circ g)(x^*)+\\&x^*, J(y_n-x^*))\rangle=\end{aligned}$$

$$\|y_n - x_*\|^2 - \langle (T - A + \partial\varphi\circ g)(y_n) - (T - A + \partial\varphi\circ g)(x^*), J(y_n - x^*)\rangle \leqslant (1-k)\|y_n - x_*\|^2$$

(因 $T - A + \partial\varphi\circ g$ 是具强增生常数 $k\in(0,1)$ 的强增生映象)。

另由(6)及引理 1.1 有

$$\|y_n - x_*\|^2 = \|(1-\beta_n)(x_n - x^*) + \beta_n(Sx_n - x^*)\|^2 \leqslant (1-\beta_n)^2\|x_n - x^*\|^2 + 2\beta_n\langle Sx_n - x^*, J(y_n - x_*)\rangle \leqslant \|x_n - x^*\|^2 + 2\beta_n\|Sx_n - x^*\|\cdot\|y_n - x^*\| \leqslant \|x_n - x^*\|^2 + 2\beta_n M^2.$$

把上式代入前一式得

$$\langle Sy_n - x^*, J(y_n - x^*)\rangle \leqslant (1-k)\left\{\|x_n - x^*\|^2 + 2\beta_n M^2\right\}. \tag{11}$$

现考虑(10)右端第 3 项, 令

$$e_n = |\langle Sy_n - x^*, J(x_{n+1} - x^*) - J(y_n - x^*)\rangle| \leqslant M\cdot\|J(x_{n+1} - x^*) - J(y_n - x^*)\|.$$

因

$$x_{n+1} - x^* - (y_n - x^*) = x_{n+1} - y_n = (\beta_n - \alpha_n)x_n + \alpha_n Sy_n - \beta_n Sx_n. \tag{12}$$

又因 $\{x_n\}$、$\{Sy_n\}$、$\{Sx_n\}$ 均有界, 而 $\alpha_n\to 0$、$\beta_n\to 0(n\to\infty)$, 于是由(12)知

$$x_{n+1} - x^* - (y_n - x^*) \to 0 \quad (n\to\infty).$$

故由 J 的一致连续性, 知 $\|J(x_{n+1} - x^*) - J(y_n - x^*)\|\to 0(n\to\infty)$, 于是得知

$$e_n \to 0. \tag{13}$$

从而由(10)、(11)和(13)得知

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leqslant [(1-\alpha_n)^2 + 2\alpha_n(1-k)]\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n[(1-k)\cdot 2\beta_n M^2 + e_n] = (1+\alpha_n^2 - 2\alpha_n k)\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n[(1-k)2\beta_n M^2 + e_n] = [1-\alpha_n k + \alpha_n(\alpha_n - k)]\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n[(1-k)2\beta_n M^2 + e_n]. \tag{14}$$

因 $\alpha_n\to 0(n\to\infty)$, 故存在 n_0, 当 $n\geqslant n_0$ 时 $\alpha_n < k$。 于是当 $n\geqslant n_0$ 时, 由(14)可得

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leqslant (1-\alpha_n k)\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n[(1-k)2\beta_n M^2 + e_n]. \tag{15}$$

令

$$\|x_n - x^*\|^2 = a_n,\ \alpha_n k = t_n,\ 2\alpha_n[(1-k)2\beta_n M^2 + e_n] = b_n,$$

$c_n = 0$。 故(15)可写成

$$a_{n+1} \leqslant (1-t_n)a_n + b_n,$$

并且 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$、$\{t_n\}$ 满足引理 1.2 中的条件, 故 $a_n\to 0$, 即 $x_n\to x^*(n\to\infty)$。

定理证毕。

在定理 2.1 中如果 $\beta_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 因而 $y_n = x_n$, $\forall n\geqslant 0$, $x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Sx_n$, $n\geqslant 0$。 故有下面的结果。

定理 2.2 设 X、T、A、φ、S、g 满足定理 2.1 中的条件, 则对任给的 $f\in X$, 变分包含(1)在 X 中存在唯一解, 而且对任给的 $x_0\in X$, 由下式定义的 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$:

