应用数学和力学, 第 20 卷 第 6 期(1999 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 06_0613_06

主转动角与主转动轴的显式表示*

兑关锁, 左晓宝

(南京理工大学 应用力学系, 南京 210094)

(郑泉水推荐)

摘要: 本文利用 Cayley_Hamilton 定理, 给出了两种直接获得转动张量显式表示的方法• 一种为只含变形梯度较低次幂的表达形式, 利用此表示, 获得了主转动角的计算公式和主转动轴的显式表示• 而另一种则是不含复杂系数且含变量个数较少的高效获得转动张量的方法• 进一步, 给出了主转动角和主转动轴的一些性质•

关 键 词: 转动张量; 主转动角; 主转动轴
中图分类号: O33 文献标识码: A

引 言

在连续体变形分析中, 转动与应变和客观性导数一样, 是非线性力学场论的基本课题之一• 在理论上, 转动对应变的度量和定义客观应力率等都有着重要的作用• 另外, 以转动作为基本变量之一的大变形理论, 变形体的局部与整体转动等也都是有着重要实用意义的问题•

通常, 变形梯度可以表示为两种代数分解• 一种是乘积形式的极分解, 即

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}, \tag{1}$$

其中二阶张量 $\boldsymbol{F}$ 为变形梯度, 正交张量 $\boldsymbol{R}$ 为转动张量, 对称正定张量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 分别为右、左伸长张量• 与之相关的右、左 Cauchy_Green 应变张量 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$, 而另一种分解则是将其表示为对称与反对称之和的形式

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{E} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{W}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位张量, $\boldsymbol{W}$ 为反对称张量, $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 为对称张量• 这种加法分解通常用于线性理论近似分析中, 其中 $\boldsymbol{E}$ 作为小应变的度量, $\boldsymbol{W}$ 为小转动的度量•

对于转动张量 $\boldsymbol{R}$, 熊祝华、郑泉水在[1] 中曾给出多种几何意义及在有限变形中的重要性, 并建议将其命名为主转动张量, 可以用主转动角 θ 与反对称张量 $\boldsymbol{P}$ 表示为标准形式

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} + \sin\theta\,\boldsymbol{P} + (1 - \cos\theta)\,\boldsymbol{P}^2, \tag{3}$$

其中反对称张量 $\boldsymbol{P}$ 的轴向量 $\boldsymbol{p}$ 称为 $\boldsymbol{R}$ 的主转动轴, 且有 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{P}^2 = -2$, 主转动角可以唯一表示为

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\boldsymbol{R} - 1)• \tag{4}$$

对于应变、转动和应变率等, 通常可以利用 Hill 的主轴法[2] 获得其表示, 但是这种方法确需要事先确定伸长张量的特征根和特征向量, 这就给进一步的理论分析与数值计算带来不

* 收稿日期: 1997_05_20; 修订日期: 1998_11_15
作者简介: 兑关锁(1963~) , 男, 工程师, 博士.

便• 因此寻求不变性表示将具有许多优越性•

在不变性表示方面, Ting[3], Hoger[4], Sawyers[5]和熊祝华、郑泉水[6]等给出了用 $\boldsymbol{C}$ 来表示 $\boldsymbol{U}$ 的显式表达, 而转动张量通常都是通过计算 $\boldsymbol{U}^{-1}$ 的途径获得• 但这样就给主转动角的计算带来不便•

本文利用 Cayley_Hamilton 定理给出了转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的两种显式表示, 其中一种为只包含变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的较低次幂及 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 的主不变量, 由此获得了只含变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 和伸张张量不变量的主转动角计算公式和 $\boldsymbol{P}$ 的显式表达• 而另一种则是不含复杂系数且只含较少变量个数的高效获得转动张量的方法• 进一步给出了主转动角和主转动轴的一些性质•

