应用数学和力学, 第 20 卷 第 6 期(1999 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 06_0592_05

变质量完整力学系统的 Lie 对称与守恒量

梅凤翔[1]

(北京理工大学 应用力学系, 北京 100081)

(黄永念推荐)

摘要: 研究变质量完整系统的 Lie 对称和守恒量 利用常微分方程在无限小变换下的不变性建立系统 Lie 对称的确定方程 给出结构方程和守恒量 举例说明结果的应用

关 键 词: 分析力学; 变质量; Lie 对称; 守恒量
中图分类号: O316 文献标识码: A

前 言

由于空间技术以及其它工业技术的发展, 变质量系统动力学的研究显得越来越重要 人们建立了变质量系统的运动微分方程[1~3], Hamilton 原理[3,4], Noether 理论[5]等 自 70 年代末对常质量力学系统的 Lie 对称研究取得重要进展[6] 本文考虑变质量完整系统的 Lie 对称, 建立 Lie 对称的确定方程, 并给出结构方程和守恒量 研究两类问题: 由 Lie 对称求守恒量; 由已知积分求 Lie 对称

1 系统的运动方程

研究 N 个质点的力学系统, 在时刻 t, 第 i 个质点的质量为 $m_i(i = 1, \quad, N)$; 在时刻 $t + \mathrm{d}t$, 由质点分离(或并入) 的微粒的质量为 $\mathrm{d}m_i$ 设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \quad, n)$ 来确定并设[1]

$$m_i = m_i(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) \tag{1}$$

运动方程可表为[2]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{L}{q_s} - \frac{L}{q_s} = Q_s + P_s \qquad (s = 1, \quad, n), \tag{2}$$

其中 L 为系统的 Lagrange 函数, Q_s 为非势广义力, P_s 为广义反推力, 有[1,2]

$$P_s = {}_{i=1}^{N}\left\{(\boldsymbol{R}_i + m_i\boldsymbol{r}_i)\quad\frac{\boldsymbol{r}_i}{q_s} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}_i\quad\boldsymbol{r}_i\frac{m_i}{q_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_i\quad\boldsymbol{r}_i\frac{m_i}{q_s}\right)\right\}, \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{r}_i$、$\boldsymbol{r}_i$ 分别为第 i 个质点的矢径和速度, 而

$$\boldsymbol{R}_i = \frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_i, \tag{4}$$

收稿日期: 1997_09_05; 修订日期: 1998_11_08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19572018)
作者简介: 梅凤翔(1938~) , 男, 教授, 博导, 科技学院学术委员会主任, 北京理工大学学报主编.

$\boldsymbol{u}_i$ 为微粒相对第 i 个质点的速度

将方程(2)展开,可求出所有广义加速度[7],记作

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{5}$$

2　Lie 对称正问题

引入无限小变换

$$t^* = t + \Delta t,\ q_s^* = q_s + \Delta q_s \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{6}$$

或其展开式

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}),\ q_s^* = q_s + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{7}$$

取无限小变换生成元向量

$$\boldsymbol{X}^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} \tag{8}$$

和它的一次扩展

$$\boldsymbol{X}^{(1)} = \boldsymbol{X}^{(0)} + \sum_{s=1}^{n}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{9}$$

方程(5)在无限小变换(7)下的不变性归为如下确定方程

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\alpha_s = \boldsymbol{X}^{(1)}(\alpha_s) \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{10}$$

如果无限小变换生成元 ξ_0、ξ_s 满足方程(10),则称变换是系统的Lie对称变换　我们有

命题　对于满足确定方程(10)的生成元 ξ_0、ξ_s,如果存在满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + \boldsymbol{X}^{(1)}(L) + \sum_{s=1}^{n}(Q_s + P_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \tag{11}$$

的规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$,则变质量完整系统有如下形式的守恒量

$$I = L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \mathrm{const} \tag{12}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = {} & \dot{L}\xi_0 + L\dot{\xi}_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + \sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \\ & L\dot{\xi}_0 - X^{(1)}(L) - \sum_{s=1}^{n}(Q_s + P_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = \\ & \sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s - P_s\right) = 0\end{aligned}$$

