应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 06_0654_07

一类一阶中立型方程解的渐近性与振动性*

王培光

(河北大学 数学系, 河北 保定 071002)

(李骊推荐)

摘要: 讨论具有连续分布滞量的一阶中立型微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)-\sum_{i=1}^{m}p_i(t)x(t-\tau_i)\right]+\int_a^b f(t,\zeta,x[g(t,\zeta)])\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)=0, \tag{1}$$

给出了非振动解当 $t\to\infty$ 时收敛于零的充分条件和方程(1) 所有解振动的判据.

关 键 词: 中立型方程; 渐近性; 振动性; 连续分布滞量
中图分类号: O175.12 文献标识码: A

引 言

由于中立型方程的广泛应用, 使得人们对解的性质的研究越来越多[1,2]. 对于一阶中立型方程, 文[3,4] 讨论了具有离散时滞的渐近和振动情况, 文[5] 则讨论了具有连续分布滞量的情况, 本文进一步考虑更具一般形式的一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)-\sum_{i=1}^{m}p_i(t)x(t-\tau_i)\right]+\int_a^b f(t,\zeta,x[g(t,\zeta)])\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)=0, \tag{1}$$

给出方程(1) 非振动解当 $t\to\infty$ 时趋于零的充分条件和一切解振动的判据. 注意到方程(1) 包含了如下形式的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)-\sum_{i=1}^{m}p_i(t)x(t-\tau_i)\right]+\sum_{j=1}^{n}f_j(t,x[g_j(t)])=0.$$

文[3,4,5] 讨论的方程是上述方程的特殊形式, 因而本文工作推广和改进了文[3~5] 中已有的部分结果.

本文总假定 $\tau_i\ (i=1,2,\dots,m)$ 是正数; $p_i(t)\in C([t_0,+\infty),\mathbf{R}^+)$; $g(t,\zeta)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b],\mathbf{R}^+)$; $g(t,\zeta)$ 分别关于 t 和 ζ 非减, 且 $g(t,\zeta)\leqslant t$, $\zeta\in[a,b]$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\min\left\{g(t,\zeta)\right\}=+\infty$; $f(t,\zeta,x)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b]\times\mathbf{R},\mathbf{R})$; $\sigma(\zeta)\in([a,b],\mathbf{R})$ 非减; 方程(1) 中的积分是 Stieltjes 积分.

定义 1 方程(1) 的解称为振动的, 如果它有任意大的零点, 否则, 称它为非振动的.

定义 2 方程(1) 称为振动的, 如果它的每个解都是振动的.

为叙述方便, 假设文中关于函数值的不等式对一切充分大的 t 成立.

---

* 收稿日期: 1997_11_10; 修订日期: 1999_02_08
基金项目: 河北省自然科学基金资助项目(197091)
作者简介: 王培光(1963~), 男, 副教授, 国内外公开刊物发表论文 30 余篇, 有著作 1 部, 教材 1 部.

1 引 理

为得到我们的主要结论, 给出如下引理

引理 1[5] 设 $x(t)$ 是方程(1) 的有界解. 令

$$y(t)=x(t)-\sum_{i=1}^{m}p_i(t)x(t-\tau_i),$$

若下列极限存在

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{m}p_i(t)=p,\quad \lim_{t\to\infty}p_{i_0}(t)=p_{i_0},\tag{2}$$

其中 $i_0\in\left\{1,2,\cdots,m\right\}$, 且 $0<p\leqslant 1$. 则

(Ⅰ) 当 $p=1$ 时, $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$;

(Ⅱ) 当 $p<1$ 时, $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$ 存在.