1　伸张张量与转动张量的确定

设 $\mathrm{I}_{\boldsymbol{T}}$, $\mathrm{II}_{\boldsymbol{T}}$ 和 $\mathrm{III}_{\boldsymbol{T}}$ 分别为任意张量 $\boldsymbol{T}$ 的主不变量, 则不难由定义验证

$$\Delta_{\boldsymbol{T}} = \mathrm{I}_{\boldsymbol{T}}\mathrm{II}_{\boldsymbol{T}} - \mathrm{III}_{\boldsymbol{T}} = \det(\mathrm{I}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}), \tag{5}$$

其中 det(　) 表示求行列式• 利用 Cayley_Hamilton 定理有

$$\boldsymbol{U}^3 - \mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^2 + \mathrm{II}_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U} - \mathrm{III}_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}, \tag{6}$$

将其用 $\boldsymbol{C}$ 替换, 则有[3]

$$\boldsymbol{U} = \Delta_{\boldsymbol{U}}^{-1}\left\{\mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}\mathrm{III}_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{I} + (\mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}^2 - \mathrm{II}_{\boldsymbol{U}})\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^2\right\}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^{-1} = {} & \mathrm{III}_{\boldsymbol{U}}^{-1}\Delta_{\boldsymbol{U}}^{-1}\Big\{[\mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}\mathrm{II}_{\boldsymbol{U}}^2 - \mathrm{III}_{\boldsymbol{U}}(\mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}^2 + \mathrm{II}_{\boldsymbol{U}})]\boldsymbol{I} - {} \\ & [\mathrm{III}_{\boldsymbol{U}} + \mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}(\mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}^2 - 2\mathrm{II}_{\boldsymbol{U}})]\boldsymbol{C} + \mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{C}^2\Big\},\end{aligned}$$

而 $\mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}$, $\mathrm{II}_{\boldsymbol{U}}$ 和 $\mathrm{III}_{\boldsymbol{U}}$ 满足

$$\mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}^2 = \mathrm{I}_{\boldsymbol{C}} + 2\mathrm{II}_{\boldsymbol{U}},\quad \mathrm{II}_{\boldsymbol{U}}^2 = \mathrm{II}_{\boldsymbol{C}} + 2\mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}\mathrm{III}_{\boldsymbol{U}},\quad \mathrm{III}_{\boldsymbol{U}}^2 = \mathrm{III}_{\boldsymbol{C}},$$

关于 $\mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}$ 和 $\mathrm{II}_{\boldsymbol{U}}$ 的计算可参见[4～6]•

关于转动张量 $\boldsymbol{R}$ 当然可以通过计算 $\boldsymbol{U}^{-1}$ 而得到, 但这样将含有 $\boldsymbol{F}$ 的较高次幂和复杂的系数, 使得主转动角与主转动轴的计算变得很困难• 因此本节给出一种只含有 $\boldsymbol{F}$ 较低次幂的表示•

再利用关于 $\boldsymbol{F}$ 的 Cayley_Hamilton 推导式

$$\boldsymbol{F}^3 - \mathrm{I}_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^2 + \mathrm{II}_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F} - \mathrm{III}_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}, \tag{8}$$

因此 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 可表示为

$$\mathrm{III}_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{F}^2 - \mathrm{I}_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F} + \mathrm{II}_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{I}\text{•} \tag{9}$$

由变形梯度的极分解知

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{F}^{-1}, \tag{10}$$

将(10)中 $\boldsymbol{U}$ 用(7)代替, 再由(9)我们则可获得转动张量的显式表示

$$\boldsymbol{R} = \Delta_{\boldsymbol{U}}^{-1}\left\{\mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}\mathrm{II}_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{I} + (\mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}^2 - \mathrm{II}_{\boldsymbol{U}})\boldsymbol{F} - \mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}\mathrm{I}_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} + \mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^2 - \boldsymbol{F}\boldsymbol{C}\right\}\text{•} \tag{11}$$