对常质量完整系统,上述命题给出文献[6]的一个结果

Lie对称正问题的解法如下:首先,对给定的变质量完整系统建立确定方程(10),并求出生成元 ξ_0、ξ_s;其次,将生成元代入结构方程(11)求得 $\dot{G}$,如果 $\dot{G}$ 为零或为某函数的全导数,则可求出规范函数 G;最后,将所得 ξ_0、ξ_s、G 代入式(12)可求得Lie对称的守恒量

3　Lie 对称逆问题

假设系统有积分

$$I = I(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \mathrm{const} \tag{13}$$

将其对 t 求导数,得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial I}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)=0 \tag{14}$$

将方程(2)两端乘以

$$\bar{\xi}_s=\xi_s-\dot{q}_s\xi_0, \tag{15}$$

并对 s 求和, 得到

$$\sum_{s=1}^{n}\bar{\xi}_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}-Q_s-P_s\right)=0 \tag{16}$$

由式(3)知 P_s 在一般情形对 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 是线性的, 记作

$$P_s=\sum_{k=1}^{n}W_{sk}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}_k+W_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{17}$$

其中

$$W_{sk}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_k}(\boldsymbol{u}_i+\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial^2 m_i}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_k}\right\} \tag{18}$$

如果

$$\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}=0\qquad(i=1,\cdots,N;\ s=1,\cdots,n), \tag{19}$$

则有

$$W_{sk}=0 \tag{20}$$

将式(14)、(16)相加, 分出含 $\ddot{q}_k$ 的项, 令其系数为零, 得到

$$-\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k}+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}-W_{sk}\right)\bar{\xi}_s=0 \tag{21}$$

假设

$$\det(h_{sk})=\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}-W_{sk}\right)\neq 0, \tag{22}$$

则由方程(21)解得

$$\bar{\xi}_s=\sum_{k=1}^{n}h^{sk}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k}, \tag{23}$$

其中

$$h^{sk}h_{kr}=\delta_{sr} \tag{24}$$

令积分(13)等于守恒量(12), 即

$$L\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s+G=I \tag{25}$$

这样, 由式(23)、(25)在给定规范函数 G 下可求出无限小变换生成元 ξ_0、ξ_s, 而这生成元对应于变质量完整系统的Noether对称变换

将所得生成元 ξ_0、ξ_s 代入确定方程(10), 如果它们满足, 就得到系统的Lie对称变换; 否则, 变换不是Lie对称的, 即没有与已知积分相应的Lie对称

Lie对称逆问题的解法如下: 首先, 由已知积分(13)按式(23)、(25)求出Noether对称生成元 ξ_0、ξ_s; 其次, 将 ξ_0、ξ_s 代入方程(10)验证它们是否满足 但是, 逆问题可能没有解

4 算 例

研究一个变质量质点, 其质量为

$$m = m_0 e^{- \quad t} \qquad (m_0 = \text{const}, \quad = \text{const}, \quad > 0), \tag{26}$$

Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} m(t)(q_1^2 + q_2^2), \tag{27}$$

非势广义力为

$$Q_1 = Q_1(t, q_1, q_1, q_2), Q_2 = q_2 + q_1 q_1 \tag{28}$$

微粒分离的绝对速度为零, 即

$$\boldsymbol{u} = - \boldsymbol{r} = - q_1 \boldsymbol{i} - q_2 \boldsymbol{j} \tag{29}$$