引理 2[6] 设下列条件(A_1)、(A_2)、(A_3) 成立,

(A_1) 存在 $\varphi(t,\zeta)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b],\mathbf{R}^+)$, 使得 $\varphi(\varphi(t,\zeta),\zeta)=g(t,\zeta)$, $\varphi(t,\zeta)$ 关于 t, ζ 非减, 并且

$$t\geqslant\varphi(t,\zeta)\geqslant g(t,\zeta),\quad \lim_{t\to+\infty}\min\left\{\varphi(t,\zeta)\right\}=+\infty;$$

(A_2) $\varliminf\limits_{t\to+\infty}\int_{g(t,b)}^{t}\int_a^b Q(s,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}s>\dfrac{1}{e}$ (e 为某一正数);

(A_3) $\varliminf\limits_{t\to+\infty}\int_{\varphi(t,b)}^{t}\int_a^b Q(s,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}s>0$;

则 (Ⅰ) 一阶泛函微分不等式

$$x'(t)+\int_a^b Q(t,\zeta)x[g(t,\zeta)]\mathrm{d}\sigma(\zeta)\leqslant 0$$

没有最终为正的解;

(Ⅱ) 一阶泛函微分不等式

$$x'(t)+\int_a^b Q(t,\zeta)x[g(t,\zeta)]\mathrm{d}\sigma(\zeta)\geqslant 0$$

没有最终为负的解.

2 主 要 结 果

定理 1 设条件(2) 成立, 并且 $0<p<1$, 若存在函数 $Q(t,\zeta)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b],\mathbf{R}^+)$ 和 $F(x)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, 使得

$$f(t,\zeta,x)\,\mathrm{sgn}\,x\geqslant Q(t,\zeta)F(x)\,\mathrm{sgn}\,x,\tag{3}$$

$$-F(-x)\geqslant F(x)\geqslant\lambda x>0\quad(x>0,\ \lambda\text{ 为某正数}).\tag{4}$$

又若

$$\int^{+\infty}\int_a^b Q(s,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}s=+\infty,\tag{5}$$

则方程(1) 的每个非振动解当 $t\to+\infty$ 时都收敛于零.

证明 设方程(1) 存在非振动解 $x(t)$, 并且 $x(t)>0$, 令

$$y(t)=x(t)-\sum_{i=1}^{m}p_i(t)x(t-\tau_i),$$

则

$$y'(t)=-\int_a^b f(t,\zeta,x[g(t,\zeta)])\mathrm{d}\sigma(\zeta)\leqslant-\int_a^b Q(t,\zeta)F(x[g(t,\zeta)])\mathrm{d}\sigma(\zeta)\leqslant$$
$$-\lambda\int_a^b Q(t,\zeta)x[g(t,\zeta)]\mathrm{d}\sigma(\zeta)\leqslant 0\cdot \tag{6}$$

由(6)知，$y(t)$ 为最终单调递减的，因而有

$$y(t)\leqslant y[g(t,\zeta)]=x[g(t,\zeta)]-\sum_{i=1}^m p_i[g(t,\zeta)]x[g(t,\zeta)-\tau_i]\leqslant$$
$$x[g(t,\zeta)], \tag{7}$$

于是对于充分大的 t，我们有

$$0\geqslant y'(t)+\lambda\int_a^b Q(t,\zeta)x[g(t,\zeta)]\mathrm{d}\sigma(\zeta)\geqslant$$
$$y'(t)+\lambda y(t)\int_a^b Q(t,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\cdot \tag{8}$$

由(8)式，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[y(t)\exp\left[\int_T^t\int_a^b\lambda Q(s,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}s\right]\right]\leqslant 0\qquad(t\geqslant T)\cdot$$

对于上式从 T 到 t 积分，得

$$y(t)\leqslant y(T)\exp\left[-\int_T^t\int_a^b\lambda Q(s,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}s\right]\cdot \tag{9}$$

令 $A=\max\{y(T),0\}$，我们有

$$x(t)=y(t)+\sum_{i=1}^m p_i(t)x(t-\tau_i)\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^m p_i(t)x(t-\tau_i)+A\exp\left[-\int_T^t\int_a^b\lambda Q(s,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}s\right]\cdot \tag{10}$$

下面我们证明 $x(t)$ 是方程(1)的有界解·

若不然，则存在点列 $\{t_n\}$，其中 $t_n\in[T,+\infty)$，并且 $\lim_{n\to+\infty}t_n=+\infty$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}x(t_n)=+\infty,\quad x(t_n)=\max_{T\leqslant t\leqslant t_n}x(t)\cdot \tag{11}$$