2　主转动角与主转动轴的计算

2.1　主转动角的计算

为了计算主转动角, 由式(4)知, 我们只需计算 $\mathrm{tr}\boldsymbol{R}$ 就可以了• 另一方面, 由(11)可得到

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{R} = \Delta_{\boldsymbol{U}}^{-1}\left\{\mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}\mathrm{II}_{\boldsymbol{F}} + \mathrm{I}_{\boldsymbol{F}}\mathrm{I}_{\boldsymbol{U}}^2 - \mathrm{I}_{\boldsymbol{F}}\mathrm{II}_{\boldsymbol{U}} - \mathrm{tr}\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}\right\}, \tag{12}$$

这样我们必须计算 $\mathrm{tr}\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}$• 下面首先给出一些恒等式, 由于 $\mathrm{tr}\boldsymbol{F}\boldsymbol{W}\boldsymbol{F} = 2\mathrm{tr}\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2$, 若用式(2)替换左面的 $\boldsymbol{W}$ 则有 $\mathrm{tr}\boldsymbol{F}\boldsymbol{C} = \mathrm{tr}\boldsymbol{F}^3 - 4\mathrm{tr}\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2$• 进一步由定义不难验证 $\mathrm{tr}\boldsymbol{F}^2 = \mathrm{I}_{\boldsymbol{F}}^2 - 2\mathrm{II}_{\boldsymbol{F}}$, 由式(8)可

得 $\mathrm{tr}\boldsymbol{F}^3 = \mathrm{I}_F^3 - 3\Delta_F$. 同样我们可得到 $\mathrm{tr}\boldsymbol{S}^3 = \mathrm{I}_F^3 - 3\Delta_S$. 若将 $\boldsymbol{F}^3$ 用(2)展开并求迹, 可以得到 $\mathrm{tr}\boldsymbol{F}^3 = \mathrm{tr}\boldsymbol{S}^3 + 3\mathrm{tr}\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2$. 因此

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2 = \Delta_S - \Delta_F, \tag{13}$$

综合上面各式, 则有

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{F}\boldsymbol{C} = \mathrm{I}_F^3 + \Delta_F - 4\Delta_S. \tag{14}$$

将(14)代入(12)得出

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{R} = \Delta_U^{-1}(\mathrm{I}_U\mathrm{II}_F + \mathrm{I}_F\mathrm{I}_U^2 - \mathrm{I}_F\mathrm{II}_U - \mathrm{I}_F^3 - \Delta_F + 4\Delta_S). \tag{15}$$

为方便起见, 设

$$\boldsymbol{S}_0 = \frac{1}{4}(\mathrm{I}_U - \mathrm{I}_F)\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}, \quad \boldsymbol{S}_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{I}_U + \mathrm{I}_F)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}, \tag{16}$$

则(15)可化为

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{R} = 4\Delta_{S0}/\Delta_U - 1. \tag{17}$$

因此, 由(4)和(17), 主转动角可表示为

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{\Delta_{S0}}{\Delta_U} = \Delta_U^{-1}\det(\boldsymbol{S}_1) = \frac{(\mathrm{I}_U^2 - \mathrm{I}_S^2 + \mathrm{II}_S)(\mathrm{I}_U + \mathrm{I}_S) - 8\mathrm{III}_S}{8(\mathrm{I}_U\mathrm{II}_U - \mathrm{III}_U)}. \tag{18}$$

由此说明主转动角完全可由 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的主不变量获得.

