应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 06_0597_05

非完整非保守力学系统在相空间的 Lie 对称性与守恒量*

刘荣万[1], 傅景礼[2]

([1] 韶关大学 物理系, 广东 韶关 512005; [2] 商丘师专, 河南 商丘 476000)

(黄小清推荐)

摘要: 在相空间引入无限小变换, 研究非完整非保守力学系统运动微分方程的不变性和守恒量• 建立 Lie 对称确定方程, 得到 Lie 对称的结构方程和守恒量形式, 并举例说明结果的应用•

关 键 词: 非完整约束; 相空间; Lie 对称
中图分类号: O316 文献标识码: A

引 言

1918 年 A. E. Noether[1] 揭示了力学系统的对称性与守恒量之间的密切联系, 从此, 关于力学系统的对称性与守恒量的理论和应用研究一直是数学、力学、物理等领域的重要课题• 力学系统对称性与不变量的理论包括 Noether 对称性理论和 Lie 对称性理论• Noether 对称性理论已趋完善, 如文献[2, 3, 4] 所述• Lie 对称性理论起源于上世纪末, 但对力学系统的应用始于本世纪 70 年代末• 由 Lutzky[5] 等人把 Sophus Lie 研究微分方程不变性的扩展群方法引入到力学领域, 提出了使运动微分方程不变的 Lie 对称性[5, 6]•

文献[5, 7] 研究了完整保守和非保守系统在位形空间的 Lie 对称性与守恒量• 本文研究非完整非保守系统在相空间的 Lie 对称性和守恒量, 给出了正则形式的 Lie 对称性质•

1 运动微分方程

研究有 $\varepsilon = n - g$ 个自由度的非完整非保守力学系统, Hamilton 函数为 $H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$, 其中 $\boldsymbol{q} = \{q_1, \cdots q_n\}$ 为广义坐标, $\boldsymbol{p} = \{p_1, \cdots, p_n\}$ 为广义动量• 设系统受有 g 个一阶非线性非完整约束

$$f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g), \tag{1}$$

则系统的运动微分方程可写为

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_s &= \partial H / \partial p_s \\ \dot{p}_s &= -\frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \end{aligned}\right\} \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{2}$$

---

* 收稿日期: 1998_01_06; 修订日期: 1999_01_30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19572018)
作者简介: 刘荣万(1959~), 男, 副教授, 理学学士, 广东韶关大学副校长.

式中 Q_s 为非有势广义力, λ_β 为约束乘子, 可将 Q_s、λ_β 和 f_β 表示为 t、$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{p}$ 的函数

$$\left.\begin{aligned} Q_s &= Q_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})) \\ \lambda_\beta &= \lambda_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})) \\ f_\beta &= f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{bmatrix} s = 1, \cdots, n \\ \beta = 1, \cdots, g \end{bmatrix}, \tag{3}$$

则方程(2)可写为

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_s &= \frac{\partial H}{\partial p_s} \\ \dot{p}_s &= -\frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s + \Lambda_s \end{aligned}\right\} \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{4}$$

式中 $\Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}))$ 为广义非完整约束反力

$$\Lambda_s = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s = 1, \cdots, n)。 \tag{5}$$

方程(4)称为对应于非完整系统(1)、(2)的完整系统运动微分方程。我们可以根据方程(4)寻找对应的非完整系统(1)、(2)的积分。

2　Lie 对称性及其确定方程

设系统是非奇异的, 则由(4)可解出

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_s &= h_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \\ \dot{p}_s &= \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \end{aligned}\right\} \qquad (s = 1, \cdots, n)。 \tag{6}$$

引入无穷小变换

$$\left.\begin{aligned} t^* &= t + \Delta t \\ q_s^* &= q_s + \Delta q_s \\ p_s^* &= p_s + \Delta p_s \end{aligned}\right\} \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{7}$$

其展开式为

$$\left.\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \\ q_s^* &= q_s + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \\ p_s^* &= p_s + \varepsilon\eta_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \end{aligned}\right\} \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{8}$$

式中 ε 为小参数。

取无穷小生成元向量

$$\boldsymbol{X}^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \eta_s \frac{\partial}{\partial p_s}, \tag{9}$$

它的一次扩展

$$\boldsymbol{X}^{(1)} = \boldsymbol{X}^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} + (\dot{\eta}_s - \dot{p}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{p}_s}。 \tag{10}$$