试研究系统的 Lie 对称性和守恒量

首先, 研究正问题　由式(3)、(4)、(29)知

$$P_1 = P_2 = 0 \tag{30}$$

方程(2)给出

$$(mq_1) = Q_1, \ (mq_2) = q_2 + q_1 q_1 \tag{31}$$

由方程(31)得到广义加速度, 有

$$q_1 = q_1 + \frac{Q_1}{m}, \ q_2 = q_2 + \frac{1}{m}(q_2 + q_1 q_1) \tag{32}$$

确定方程(10)给出

$$\left.\begin{aligned} & {}_1 - q_1 {}_0 - 2 {}_0\left(q_1 + \frac{Q_1}{m}\right) = {}_0 \frac{}{t}\left(\frac{Q_1}{m}\right) + {}_1 \frac{}{q_1}\left(\frac{Q_1}{m}\right) + \\ & \quad ({}_1 - q_1 {}_0)\left[\frac{}{q_1}\left(\frac{Q_1}{m}\right) + \quad \right] + ({}_2 - q_2 {}_0)\frac{}{q_2}\left(\frac{Q_1}{m}\right), \\ & {}_2 - q_2 {}_0 - 2 {}_0\left[q_2 + \frac{1}{m}(q_2 + q_1 q_1)\right] = {}_0\left(1 - \frac{1}{m^2}\frac{m}{t}\right)(q_2 + q_1 q_1) + \\ & \quad \frac{1}{m} q_1 {}_1 + \frac{1}{m} q_1 ({}_1 - q_1 {}_0) + \left(\frac{1}{m} + \quad \right)({}_2 - q_2 {}_0) \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

方程(33)有如下解

$$ {}_1 = q_1 {}_0, \quad {}_2 = 1 + q_2 {}_0 \qquad ({}_0\text{任意}) \tag{34}$$

结构方程(11)给出

$$L {}_0 + L {}_0 + q_2 + q_1 q_1 + G = 0, \tag{35}$$

由此求得规范函数

$$G = - L {}_0 - q_2 - \frac{1}{2} q_1^2, \tag{36}$$

守恒量(12)成为

$$I = m(t) q_2 - q_2 - \frac{1}{2} q_1^2 = \text{const} \tag{37}$$

其次, 研究逆问题　假设系统有积分(37), 求相应的 Lie 对称　公式(23)、(25)给出

$$\left.\begin{aligned} & \bar{}_1 = 0, \quad \bar{}_2 = 1, \\ & L {}_0 + m(t) q_1 \bar{}_1 + m(t) q_2 \bar{}_2 + G = m(t) q_2 - q_2 - \frac{1}{2} q_1^2, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

由此得到

$$\left.\begin{aligned} & {}_0 = - \frac{1}{L}\left(G + q_2 + \frac{1}{2} q_1^2\right), \\ & {}_1 = q_1 {}_0, \quad {}_2 = 1 + q_2 {}_0 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

将式(39)代入确定方程(33),可验证它们满足 因此,对任取的规范函数 G, 生成元(39) 对应 Lie 对称变换# 特别地,取规范函数为

$$G = - q_2 - \frac{1}{2} q_1^2, \tag{40}$$

则有

$$N_0 = N_1 = 0, \quad N_2 = 1\# \tag{41}$$

参 考 文 献

[1] . [J].
, 1959, (7): 112~ 117.

[2] 杨来伍, 梅凤翔. 变质量系统力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1989.

[3] 梅凤翔. 非完整系统力学基础[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1985.

[4] 戈正铭, 程 禾. 变质量非完整系统的哈密顿原理[J]. 应用数学和力学, 1983, 4(2): 277~ 287.

[5] 罗绍凯. 变质量任意阶非线性非完整系统相对于非惯性系的广义 Noether 定理[J]. 江西科学, 1992, 10(3): 131~ 137.

[6] 赵跃宇, 梅凤翔. 关于力学系统的对称性与不变量[J]. 力学进展, 1993, 23(3): 360~ 372.

[7] 梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 等. Birkhoff 系统动力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1996.

Lie Symmetries and Conserved Quantities of Holonomic Variable Mass Systems

Mei Fengxiang

(Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P R China)

Abstract: In this paper, the Lie symmetries and the conserved quantities of the holonomic variable mass systems are studied. By using the invariance of the ordinary differential equations under the infinitesimal transformations, the determining equations of the Lie symmetries of the systems are established, and the structure equation and the conserved quantities are given. And an example is given to illustrate the application of the result.

Key words: analytical mechanics; variable mass; Lie symmetry; conserved quantity