由(10)可知，对于充分大的 n，

$$x(t_n)\leqslant\sum_{i=1}^m p_i(t_n)x(t_n-\tau_i)+A\exp\left[-\int_T^{t_n}\int_a^b\lambda Q(s,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}s\right]\leqslant$$
$$x(t_n)\sum_{i=1}^m p_i(t_n)+A\exp\left[-\int_T^{t_n}\int_a^b\lambda Q(s,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}s\right]\cdot \tag{12}$$

由条件(2)可知，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，

$$\sum_{i=1}^m p_i(t_n)<1, \tag{13}$$

从而

$$x(t_n)\leqslant A\exp\left[-\int_T^{t_n}\int_a^b\lambda Q(s,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}s\right]\Big\backslash\left(1-\sum_{i=1}^m p_i(t_n)\right)\cdot \tag{14}$$

由(5)可得

$$\lim_{n\to+\infty}x(t_n)\leqslant\lim_{n\to+\infty}A\exp\left[-\int_T^{t_n}\int_a^b\lambda Q(s,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}s\right]\Big\backslash\left(1-\sum_{i=1}^m p_i(t_n)\right)=$$

$$A\lim_{n\to+\infty}\exp\left[-\int_T^{t_n}\int_a^b\lambda Q(s,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\,\mathrm{d}s\right]\Big/(1-p)=0\cdot \tag{15}$$

由(11)得矛盾，因此 $x(t)$ 是有界的，并且 $y(t)$ 也是有界的·

由引理1可知，$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$ 存在，令

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=M, \tag{16}$$

由 $x(t)$ 最终为正，可得 $M\geqslant0$·

若 $M>0$，对充分大的 t，可得 $x(t)>M/2$，且

$$\begin{aligned}0&\geqslant y'(t)+\lambda\int_a^b Q(t,\zeta)x[g(t,\zeta)]\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\geqslant\\&y'(t)+\frac{1}{2}\lambda M\int_a^b Q(t,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\cdot\end{aligned} \tag{17}$$

对于(17)式，从 T_1 到 t 积分，可得

$$y(t)\leqslant y(T_1)-\frac{1}{2}\lambda M\int_{T_1}^t\int_a^b Q(s,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\,\mathrm{d}s\cdot$$

由(5)知，上式与 $y(t)$ 有界矛盾·　因此 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$·

若 $x(t)<0$，令 $z(t)=-x(t)$，此时方程(1)为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[z(t)-\sum_{i=1}^m p_i(t)z(t-\tau_i)\right]+\int_a^b f^*(t,\zeta,z[g(t,\zeta)])\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)=0, \tag{18}$$

其中

$$f^*(t,\zeta,z[g(t,\zeta)])\equiv-f(t,\zeta,-z[g(t,\zeta)])\cdot$$

由(3)和(4)，得

$$\begin{aligned}f^*(t,\zeta,z[g(t,\zeta)])&\equiv-f(t,\zeta,-z[g(t,\zeta)])\geqslant\\&Q(t,\zeta)\left\{-F(-z[g(t,\zeta)])\right\}\geqslant Q(t,\zeta)F(z[g(t,\zeta)]),\end{aligned}$$

因此，采用与证明方程(1)当 $x(t)>0$ 时的相同方法，即可证明 $\lim\limits_{t\to+\infty}z(t)=0$，从而有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$·

定理2　设条件(2)、(3)、(4)和(A_1)、(A_2)、(A_3)成立，若 $0<p<1$，则方程(1)振动·

证明　设 $x(t)$ 是方程(1)的一个非振动解，并且 $x(t)>0$·　注意到由条件(2)可知积分

$$\lim_{t\to+\infty}\int_T^t\int_a^b Q(s,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\,\mathrm{d}s$$

发散，即条件(5)成立，根据定理1得 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$·

令

$$y(t)=x(t)-\sum_{i=1}^m p_i(t)x(t-\tau_i),$$

则

$$\lim_{t\to+\infty}y(t)=0\cdot \tag{19}$$

由条件(3)、(4)和(6)式，我们有

$$\begin{aligned}y'(t)&=-\int_a^b f(t,\zeta,x[g(t,\zeta)])\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\leqslant\\&\quad-\lambda\int_a^b Q(t,\zeta)x[g(t,\zeta)]\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)<0,\end{aligned}$$

即 $y(t)$ 为最终递减的，并且有 $y(t)>0$·

进一步由

$$y(t) < y[g(t,\zeta)] = x[g(t,\zeta)] - \sum_{i=1}^{m} p_i[g(t,\zeta)]x[g(t,\zeta)-\tau_i] \leqslant x[g(t,\zeta)],$$

得

$$y'(t) + \lambda\int_a^b Q(t,\zeta)y[g(t,\zeta)]\mathrm{d}\sigma(\zeta) \leqslant 0. \tag{20}$$

根据引理 2 知(20) 没有最终为正的解, 得矛盾.