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Sx_n, \qquad n\geqslant 0 \tag{16}$$

强收敛于变分包含(1)的唯一解，上式中的$\{\alpha_n\}$满足定理2.1中的条件．

定理2.3 设X是一实Banach空间，$T, A: X\to X$是两个一致连续的映象，$g: X\to X^*$是任一映象，且$T-A$是具强增生常数$k\in(0,1)$的强增生映象，对任给的$f\in X$，定义映象$S: X\to X$如下：

$$S(x)=f-(T-A)(x)+x. \tag{17}$$

如果S的值域有界，则对任给的$x_0\in X$，由下式定义的Ishikawa迭代序列$\{x_n\}$：

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Sy_n,\\ y_n&=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Sx_n,\end{aligned}\qquad n\geqslant 0$$

强收敛于变分不等式

$$\langle Tx-Ax-f, v-g(x)\rangle\geqslant 0,\qquad \forall v\in X \tag{18}$$

的唯一解，其中$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$是满足定理2.1中条件的序列．

证明 因$T-A: X\to X$是一致连续的强增生映象，故$T-A$是满射的．故对任给的$f\in X$，方程$f=(T-A)x$在X中存在唯一解x^*．因而x^*是S在X中的唯一不动点．另外易知x^*也是变分不等式(18)的唯一解．

因S的值域有界，令

$$M=\sup\{\|Sx-x^*\|+\|x_0-x^*\|: x\in X\}.$$

仿定理2.1的证明，一样可证

$$\|x_n-x^*\|\leqslant M,\quad \|y_n-x^*\|\leqslant M,\qquad \forall n\geqslant 0.$$

于是由引理1.1，对任意的$j(x_{n+1}-x^*)\in J(x_{n+1}-x^*)$有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2&=\|(1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(Sy_n-x^*)\|^2\leqslant\\ &(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle Sy_n-x^*, j(x_{n+1}-x^*)\rangle=\\ &(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle Sx_{n+1}-x^*, j(x_{n+1}-x^*)\rangle+\\ &+2\alpha_n\langle Sy_n-Sx_{n+1}, j(x_{n+1}-x^*)\rangle.\end{aligned} \tag{19}$$

现考虑(19)中的第2项．

$$\begin{aligned}\langle Sx_{n+1}-x^*, j(x_{n+1}-x^*)\rangle&=\langle Sx_{n+1}-Sx^*, j(x_{n+1}-x^*)\rangle=\\ &\langle f-(T-A)(x_{n+1})+x_{n+1}-(f-(T-A)(x^*)+x^*), j(x_{n+1}-x^*)\rangle=\\ &\|x_{n+1}-x^*\|^2-\langle(T-A)(x_{n+1})-(T-A)(x^*), j(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant\\ &(1-k)\|x_{n+1}-x^*\|^2.\end{aligned} \tag{20}$$

现考虑(19)中右端第3项．令

$$h_n=|\langle Sy_n-Sx_{n+1}, j(x_{n+1}-x^*)\rangle|,$$

于是有

$$h_n\leqslant M\cdot\|Sy_n-Sx_{n+1}\|. \tag{21}$$

因

$$\begin{aligned}y_n-x_{n+1}&=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Sx_n-(1-\alpha_n)x_n-\alpha_n Sy_n=\\ &(\alpha_n-\beta_n)x_n+\beta_n Sx_n+\alpha_n Sy_n.\end{aligned}$$

由于$\{x_n\}$、$\{Sx_n\}$、$\{Sy_n\}$均有界且$\alpha_n\to 0$、$\beta_n\to 0$，故$y_n-x_{n+1}\to 0(n\to\infty)$．因$T$和$A$一致连续，故$S$也一致连续．从而有$Sy_n-Sx_{n+1}\to 0(n\to\infty)$，这就证明了

$$h_n\to 0\qquad(n\to\infty). \tag{22}$$

由(19)~(20)、(22)得知

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2 \leqslant (1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2 + 2\alpha_n(1-k)\|x_{n+1}-x^*\|^2+2\alpha_n h_n.$$