定义 1　如果无穷小变换(8)使方程(6)不变, 则称此变换是对应的完整系统(6)的 Lie 对称变换。

定义 2　如果无穷小变换(8)使方程(6)和(1)不变, 则称此变换是非完整系统(1)、(2)的 Lie 对称变换。

判据 1　如果无穷小生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 满足条件

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0 &= \boldsymbol{X}^{(0)}(h_s) \\ \dot{\eta}_s - \dot{p}_s\dot{\xi}_0 &= \boldsymbol{X}^{(0)}(\alpha_s) \end{aligned}\right\} \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{11}$$

则无穷小变换(8)是对应的完整系统(6)的 Lie 对称变换。

证明　利用微分方程不变性的无穷小判据可知, 方程(6)在无穷小变换(8)下的不变性表示为

$$\left.\begin{aligned} X^{(1)}(\dot q_s - h_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})) &= 0, \\ X^{(1)}(\dot p_s - \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

利用(6)、(9)、(10), 由(12)式我们有

$$\begin{aligned} X^{(1)}(\dot q_s - h_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})) &= X^{(0)}(\dot q_s - h_s) + (\dot\xi_s - \dot q_s\dot\xi_0)\frac{\partial}{\partial \dot q_s}(\dot q_s - h_s) + \\ &\quad (\dot\eta_s - \dot p_s\dot\xi_0)\frac{\partial}{\partial \dot p_s}(\dot q_s - h_s) = \\ &\quad -X^{(0)}(h_s) + (\dot\xi_s - \dot q_s\dot\xi_0) = 0, \end{aligned}$$

所以

$$(\dot\xi_s - \dot q_s\dot\xi_0) = X^{(0)}(h_s),$$

同理可得

$$\dot\eta_s - \dot p_s\dot\xi_0 = X^{(0)}(\alpha_s).$$

证毕.

判据2　如果无穷小生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 满足条件(11)以及条件

$$X^{(0)}(f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g), \tag{13}$$

则无穷小变换(8)是非完整系统(1)、(2)的Lie对称变换.

根据微分方程不变性的基本定理可知, (13)式表示在变换(8)下非完整约束(1)是不变的. 由判据1及定义2便得到判据2.

称(11)、(13)式为非完整系统(1)、(2)在相空间的Lie对称确定方程. 如果无穷小生成元 ξ_0、ξ_s、η_s 满足(11)、(13)式, 则称对应的变换是非完整系统(1)、(2)在相空间的Lie对称变换.

3　结构方程与守恒量

命题　如果无限小生成元 ξ_0、ξ_s、η_s 满足确定方程(11)、(13), 且存在规范函数 $G(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 满足如下结构方程

$$L_p\dot\xi_0 + X^{(1)}(L_p) + (Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot q_s\xi_0) + \dot G = 0, \tag{14}$$

则非完整系统(1)、(2)存在如下形式的守恒量

$$I = p_s\xi_s - H\xi_0 + G = \text{const}, \tag{15}$$

式中 $L_p(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 为Lagrange函数

$$L_p = p_s\dot q_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) - H. \tag{16}$$

证明　对(15)式求导数得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \dot p_s\xi_s + p_s\dot\xi_s - \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_s}\dot q_s + \frac{\partial H}{\partial p_s}\dot p_s\right)\xi_0 - H\dot\xi_0 + \dot G. \tag{17}$$

由(14)式得到

$$\begin{aligned} &(p_s\dot q_s - H)\dot\xi_0 - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0 - \frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s + (\dot\xi_s - \dot q_s\dot\xi_0)p_s + \\ &\quad (Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot q_s\xi_0) + \dot G = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

利用(18)式, (17)式可写为

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \left[\dot p_s + \frac{\partial H}{\partial q_s} - Q_s - \Lambda_s\right]\xi_s + \left[-\dot p_s - \frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s + \Lambda_s\right]\dot q_s\xi_0 = 0,$$

证毕.