2.2 主转动轴的计算

由 $\boldsymbol{R}$ 的标准表示形式知

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2\sin\theta}(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}). \tag{19}$$

将(11)代入(19)得

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\Delta_U\sin\theta}[(\mathrm{I}_U^2 - \mathrm{II}_U + \mathrm{I}_U\mathrm{I}_F)\boldsymbol{W} - \mathrm{I}_U(\boldsymbol{W}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{W}) + \boldsymbol{W}^3 + \boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2 - \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}]. \tag{20}$$

由 Rivlin 恒等式[7]知

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2 + \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\boldsymbol{S} + \mathrm{I}_F(\boldsymbol{W}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{W}) - \mathrm{II}_S\boldsymbol{W}, \tag{21}$$

那么(20)就可化为

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\Delta_U\sin\theta}\left[2\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\boldsymbol{S} - (\mathrm{I}_F + \mathrm{I}_U)(\boldsymbol{W}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{W}) + \frac{1}{2}(\mathrm{I}_F + \mathrm{I}_U)^2\boldsymbol{W}\right]. \tag{22}$$

由(16), 式(22)还可写为

$$\boldsymbol{P} = \frac{2}{\Delta_U\sin\theta}[(\mathrm{I}_{S0}^2 - \mathrm{II}_{S0})\boldsymbol{W} - \boldsymbol{S}_0^2\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_0^2] \tag{23}$$

或

$$\boldsymbol{P} = \Delta_{S0}^{-1}\cot\frac{\theta}{2}[(\mathrm{I}_{S0}^2 - \mathrm{II}_{S0})\boldsymbol{W} - \boldsymbol{S}_0^2\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_0^2]. \tag{23$'$}$$

利用 Rivlin 恒等式还可得出

$$(\mathrm{I}_{S0}^2 - \mathrm{II}_{S0})\boldsymbol{W} - \boldsymbol{S}_0^2\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_0^2 = \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_1, \tag{24}$$

因此式(23)可写为

$$\boldsymbol{P} = (\Delta_{S0}\Delta_U - \Delta_{S0}^2)^{-1/2}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_1. \tag{25}$$

2.3 转动张量的另一表示

由(3)知转动张量 $\boldsymbol{R}$ 可表示为

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} + \sin\theta\boldsymbol{P} + \frac{1}{1 + \cos\theta}(\sin\theta\boldsymbol{P})^2. \tag{26}$$

若令 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{W} \boldsymbol{S}_1$, 则由(23)知

$$\sin\theta \boldsymbol{P} = 2\Delta_U^{-1}\boldsymbol{M}. \tag{27}$$

由(28)知 $1 + \cos\theta = 2\Delta_{S0}/\Delta_U$, 那么(26)则可化为

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} + 2\Delta_U^{-1}(\boldsymbol{M} + \Delta_{S0}^{-1}\boldsymbol{M}^2). \tag{28}$$

显然通过(28)式来获得转动张量 $\boldsymbol{R}$ 要比通过计算 $\boldsymbol{U}^{-1}$ 而获得的工作量小得多, 因此公式(28)是一种高效的直接计算转动张量方法.

2.4 实　例

下面通过[6]中的实例来验证上面的结果. 设

$$[\boldsymbol{F}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{S}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0.5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{W}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ -0.5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据[6]中的结果

$$\mathrm{I}_U = 6.837, \quad \mathrm{II}_U = 12.87, \quad \mathrm{III}_U = 7,$$

则由公式(18)知

$$\Delta_U = 80.99, \quad \Delta_{S0} = 70.15, \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = 0.866.$$

此结果与通过[6]中转动张量所得的主转动角结果完全一样.

由(25)可得

$$[\boldsymbol{P}] = \begin{bmatrix} 0 & -0.1873 & 0.6440 \\ 0.1873 & 0 & -0.7425 \\ -0.6440 & 0.7425 & 0 \end{bmatrix}.$$

由公式(28)得

$$[\boldsymbol{R}] = \begin{bmatrix} 0.8795 & 0.0005 & 0.4760 \\ 0.2557 & 0.8429 & -0.4735 \\ -0.4014 & 0.5381 & 0.7412 \end{bmatrix},$$

$$[\boldsymbol{U}] = [\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}] = \begin{bmatrix} 2.0147 & 0.8438 & 0.4781 \\ 0.8439 & 3.6054 & 0.5386 \\ 0.4785 & 0.5383 & 1.2172 \end{bmatrix}.$$