化简得

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2 \leqslant \frac{(1-\alpha_n)^2}{1-2\alpha_n(1-k)}\|x_n-x^*\|^2+\frac{2\alpha_n h_n}{1-2\alpha_n(1-k)}. \tag{23}$$

因 $\dfrac{(1-\alpha_n)^2}{1-2\alpha_n(1-k)} = 1-\dfrac{2k-\alpha_n}{1-2\alpha_n(1-k)}\alpha_n;$

又因 $(2k-\alpha_n)/(1-2\alpha_n(1-k)) \to 2k\ (n\to\infty)$, 故存在 n_1, 当 $n \geqslant n_1$ 时

$$\frac{2k-\alpha_n}{1-2\alpha_n(1-k)} > k,$$

于是当 $n\geqslant n_1$ 时, 由(23)得知

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2 \leqslant (1-k\alpha_n)\|x_n-x^*\|^2+\frac{2\alpha_n h_n}{1-2\alpha_n(1-k)}.$$

令 $\|x_n-x^*\|^2 = a_n,\ k\alpha_n = t_n,\ b_n = 2\alpha_n h_n/(1-2\alpha_n(1-k)),\ c_n = 0$, 故有

$$a_{n+1} \leqslant (1-t_n)a_n + b_n, \qquad \forall n \geqslant n_1.$$

并且满足引理 1.2 中的条件, 从而得知 $\alpha_n \to 0\ (n\to\infty)$, 即 $x_n \to x^*\ (n\to\infty)$. 证毕.

参 考 文 献

[1] Hassouni A, Moudafi A. A perturbed algorithm for variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1994, **185**(3): 706~721.

[2] Ding Xieping. Perturbed proximal point algorithms for generalized quasivariational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1997, **210**(1): 88~101.

[3] Ding Xieping. Generalized strongly nonlinear guasivariational inegualities[J]. J Math Anal Appl, 1993, **173**(2): 577~587.

[4] Chang S S, Yuan X Z, Wang F. The study of algorithms and convergence for generalized multi_valued quasivariational inclusions[J]. Topological Methods in Nonlinear Anal, (in print).

[5] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及应用[M]. 上海: 上海科技文献出版社, 1991.

[6] Kazmi K R. Mann and Ishikawa type perturbed iterative algorithms for generalized quasivariational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**(2): 572~584.

[7] Zeng L C. Iterative algorithms for finding approximate solutions for general strongly nonlinear variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1994, **187**(2): 352~360.

[8] Noor M A. General variational inequalities[J]. Appl Math Lett, 1998, **1**(2): 119~122.

[9] Noor M A. An iterative algorithm for variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1991, **158**(3): 448~455.

[10] Siddiqi A H, Ansari Q H. General strongly nonlinear variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1992, **166**(2): 386~392.

[11] Siddiqi A H. Ansari Q H, Kazmi K R. On nonlinear variational inequalities[J]. Indian J Pure Appl Math, 1994, **25**(4): 969~973.

[12] 游兆永, 龚怀云, 徐宗本. 非线性分析[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991.

[13] Chang S S. On Chidume' s open questions and approximate solutions for multi_valued strongly accretive mapping equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **216**(1): 94~111.

[14] Liu L S. Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in

Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1995, **194**(1): 114~ 125.
[15] Morales C. Surjectivity theorems for multi_valued mappings of accretive type[J]. Comment Math Univ Carolina, 1985, **26**.

On the Mann and Ishikawa Iterative Approximation of Solutions to Variational Inclusions with Accretive Type Mappings in Banach Spaces

Zhang Shisheng
(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P R China)

Abstract: The purpose of this paper is to introduce and study the existence of solutions and convergence of Mann and Ishikawa iterative processes for a class of variational inclusions with accretive type mappings in Banach spaces. The results presented in this paper extend and improve the corresponding results by Chang, Ding, Hassouni, Kazmi, Siddiqi, Zeng, et al.

Key words: variational inclusion; accretive mapping; Mann iterative sequence; Ishikawa iterative sequence