若 $x(t) < 0$, 采用定理 1 证明中同样的方法, 亦可得出结论.

定理 3 设条件(2)、(3)、(4) 和(5) 成立, 若

$$\sum_{i=1}^{m} p_i(t) = 1, \tag{21}$$

则方程(1) 振动.

证明 设 $x(t)$ 是方程(1) 的非振动解, 并且, $x(t) > 0$, 令

$$y(t) = x(t) - \sum_{i=1}^{m} p_i(t)x(t-\tau_i).$$

类似于定理 1 的证明方法, 得

$$y'(t) \leqslant -\lambda\int_a^b Q(t,\zeta)x[g(t,\zeta)]\mathrm{d}\sigma(\zeta) \leqslant 0, \tag{22}$$

即 $y(t)$ 为最终递减的, 且由(5) 知, 当 $t \to +\infty$ 时, $y(t)$ 不能最终趋于零.

如果 $y(t)$ 最终为负, 不妨设 $y(t) < 0$, 则对于 $t \geqslant T$, 有

$$y(t) \leqslant y(T) < 0. \tag{23}$$

以下我们证明 $x(t)$ 是有界的. 若不然, 则有 $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} x(t) = +\infty$, 即存在点列 $\{t_n\}$, 其中 $t_n \in [T, +\infty)$, 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty} x(t_n) = +\infty, \quad x(t_n) = \max_{T\leqslant t\leqslant t_n} x(t). \tag{24}$$

由(21), 得

$$x(t_n) = y(t_n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t_n)x(t_n-\tau_i) \leqslant y(T) + x(t_n)\sum_{i=1}^{m} p_i(t_n) = y(T) + x(t_n), \tag{25}$$

于是有 $y(T) \geqslant 0$, 与(23) 矛盾. 因此 $x(t)$ 是有界的, $y(t)$ 也是有界的. 再由引理 1, 可得 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$, 与(22)、(23) 矛盾.

其次, 如果 $y(t)$ 最终为正, 则对于 $t \geqslant T_1$, 有

$$y(t) > 0. \tag{26}$$

由(26), 得

$$x(t) > \sum_{i=1}^{m} p_i(t)x(t-\tau_i) \qquad t \geqslant T_1. \tag{27}$$

若 $\underline{\lim\limits_{t\to+\infty}} x(t) = 0$, 则存在点列 $\{t_n\}$, 其中 $t_n \in [T_1, +\infty)$, 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty} x(t_n) = 0, \quad x(t_n) = \min_{T_1\leqslant t\leqslant t_n} x(t). \tag{28}$$

由(27)、(28), 得

$$x(t_n) > \sum_{i=1}^{m} p_i(t_n) x(t_n - \tau_i) \geqslant x(t_n) \sum_{i=1}^{m} p_i(t_n) = x(t_n), \tag{29}$$

导致矛盾. 从而有 $\lim_{t\to+\infty} x(t) > 0$, 即存在 $T^* > T_1$ 及常数 $A > 0$, 使得

$$x(t) > A, \quad x[g(t,\zeta)] > A \qquad t \geqslant T^*. \tag{30}$$

由(22), 得

$$y'(t) \leqslant -\lambda A \int_a^b Q(t,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta). \tag{31}$$

对(31)式从 T^* 到 t 积分得

$$y(t) \leqslant y(T^*) - \lambda A \int_{T^*}^{t} \int_a^b Q(s,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\,\mathrm{d}s. \tag{32}$$

令 $t \to +\infty$, 注意到(5), 有

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty, \tag{33}$$

与(26)矛盾. 综上可知, 方程(1)的解 $x(t)$ 是振动的.