3　关于主转动角与主转动轴的一些性质

通过上面结果, 可以建立下述方程

方程 1　$$\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_0 = \cot\frac{\theta}{2}\boldsymbol{W}. \tag{29}$$

将(25)式代入方程左侧得

$$\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_0 = -\Delta_{S0}^{-1}\cot\frac{\theta}{2}[\boldsymbol{S}_0^3\boldsymbol{W} + \boldsymbol{S}_0^2\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_0 + \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_0^2 + \boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_0^3 + (\mathrm{II}_{S0} - \mathrm{I}_{S0}^2)(\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_0)]. \tag{30}$$

根据(8)和(22)知

$$\boldsymbol{S}_0^3 = \mathrm{I}_{S0}\boldsymbol{S}_0^2 - \mathrm{II}_{S0}\boldsymbol{S}_0 + \mathrm{III}_{S0}\boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{S}_0^2\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_0^2 + \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_0 = \mathrm{I}_{S0}(\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_0) - \mathrm{II}_{S0}\boldsymbol{W},$$

因此

$$\boldsymbol{S}_0^3\boldsymbol{W} + \boldsymbol{S}_0^2\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_0 + \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_0^2 + \boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_0^3 = (\mathrm{I}_{S0}^2 - \mathrm{II}_{S0})(\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_0) - (\mathrm{I}_{S0}\mathrm{II}_{S0} - \mathrm{III}_{S0})\boldsymbol{W}. \tag{31}$$

将式(31)代入(30)可得式(29)。

方程 2 $$\boldsymbol{WP}^2+\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{W}=\boldsymbol{PWP}-\boldsymbol{W}. \tag{32}$$

由于 $\boldsymbol{P}^3=-\boldsymbol{P}$, 利用式(29)知

$$\cot\frac{\theta}{2}(\boldsymbol{WP}^2+\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{W})=\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{P}^3+\boldsymbol{PS}_0\boldsymbol{P}^2+\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^3\boldsymbol{S}_0=$$
$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PS}_0)\boldsymbol{P}-(\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PS}_0).$$

再次利用式(29)可得式(32)。

方程 3 $$\boldsymbol{PWP}=\frac{1}{2}(\mathrm{I}_F-\mathrm{I}_U)\cot\frac{\theta}{2}\boldsymbol{P}. \tag{33}$$

由(1)知

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{V}=\boldsymbol{FR}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{RF}^{\mathrm{T}}.$$

将(3)和(4)代入上方程, 再由其对称性得

$$\sin\theta(\boldsymbol{SP}+\boldsymbol{PS})=2\boldsymbol{W}+(1-\cos\theta)(\boldsymbol{WP}^2+\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{W}).$$

另外由(29)与(16)知

$$\boldsymbol{SP}+\boldsymbol{PS}+\frac{1}{2}(\mathrm{I}_U+\mathrm{I}_F)\boldsymbol{P}=\cot\frac{\theta}{2}\boldsymbol{W}.$$

结合式(32)和上述方程可得出式(33)。

方程 4 $$\mathrm{tr}(\boldsymbol{FP})=(\mathrm{I}_F-\mathrm{I}_U)\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}. \tag{34}$$

不难验证 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{FP})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{WP})$, 若将式(33)乘 $\boldsymbol{P}$ 则有

$$\boldsymbol{PWP}^2=\frac{1}{2}(\mathrm{I}_F-\mathrm{I}_U)\cot\frac{\theta}{2}\boldsymbol{P}^2.$$

通过求迹可得

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{PWP}^2)=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{WP})=\frac{1}{2}(\mathrm{I}_F-\mathrm{I}_U)\cot\frac{\theta}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{P}^2.$$