4 算 例

考虑 ±Ä½Î´º¿ 雪橇问题

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}J\dot{q}_3^2 - \frac{1}{2}kq_3^2, \tag{19}$$

$$f = \dot{q}_2 - \dot{q}_1\tan q_3. \tag{20}$$

Hamilton 函数

$$H(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = p_s\dot{q}_s - L = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2J}p_3^2 + \frac{1}{2}kq_3^2. \tag{21}$$

由正则方程(4)及约束方程(20)联立可求得

$$\Lambda_1 = \frac{1}{J}p_1p_3(-\tan q_3), \quad \Lambda_2 = \frac{1}{J}p_1p_3, \quad \Lambda_3 = 0. \tag{22}$$

由(4)、(21)、(22)式可得

$$\left.\begin{aligned} &\dot{q}_1 = \frac{1}{m}p_1 = h_1, \quad \dot{q}_2 = \frac{1}{m}p_2 = h_2, \quad \dot{q}_3 = \frac{1}{m}p_3 = h_3, \\ &\dot{p}_1 = -\frac{1}{J}p_1p_3\tan q_3 = \alpha_1, \quad \dot{p}_2 = \frac{1}{J}p_1p_3 = \alpha_2, \quad \dot{p}_3 = -kq_3 = \alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

(23)式代入(11)式得到确定方程如下

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0 = \frac{1}{m}\eta_1, \quad \dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0 = \frac{1}{m}\eta_2, \quad \dot{\xi}_3 - \dot{q}_3\dot{\xi}_0 = \frac{1}{J}\eta_3, \\ &\dot{\eta}_1 - \dot{p}_1\dot{\xi}_0 = -\frac{p_1p_3}{J\cos^2 q_3}\xi_3 - \frac{p_3}{J}\tan q_3\,\eta_1 - \frac{p_1}{J}\tan q_3\,\eta_2, \\ &\dot{\eta}_2 - \dot{p}_2\dot{\xi}_0 = \frac{p_3}{J}\eta_1 + \frac{p_1}{J}\eta_3, \quad \dot{\eta}_3 - \dot{p}_3\dot{\xi}_0 = -k\xi_3. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

由(13)、(20)式可得约束方程不变性条件为

$$\frac{p_1\xi_3}{\cos^2 q_3} + \eta_1\tan q_3 - \eta_2 = 0. \tag{25}$$

方程(24)存在如下解:

$$(1)\ \xi_0 = 1, \quad \xi_s = 0, \quad \eta_s = 0; \tag{26}$$

$$(2)\ \xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = \xi_3 = 0, \quad \eta_s = 0. \tag{27}$$

解组(26)、(27)都同时满足(24)、(25)式, 根据判据 2 可知, 它们可生成非完整系统(1)、(2)的 Lie 对称变换.

根据生成元(26)、(27)式, 结构方程(14)给出

$$\dot{G}_1 = \Lambda_s\dot{q}_s = 0, \quad G_1 = 0; \tag{28}$$

$$\dot{G}_2 = \frac{1}{J}p_1p_3\tan q_3 = -\dot{p}_1, \quad G_2 = -p_1. \tag{29}$$

(15)式给出相应的守恒量

$$I_1 = -\left[\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2J}p_3^2 + \frac{1}{2}kq_3^2\right] = \mathrm{const}, \quad I_2 = 0. \tag{30}$$

我们称(27)式为平凡解, 由(27)生成的变换不产生守恒量. (30)式代表系统的机械能守恒.

参 考 文 献

[1] Noether A E. Invariante variations probleme[J]. G└ttinger Nachrichten, Mathematisch_Physicalishe Klasse, 1918, **2**: 235~ 257.

[2] 梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1991.

[3] 李子平, 经典和量子约束系统及其对称性质[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1993.

[4] Liu Duan. Noether' s theorem and its inverse of nonholonomic nonconservative dynamical systems [J]. Science in China (Series A), 1990, **34**(4): 419~ 429.

[5] Lutzky M. Dynamical symmetries and conserved quantities[J]. J Phy A, Math Gen, 1979, **12**(7): 973 ~ 981.

[6] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations [M]. New York: Springer_Verlag, 1989.

[7] 赵跃宇, 非保守力学系统的Lie对称性和守恒量[J]. 力学学报, 1994, **26**(3): 380~ 384.

[8] Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ [M]. New York: Springer_Verlag, 1983.

Lie Symmetries and Conserved Quantities of Nonconservative Nonholonomic Systems in Phase Space

Liu Rongwan, Fu Jingli

([1]Shaoguan University, Shaoguan, Guangdong 512005, P R China;

[2]Shangqiu Teachers Colleges, Shangqiu, Henan 476000, P R China)

Abstract: The invariance and conserved quantities of the nonconservative nonholonomic systems are studied by introducing the infinitesimal transformations in phase space. The Lie' s symmetrical determining equations are established. The Lie' s symmetrical structure equation is obtained. An example to illustrate the application of the result is given.

Key words: nonholonomic constraint; phase space; Lie' s symmetry