若 $x(t) < 0$, 用类似于定理1的证明方法亦可得到结论.

例1 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t) - \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{3i} - \mathrm{e}^{-t}\right)x(t-\tau_i)\right] + \int_{-2}^{-1} p x(t+\zeta)\mathrm{e}^{x^2(t+\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta = 0, \tag{34}$$

其中 $\tau_i > 0 (i = 1,2,3)$, $p > 0$ 为正数. 此时相当于方程(1)中, $f(t,\zeta,x) = px(t+\zeta)\mathrm{e}^{x^2(t+\zeta)}$, $g(t,\zeta) = t+\zeta$; 我们可选择 $Q(t,\zeta) = p$, $F(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$, 则

(Ⅰ) 取 $\varphi(t,\zeta) = t + \zeta/2$, 且当 $p > 1/e$ 时, 引理2的条件(A)成立, 由定理2可知方程(34)的所有解振动.

(Ⅱ) 设方程(34)存在非振动解, 注意到

$$\int^{+\infty}\int_a^b Q(s,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\,\mathrm{d}s = \int^{+\infty}\int_{-2}^{-1} p\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)\,\mathrm{d}s = +\infty,$$

由定理1知方程(34)的非振动解当 $t \to +\infty$ 时趋于零.

例2 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t) - \frac{1}{2}x(t-\tau_1) - \frac{1}{2}x(t-\tau_2)\right] + \int_0^1 \frac{t+\zeta}{\cos\zeta}x\left(\frac{t}{2}+\zeta\right)\mathrm{e}^{x^2(t/2+\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta = 0 \qquad (t \geqslant 2), \tag{35}$$

其中 $\tau_1, \tau_2 > 0$. 此时相当于方程(1)中, $g(t,\zeta) = t/2+\zeta$, $f(t,\zeta,x) = \frac{t+\zeta}{\cos\zeta}x\mathrm{e}^{x^2}$. 注意到

$$\frac{t+\zeta}{\cos\zeta}x\mathrm{e}^{x^2}\operatorname{sgn}x \geqslant (t+\zeta)x\mathrm{e}^{x^2}\operatorname{sgn}x \qquad t \geqslant 2,\ 0 \leqslant \zeta \leqslant 1,$$

可选取

$$Q(t,\zeta) = t+\zeta, \quad F(x) = x\mathrm{e}^{x^2}.$$

由定理3可知, 方程(35)的所有解振动.

致谢　作者衷心感谢审稿人提出的合理建议和修改意见.

参 考 文 献

[1] Brayton R K, Willoughby R A. On the numerical integration of a symmetric system of difference-differential equations of neutral type[J]. J Math Anal Appl, 1967, **18**(1): 182~189.

[2] Hale J. Theory of Functional Differential Equations[M]. New York: Springer_Verlag, 1997.
[3] 俞元洪. 一阶中立型时滞微分方程解的振动性[J]. 科学通报, 1989, **34**(2): 158.
[4] Ladas G, Sficas Y G. Oscillations of neutral delay differential equations[J]. Canad Math Bull, 1986, **29**(3): 438~445.
[5] Fu Xilin, Yu Yuanhong. Asymptotic and oscillatory behaviors of a class of first order nonlinear neutral equation[J]. Ann Diff Eqs, 1993, **9**(1): 18~25.
[6] Ruan Jiong. A class of differential inequalities with continuous distributed deviating arguments[J]. Acta Mathematics Sinica, 1987, **30**(5): 661~670.

Asymptotic and Oscillation for a Class of First Order Neutral Differential Equation

Wang Peiguang
(Department of Mathematics, Hebei University, Baoding, Hebei 071002, P R China)

Abstract: In this paper, the first order neutral differential equation with continuous distributed delay

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)-\sum_{i=1}^{m}p_i(t)x(t-\tau_i)\right]+\int_a^b f(t,\zeta,x[g(t,\zeta)])\mathrm{d}\sigma(\zeta)=0 \qquad (1)$$

is concerned, and the asymptotic behavior of nonoscillatory solution and the oscillatory criteria are given for Equation (1).

Key words: neutral differential equation; asymptotic; oscillation; continuous distributed delay