再由(5), 则可得到式(34)。

方程 5 $$\mathrm{tr}(\boldsymbol{FP}^2)=(\mathrm{I}_F-\mathrm{I}_U)\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}. \tag{35}$$

不难验证 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{FP}^2)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{SP}^2)$, 若将式(29)乘 $\boldsymbol{P}$ 得

$$\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{P}^2+\boldsymbol{PS}_0\boldsymbol{P}=\cot\frac{\theta}{2}\boldsymbol{WP}=\boldsymbol{SP}^2+\boldsymbol{PSP}-\frac{1}{2}(\mathrm{I}_F-\mathrm{I}_U)\boldsymbol{P}^2,$$

将其求迹并由(34)可得(35)的结果。

方程 6 $$\mathrm{tr}(\boldsymbol{FR})=(\mathrm{I}_F-\mathrm{I}_U)(1+\cos\theta)+\mathrm{I}_F. \tag{36}$$

此式可直接由(34)和(35)验证得到。

最后, 我们给出上述方程的一个应用。设 θ 为关于单位向量 $\boldsymbol{n}$ 的 Cauchy 平均转角, 则有[8]

$$\tan\theta=\mathrm{tr}(\boldsymbol{FN})/\mathrm{tr}(\boldsymbol{FN}^2), \tag{37}$$

其中 $\boldsymbol{N}$ 对应单位向量 $\boldsymbol{n}$ 的反对称量。

若取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}$ 并将(34)和(35)代入(37), 可得

$$\tan\theta=\tan\theta.$$

因此可见, 主转动角恰为关于主转动轴 $\boldsymbol{p}$ 的 Cauchy 平均转动角。这和[8]中的结论是一致的。

致谢 作者感谢郑泉水教授对本文提出的宝贵建议及提供的部分参考文献。

参 考 文 献

[1] 熊祝华, 郑泉水. 非线性力学场论的几个基本问题[J]. 力学进展, 1991, **21**(3): 310~ 332.

[2] Hill R. Basic aspects of invariance in solid mechanics[A]. In: C S Yih ed. *Advances in Applied Mechanics* **18**[C]. New York: Academic Press, 1978, 1~ 75.

[3] Ting T C. Determination of $C^{1/2}$ and $C^{-1/2}$ more general isotropic tensor functions of C [J]. *J Elasticity*, 1985, **15**(3): 319~ 385.

[4] Hoger A, Carlson D E. Determination of the stretch and rotation in the polar decomposition of the deformation gradient[J]. *Quart Appl Math*, 1984, **42**(1): 113~ 117.

[5] Sawyers K. Comments on the paper" Determination of the stretch and rotation in the polar decomposition of the deformation gradient" by A Hoger and D E Carlson[J]. *Quart Appl Math*, 1986, **44**(2): 309~ 311.

[6] Xiong Zhuhua, Zheng Quanshui. General algorithms for the polar decomposition and strains[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1988, **4**(2): 175~ 181.

[7] Rivlin R S. Further remarks on the stress_deformation relations for isotropic materials[J]. *J Rational Mech Anal*, 1955, **4**(5): 681~ 702.

[8] 郑泉水, 黄克智. Cauchy 平均转动[J]. 科学通报, 1988, **33**(22): 1705~ 1707.

The Explicit Representation to the Principal Rotation Angle and the Principal Rotation Axis

Dui Guansuo, Zhuo Xiaobao

(Department of Applied Mechanics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, P R China)

Abstract: By using Cayley_Hamilton theorem, two kinds of explicit representation for the rotation tensor are proposed. The one contains the lower powers of deformation gradient, by which the formula of the principal rotation angle and the explicit representation of principal axis are obtained; the other, a high efficient method to obtain the rotation tensor, does not contain the complicated coefficients and uses few variables. Some properties about the principal rotation angle and principal rotations axis are obtained.

Key words: stretch tensor; principal rotation angle; principal rotation axis